ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 7 (434)

УДК 514.76

*А.Ю. ДАНЬШИН*

# ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫЕ КОНФОРМНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В КАСАТЕЛЬНЫХ РАССЛОЕНИЯХ ФИНСЛЕРОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

## Введение

В статье рассмотрены инфинитезимальные конформные преобразования в касательных расслоениях финслеровых пространств с метриками, принадлежащими некоторому классу, который, в частности, содержит финслеровы обобщения метрик Сасаки, Сато и Яно–Кобаяси. Аналогичная задача для касательного расслоения $T(M)$ риманова многообразия была решена В.Г. Подольским [1]. Исследования в [1] проводились в предположении, что на $M$ все дифференциально-геометрические структуры зависят только от точек базы. Автором исследовались инфинитезимальные проективные [2] и конформные преобразования в касательных расслоениях финслеровых пространств. Как известно [3], в таких пространствах все дифференциально-геометрические структуры зависят не только от точки базы, но и от касательного вектора. В статье используется развитый в [4] аппарат полных лифтов, а также определенные в [5] метрики.

## 1. Метрики на касательных расслоениях финслеровых многообразий

Пусть $M$ — гладкое многообразие ($\dim M = n$). Превратим многообразие $M$ в финслерово многообразие $M(F)$, задав на нем финслерову метрику [3]:

$$ds = F(x^k, dx^m),$$

где $x^k$ $(i, k, m, \ldots = 1, \ldots, n)$ — координаты на $M$, $F$ — однородная функция первой степени по $dx^k$. Финслеров метрический тензор определяется следующим образом [3]:

$$g_{ik}(x, \dot{x}) \equiv \frac{1}{2} F^2{}_{\cdot i \cdot k},$$

где $F^2{}_{\cdot i \cdot k} \equiv \partial^2 F / \partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^k$, $\dot{x}^k \equiv dx^k/dt$ — произвольный касательный к $M$ вектор.

Векторное поле $u^i = u^i(x)$ определяет инфинитезимальное конформное преобразование на $M(F)$, если оно удовлетворяет уравнению

$$\mathcal{L}_u g_{ik}(x, \dot{x}) = k(x) g_{ik}(x, \dot{x}),$$

где $k = k(x)$ — так называемый конформный фактор, $\mathcal{L}_u$ — производная Ли вдоль векторного поля $u$. Конформный фактор может зависеть только от переменных $x^k$, что является известным фактом из теории конформных преобразований финслеровых пространств [3].

Наше исследование опирается на тот факт, что аппарат полных лифтов, развитый в [4], полностью применим для финслеровых пространств, т. е. дифференциально-геометрические структуры на многообразии $M(F)$ могут быть подняты в его касательное расслоение $T(M(F))$. В статье используются обозначения, принятые в [4]. Все полные лифты будут производиться относительно связности Бервальда [3] Эту связность будем обозначать через $G$, а ее компоненты — соответственно через $G^i{}_k, G^i{}_{km}$. Согласно [4] любой тензор $T$ валентности $(a, b)$ на $T(M)$

может быть представлен в виде полного лифта набора $N = 2^{a+b}$ полей слоевых тензоров $\underset{\nu}{t}(x,\dot{x})$, $(\nu = 0,\dots,N-1)$

$$T = {}^G[\underset{0}{t},\underset{1}{t},\dots,\underset{N-1}{t}].$$

Отметим несколько типов лифтов, используемых в дальнейшем

1) вертикальный лифт векторного поля $v$

$${}^V v = {}^G[0,v];$$

2) горизонтальный лифт векторного поля $v$

$${}^H v = {}^G[v,0];$$

3) естественный лифт векторного поля $v$

$${}^N v = {}^G[v,\overset{0}{\nabla} v],$$

где $\overset{0}{\nabla} = \dot{x}^k\nabla_k$, а $\nabla_k$ — ковариантная производная относительно связности Бервальда;
4) горизонтально-векторный лифт тензорного поля $A$ типа $(1,1)$

$${}^{HX}A = {}^G[A\cdot\dot{x},0],$$

где $(A\cdot\dot{x})^i = A^i_k\dot{x}^k$;
5) вертикально-векторный лифт тензорного поля $A$ типа $(1,1)$

$${}^{VX}A = {}^G[0,A\cdot\dot{x}].$$

Все тензоры и связности на $T(M(F))$ будут записываться в специальной системе координат $z^\alpha = (x^k,\dot{x}^m)$, $\alpha,\beta,\gamma\dots = 1,\dots,2n$.

