ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2005 МАТЕМАТИКА № 8 (519)

УДК 517.553

А.М. КЫТМАНОВ, З.Е. ПОТАПОВА

ФОРМУЛЫ ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ СТЕПЕННЫХ СУММ КОРНЕЙ СИСТЕМ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

Введение

Рассмотрим систему функций $f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z)$, голоморфных в окрестности точки $0 \in \mathbb{C}^n$, $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, имеющих следующий вид:

$$f_j(z) = z^{\beta^j} + Q_j(z), \quad j = 1, 2, \dots, n, \tag{1}$$

где $\beta^j = (\beta_1^j, \beta_2^j, \dots, \beta_n^j)$ — мультииндекс с целыми неотрицательными координатами, $z^{\beta^j} = z_1^{\beta_1^j} \cdot z_2^{\beta_2^j} \cdots z_n^{\beta_n^j}$ и $\|\beta^j\| = \beta_1^j + \beta_2^j + \dots + \beta_n^j = k_j$, $j = 1, 2, \dots, n$. Функции Q_j разлагаются в окрестности нуля в ряд Тейлора, сходящийся абсолютно и равномерно,

$$Q_j(z) = \sum_{\|\alpha\| \geqslant 0} a_\alpha^j z^\alpha, \tag{2}$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_j \geqslant 0$, $\alpha_j \in \mathbb{Z}$, а $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdot z_2^{\alpha_2} \cdots z_n^{\alpha_n}$.

В дальнейшем будем считать, что степени всех мономов (по совокупности переменных), входящих в Q_j, строго больше k_j, $j = 1, 2, \dots, n$ ($\|\alpha\| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n > k_j$).

Рассмотрим циклы $\gamma(r) = \gamma(r_1, r_2, \dots, r_n)$, являющиеся остовами поликругов,

$$\gamma(r) = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_s| = r_s,\ s = 1, 2, \dots, n\}, \quad r_1 > 0, \dots, r_n > 0.$$

При достаточно малых r_j циклы $\gamma(r)$ лежат в области голоморфности функций f_j, поэтому ряды

$$\sum_{\|\alpha\| \geqslant 0} |a_\alpha^j| r_1^{\alpha_1} \cdots r_n^{\alpha_n}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

сходятся. Тогда на цикле $\gamma(tr) = \gamma(tr_1, tr_2, \dots, tr_n)$, $t > 0$, имеем

$$|z|^{\beta^j} = t^{k_j} \cdot r_1^{\beta_1^j} \cdot r_2^{\beta_2^j} \cdots r_n^{\beta_n^j} = t^{k_j} \cdot r^{\beta^j},$$

а

$$|Q_j(z)| = \Big| \sum_{\|\alpha\| \geqslant 0} a_\alpha^j z^\alpha \Big| \leqslant \sum_{\|\alpha\| \geqslant 0} t^{\|\alpha\|} |a_\alpha^j| r^\alpha \leqslant t^{k_j + 1} \sum_{\|\alpha\| \geqslant 0} |a_\alpha^j| r^\alpha.$$

Поэтому при достаточно малых положительных t на цикле $\gamma(tr)$ выполняются неравенства

$$|z|^{\beta^j} > |Q_j(z)|, \quad j = 1, 2, \dots, n, \tag{3}$$

таким образом,

$$f_j(z) \neq 0 \ \text{ на } \ \gamma(tr), \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-01-00167; работа второго — при поддержке Совета по грантам при Президенте Российской Федерации (№ НШ 1212-2003.1).

В частности, в некоторой достаточно малой окрестности нуля система

$$f_j(z) = 0, \quad j = 1, \dots, n, \tag{4}$$

может иметь корни только на координатных плоскостях $\{z : z_s = 0\}$, $s = 1, 2, \dots, n$ (по принципу максимума для голоморфных функций).

Из (3) следует, что при достаточно малых r_j определены интегралы

$$\int\limits_{\gamma(r)} \frac{1}{z^{\beta+I}} \frac{df}{f} = \int\limits_{\gamma(r_1, r_2, \dots, r_n)} \frac{1}{z_1^{\beta_1+1} \cdot z_2^{\beta_2+1} \cdots z_n^{\beta_n+1}} \frac{df_1}{f_1} \wedge \frac{df_2}{f_2} \wedge \dots \wedge \frac{df_n}{f_n},$$

где $\beta_1 \geqslant 0$, $\beta_2 \geqslant 0, \dots, \beta_n \geqslant 0$, $\beta_j \in \mathbb{Z}$, $I = (1, 1, \dots, 1)$. По теореме Коши–Пуанкаре эти интегралы не зависят от $(r_1, \dots, r_n)$. Обозначим

$$J_\beta = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\gamma(r)} \frac{1}{z^{\beta+I}} \frac{df}{f}.$$

Наша цель состоит в решении следующих задач:

1) в вычислении этого интеграла через коэффициенты функций $Q_j(z)$ (теорема 1);

2) при дополнительных условиях на функции f_j (если f_j — целые или мероморфные функции) в выяснении его связи со степенными суммами корней (и полюсов) системы (4) (теоремы 2 и 3).

Если f_j — полиномы (т. е. система (4) есть система алгебраических уравнений), то известны формулы для вычисления степенных сумм корней этой системы через коэффициенты f_j (напр., [1], [2]). На этих формулах основан модифицированный метод исключения неизвестных, предложенный Л.А. Айзенбергом в [1] и развитый затем в [3]. Его компьютерная реализация дана в [4], [5].

В этих работах рассматривались степенные суммы корней в положительной степени. Если в качестве f_j взять целые (или мероморфные) функции, то система (4) может иметь бесконечное число корней (или полюсов) и, следовательно, степенные суммы в положительной степени могут быть не определены. В данной работе для степенных сумм корней в отрицательной степени получены конечные формулы для их нахождения.

1. Основные результаты

Пусть для системы (4) выполнены условия, сформулированные во введении.

Теорема 1. *При сделанных предположениях для функции f_j вида* (1), (2)

$$J_\beta = \sum_{\|\alpha\| \leqslant \|\beta\| + \min(n, k_1 + \dots + k_n)} \frac{(-1)^{\|\alpha\|}}{(\beta + (\alpha_1+1)\beta^1 + \dots + (\alpha_n+1)\beta^n)!} \frac{\partial^k (\Delta \cdot Q^\alpha)}{\partial z^{\beta + (\alpha_1+1)\beta^1 + \dots + (\alpha_n+1)\beta^n}}\Bigg|_{z=0} =$$

$$= \sum_{\|\alpha\| \leqslant \|\beta\| + \min(n, k_1 + \dots + k_n)} (-1)^{\|\alpha\|} \mathfrak{M}\left[\frac{\Delta \cdot Q^\alpha}{z^{\beta + (\alpha_1+1)\beta^1 + \dots + (\alpha_n+1)\beta^n}}\right],$$

где $k = \|\beta + (\alpha_1+1)\beta^1 + \dots + (\alpha_n+1)\beta^n\|$, $\beta! = \beta_1! \cdot \beta_2! \cdots \beta_n!$, Δ — якобиан системы (4), *$Q^\alpha = Q_1^{\alpha_1} \cdot Q_2^{\alpha_2} \cdots