В работе [5] Ф.И. Каган ввел трехпараметрическое семейство метрик в $T(M)$, являющееся полным лифтом метрики базы

$$\widetilde{g}_{\lambda\mu} = {}^G[\alpha g,\beta g,\beta g,\gamma g] = \begin{bmatrix}\gamma g_{ik} + 2\beta G^s{}_{(i}g_{k)s} + \alpha G^s{}_i G^t{}_k g_{st} & \beta g_{ik} + \alpha G^s{}_i g_{ks}\\ \beta g_{ik} + \alpha G^s{}_k g_{is} & \alpha g_{ik}\end{bmatrix}, \tag{1}$$

где $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ — скалярные поля на $T(M)$. В той же работе было указано, что эта конструкция пригодна и в случае, когда $g$ — произвольная финслерова метрика.

В данной работе метрика вида (1) не используется во всей ее общности. Рассмотрены два подсемейства семейства метрик (1). Первое из них получается следующим образом. Введем на $T(M(F))$ метрику вида (1), положив $\beta = 0$, и считая $\alpha$ и $\gamma$ произвольными отличными от нуля числами. Полученное семейство метрик далее будет называться семейством метрик типа Сасаки–Сато, т.к. при $\alpha = \gamma = 1$ получается финслерово обобщение метрики Сасаки, а при $\alpha = \rho$, $\gamma = \rho^{-1}$, где $\rho$ — некоторый скаляр, финслерово обобщение метрики Сато (см. [5] и цитированную там литературу). Для того чтобы построить второе подсемейство, положим $\alpha = \gamma = 0$, и $\beta = 1$, не ограничивая общности рассмотрения. Полученная метрика далее будет называться метрикой типа Яно–Кобаяси, т.к. как она является финслеровым обобщением метрики Яно–Кобаяси (см. [5] и цитированную там литературу).

## 2. Уравнения конформных преобразований в касательном расслоении $T(M(F))$

Выведем уравнения инфинитезимальных конформных преобразований в касательном расслоении $T(M(F))$, наделенном метрикой вида (1) в предположении, что скалярные поля $\alpha, \beta, \gamma$ — постоянные числа. Пусть векторное поле $\widetilde{v}$ на $T(M(F))$ определяет инфинитезимальное конформное преобразование метрики (1). Тогда оно удовлетворяет уравнению

$$\mathcal{L}_{\widetilde{v}}\widetilde{g}_{\alpha\beta} = K\widetilde{g}_{\alpha\beta}, \tag{2}$$

где $K = K(x, \dot{x})$ — конформный фактор. Представив $\widetilde{v}$ в виде полного лифта:

$$\widetilde{v} = {}^{G}[\underset{0}{v}, \underset{1}{v}],$$

найдем, что (2) эквивалентно следующей системе уравнений:

$$\begin{gathered} 2\alpha\underset{1}{v}^{s}{}_{\cdot(k}g_{m)s} + 2\alpha\underset{1}{v}^{s}C_{kms} + 2\beta\underset{0}{v}^{i}{}_{\cdot(k}g_{m)s} + \alpha\underset{0}{v}^{s}g_{kms} = \alpha K g_{km}, \\ \alpha g_{ks}\nabla_m\underset{1}{v}^{s} + \beta(\underset{1}{v}^{s}{}_{\cdot k}g_{ms} + 2\underset{1}{v}^{s}C_{kms}) + \beta g_{ks}\nabla_m\underset{0}{v}^{s} + \gamma\underset{0}{v}^{s}{}_{\cdot k}g_{ms} + \underset{0}{v}^{s}(\beta g_{kms} + \alpha g_{kt}H^{t}{}_{ms}) = \beta K g_{km}, \\ 2\beta g_{s(k}\nabla_{m)}\underset{1}{v}^{s} + 2\gamma(\underset{1}{v}^{s}C_{kms} + g_{s(k}\nabla_{m)}\underset{0}{v}^{s}) + \underset{0}{v}^{s}(\gamma g_{kms} + 2\beta g_{t(k}H^{t}{}_{m)s}) = \gamma K g_{km}, \end{gathered} \tag{3}$$

где[1]

$$\begin{aligned} g_{kms} &\equiv \nabla_s g_{km}, \\ C_{ikm} &\equiv \frac{1}{2}g_{ik\cdot m}, \\ H^{i}{}_{km} &\equiv H^{i}{}_{skm}\dot{x}^{s}, \end{aligned}$$

$H^{i}{}_{skm}$ — тензор кривизны связности Бервальда, $a_{(km)} \equiv (1/2)(a_{km} + a_{mk})$.

## 3. Конформные преобразования на $T(M(F))$, наделенном метрикой типа Сасаки–Сато

Докажем следующую теорему.

**Теорема 1.** *Для того чтобы векторное поле $\widetilde{v}$, принадлежащее классу* SHF*-функций (см. ниже), определяло инфинитезимальное конформное преобразование на касательном расслоении $T(M(F))$ финслерового многообразия $M(F)$, $\dim M(F) > 2$, наделенном метрикой типа Сасаки–Сато, необходимо и достаточно, чтобы оно имело вид*

$$\widetilde{v} = {}^{N}u + {}^{V}v + {}^{HX}w + {}^{V}V + \frac{1}{2}l^{VX}\mathrm{id} - \frac{1}{4}F^2\left(\frac{\alpha}{\gamma}{}^{H}(\nabla^* k) + {}^{V}(D^* l)\right) - \frac{1}{12}\frac{\alpha}{\gamma}F^2\,{}^{H}(\nabla^* l),$$

*где* $w^{i}{}_{k} = -\dfrac{\alpha}{\gamma}g^{is}\nabla_s v_k$; $(\nabla^* k)^i = g^{is}\nabla_s k$; $(\nabla^* l)^i = g^{is}\nabla_s l$; $(D^* l)^i = g^{is}l_{\cdot s}$; $k = k(x)$, $l = l(x, \dot{x})$ — *скалярные поля на $M(F)$, $u^i = u^i(x)$, $v^i = v^i(x, \dot{x})$, $V^i = V^i(x, \dot{x})$ — векторные поля на $M(F)$,*

[1] Следует учесть, что $\nabla g \neq 0$ в финслеровых пространствах общего вида. В пространствах Ландсберга и Бервальда $\nabla g = 0$ и результаты данной работы легко распространить на эти случаи.

*удовлетворяющие условиям*

$$
\begin{gathered}
\mathcal{L}_u g_{km} = k g_{km}, \\
v_{(k\cdot m)} = v^s C_{kms} = 0, \\
V_{(k\cdot m)} = V^s C_{kms} = 0, \\
\dot{x}^h g_{ht} g^s{}_{km} \nabla_s v^t = \frac{1}{2} F^2 l_{\cdot s} C^s{}_{km}, \\
\alpha \dot{x}^h g_{ht} \nabla_{(k} \nabla_{m)} v^t = \gamma \frac{1}{2} F^2 l_{\cdot s} C^s{}_{km} - \gamma g_{km} l, \\
\nabla_k \nabla_m k = g^s{}_{km} \nabla_s k = 0, \\
\nabla_{(k} \nabla_{m)} l = g^s{}_{km} \nabla_s l = 0, \\
H^i{}_{ks} g^{sm} \nabla_m k = H^i{}_{ks} g^{sm} \nabla_m l = 0, \\
\nabla_k V^i = \frac{1}{2} g_{kt} \dot{x}^t g^{is} \nabla_s k - \frac{1}{2} \delta^i{}_k \dot{x}^s \nabla_s k - F^2 C^{is}{}_k \nabla_s k, \\
\alpha \dot{x}^h g_{ht} H_{km}{}^s \nabla_s v^t = \gamma \left( \frac{1}{3} g_{ks} \dot{x}^s \nabla_m l - \frac{1}{3} F^2 \nabla_m (l_{\cdot k}) + \frac{1}{4} F^2 l_{\cdot s} g^s{}_{km} - \frac{1}{6} F^2 C^s{}_{km} \nabla_s l \right),
\end{gathered} \tag{4}
$$

*причем $v^i = v^i(x, \dot{x})$ — однородно нулевой степени по $\dot{x}$, $V^i(x, \dot{x})$ и $l(x, \dot{x})$ однородны первой степени по $\dot{x}$. При этом уравнение для $\widetilde{v}$ имеет вид (2), где $K = k(x) + l(x, \dot{x})$.*

**Доказательство.** Необходимо проинтегрировать систему (3) при $\beta = 0$. В соответствии с условием теоремы будем искать решение этой системы в классе SHF-функций[1].

**Определение.** Функция $f(x, \dot{x})$ называется SHF-функцией, если она представима в виде поточечно сходящегося ряда

$$
f(x, \dot{x}) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \overset{(s)}{\Phi}(x, \dot{x}),
$$

где $\overset{(s)}{\Phi}(x, \dot{x})$ — функции, однородные $s$-й степени по $\dot{x}$. В частности, в этом классе содержатся функции, разложимые в ряд Тейлора по $\dot{x}$

$$
f(x, \dot{x}) = f_0(x) + \sum_{\sigma=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma!} A_{\mathbf{k}_\sigma}(x) \dot{x}^{\mathbf{k}_\sigma},
$$

где $\mathbf{k}_\sigma = \{k_1, k_2, \ldots, k_\sigma\}$ $(k_i = 1, \ldots, n)$, — мультииндекс длины $\sigma$, $\dot{x}^{\mathbf{k}_\sigma} \equiv \dot{x}^{k_1} \dot{x}^{k_2} \cdots \dot{x}^{k_\sigma}$.

Запишем неизвестные функции $\underset{0}{v}^i$, $\underset{1}{v}^i$, $K$ в SHF-виде

$$
\underset{0}{v}^i(x, \dot{x}) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \overset{(s)}{U}{}^i(x, \dot{x}), \quad \underset{1}{v}^i(x, \dot{x}) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \overset{(s)}{V}{}^i(x, \dot{x}),
$$

$$
K(x, \dot{x}) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \overset{(s)}{k}(x, \dot{x}).
$$

Тогда каждое уравнение системы (3) расщепляется по однородности входящих в него членов на бесконечное число уравнений одной степени однородности, т. к. справедлива следующая

**Лемма.** *Пусть $f(x, \dot{x})$, $h(x, \dot{x})$ — две SHF-функции, т. е.*

$$
f(x, \dot{x}) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \overset{(s)}{\Phi}(x, \dot{x}), \quad h(x, \dot{x}) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \overset{(s)}{\Psi}(x, \dot{x}),
$$

[1] SHF — series of homogeneous functions — ряд однородных функций (англ.). Название предлагается автором.

*и* $f(x,\dot{x}) = h(x,\dot{x})$. *Тогда*

$$\overset{(s)}{\Phi}(x,\dot{x}) = \overset{(s)}{\Psi}(x,\dot{x}) \quad \forall s \in \mathbf{Z}.$$

**Доказательство.** В силу однородности имеем

$$\begin{aligned} f(x,k\dot{x}) &= \sum_{s=-\infty}^{\infty} \overset{(s)}{\Phi}(x,k\dot{x}) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} k^s \overset{(s)}{\Phi}(x,\dot{x}), \\ h(x,k\dot{x}) &= \sum_{s=-\infty}^{\infty} \overset{(s)}{\Psi}(x,k\dot{x}) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} k^s \overset{(s)}{\Psi}(x,\dot{x}), \end{aligned} \tag{5}$$

где $k$ — произвольное число . По условию $f(x,\dot{x}) = h(x,\dot{x})$, поэтому, приравняв (5.1) и (5.2) и пользуясь произвольностью $k$, получим утверждение леммы.

Уравнение (2) эквивалентно уравнению

$$2\nabla_{(\alpha}\widetilde{v}_{\beta)} = K\widetilde{g}_{\alpha\beta}.$$

Рассматривая это уравнение при $\alpha = n+i$, $\beta = n+k$, получим при $\dim M(F) > 2$

$$K = k(x) + l(x,\dot{x}).$$

Рассмотрим уравнение

$$\mathcal{L}_{\widetilde{v}}\widetilde{\Gamma}^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = \delta^{\alpha}{}_{(\beta}K_{,\gamma)} - \frac{1}{2}\widetilde{g}^{\alpha\sigma}K_{,\sigma}\widetilde{g}_{\beta\gamma}, \tag{6}$$

которое является следствием уравнения (2). Полагая в нем $\alpha = i$, $\beta = n+k$, $\gamma = n+m$, и свертывая по индексам $k$ и $m$ с $\dot{x}^k\dot{x}^m$, получим

$$\underset{0}{v}^i(x,\dot{x}) = \overset{(0)}{U}{}^i(x,\dot{x}) + \overset{(1)}{U}{}^i(x,\dot{x}) - \frac{1}{4}\frac{\alpha}{\gamma}F^2 g^{is}\nabla_s k - \frac{1}{12}\frac{\alpha}{\gamma}F^2 g^{is}\nabla_s l.$$

Полагая в уравнении (6) $\alpha = n+i$, $\beta = n+k$, $\gamma = n+m$, и свертывая по индексам $k$ и $m$ с $\dot{x}^k\dot{x}^m$, получим

$$\underset{1}{v}^i(x,\dot{x}) = \overset{(0)}{V}{}^i(x,\dot{x}) + \overset{(1)}{V}{}^i(x,\dot{x}) + \frac{1}{2}\dot{x}^i l(x,\dot{x}) - \frac{1}{4}F^2 g^{is} l_{.s}.$$

Теперь расщепление системы (3) по однородности стало конечным. Однородность членов уравнений этой системы от $-1$-й до 4-й степени, и, таким образом, система расщепляется на шесть систем. Подставляя полученные для $\underset{0}{v}^i$, $\underset{1}{v}^i$ и $K$ разложения в систему уравнений (3) и выделяя члены одной степени однородности, получим результаты теоремы. В ходе решения были произведены замены $\overset{(0)}{U}{}^i = u^i(x)$, $\overset{(1)}{U}{}^i = -\dfrac{\alpha}{\gamma}g^{is}\nabla_s v_k$, $\overset{(0)}{V}{}^i = v^i(x,\dot{x})$, $\overset{(1)}{V}{}^i = \dot{x}^s\nabla_s u^i(x) + V^i(x,\dot{x})$. □

## 4. Конформные преобразования на $T(M(F))$, наделенном метрикой Яно–Кобаяси

**Теорема 2.** *Для того чтобы векторное поле $\widetilde{v}$, принадлежащее классу* SHF*-функций, определяло инфинитезимальное конформное преобразование на касательном расслоении $T(M(F))$ финслерового пространства $M(F)$, наделенном метрикой Яно–Кобаяси, необходимо и достаточно, чтобы оно имело вид*

$$\widetilde{v} = {}^{N}u + {}^{V}v + {}^{H}U + {}^{V}V + \frac{1}{2}l^{\,VX}\mathrm{id},$$

*где $u^i = u^i(x)$, $v^i = g^{is}v_s(x)$, $U^i = U^i(x,\dot{x})$, $V^i = V^i(x,\dot{x})$ — векторные поля на $M(F)$, удовлетворяющие условиям*

$$\begin{gathered}
\mathcal{L}_u g_{km} + V^s{}_{\cdot k} g_{ms} + 2V^s C_{kms} = k g_{km}, \\
g_{s(k}\nabla_{m)} v^i = 0, \\
g_{s(k} U^s{}_{\cdot m)} = 0, \\
g_{s(k}(\mathcal{L}_u G^s{}_{m)} + \nabla_{m)} V^s) = 0, \\
\frac{1}{2} l_{\cdot k} g_{ms}\dot{x}^s + g_{ks}\nabla_m U^s + U^s g_{kms} = \frac{1}{2} l g_{km}, \\
\frac{1}{2} g_{s(k}\nabla_{m)} l + U^s g_{t(k} H^t{}_{m)s} = 0,
\end{gathered} \tag{7}$$

*и $U^i(x,\dot{x})$, $V^i(x,\dot{x})$,$l(x,\dot{x})$ однородны первой степени по $\dot{x}$. При этом уравнение для $\widetilde{v}$ имеет вид (2), где $K = k(x) + l(x,\dot{x})$.*

**Доказательство.** Для доказательства теоремы необходимо проинтегрировать систему (3) при $\alpha = \gamma = 0$ В соответствии с условием теоремы будем искать решение этой системы в классе SHF-функций. Запишем неизвестные функции $\underset{0}{v}^i, \underset{1}{v}^i$, $K$ в SHF-виде (см. § 3). Тогда в соответствии с леммой § 3 каждое уравнение системы (3) расщепляется по однородности входящих в него членов на бесконечное число уравнений одной степени однородности. Рассматривая уравнение (6), полагая в нем $\alpha = i$, $\beta = n+k$, $\gamma = n+m$ и свертывая по индексам $k$ и $m$ с $\dot{x}^k\dot{x}^m$, получим

$$\underset{0}{v}^i(x,\dot{x}) = \overset{(0)}{U}{}^i(x,\dot{x}) + \overset{(1)}{U}{}^i(x,\dot{x}).$$

Полагая в уравнении (6) $\alpha = n+i$, $\beta = n+k$, $\gamma = n+m$ и свертывая по индексам $k$ и $m$ с $\dot{x}^k\dot{x}^m$, получим

$$\begin{gathered}
\underset{1}{v}^i(x,\dot{x}) = \overset{(0)}{V}{}^i(x,\dot{x}) + \overset{(1)}{V}{}^i(x,\dot{x}) + \frac{1}{2}\dot{x}^i l(x,\dot{x}), \\
K = k(x) + l(x,\dot{x}).
\end{gathered}$$

Теперь расщепление системы (3) по однородности стало конечным. Однородность членов уравнений этой системы от −1-й до 2-й степени, и, таким образом, система расщепляется на четыре системы. Подставляя полученные для $\underset{0}{v}^i$, $\underset{1}{v}^i$ и $K$ разложения в систему уравнений (3) и выделяя члены одной степени однородности, получим результаты теоремы. В ходе решения были произведены замены $\overset{(0)}{U}{}^i = u^i(x)$, $\overset{(1)}{U}{}^i = U(x,\dot{x})$, $\overset{(0)}{V}{}^i = g^{is}v_s(x)$, $\overset{(1)}{V}{}^i = \dot{x}^s\nabla_s u^i(x) + V^i(x,\dot{x})$. □

## Заключение

Полученные в статье результаты согласуются с результатами В.Г. Подольского [1]. Если в уравнениях (4) и (7) перейти к риманову случаю, т. е. считать, что все дифференциально-геометрические величины не зависят от $\dot{x}$, тогда уравнения (4) и (7) перейдут в соответствующие уравнения работы [1][1].

В заключение автор благодарит проф. А.В. Аминову за постановку задачи и полезные советы.

[1]Выбор знака тензора кривизны в этой статье противоположен выбору знака тензора Римана, сделанному в работе [1].

## Литература


1. Подольский В.Г. *Специальные инфинитезимальные преобразования в касательном расслоении римановых многообразий.*: Дисс. ... канд. физ.-матем. наук. – Казань, 1976. – 129 с.
2. Даньшин А.Ю. *Инфинитезимальные проективные преобразования в касательном расслоении финслеровых многообразий* // Изв. вузов. Математика. – 1995. – № 7. – С. 12–21.
3. Рунд Х. *Дифференциальная геометрия финслеровых пространств.* – М.: Наука, 1981. – 502 с.
4. Каган Ф.И. *К теории лифтов для тензорных полей из многообразия в его касательный пучок* // Изв. вузов. Математика. – 1969. – № 9. – С. 37–46.
5. Каган Ф.И. *Римановы метрики в касательном расслоении над римановым многообразием* // Изв. вузов. Математика. – 1973. – № 6. – С. 42–51.



*Казанский государственный университет*



*Поступила* 13.10.1995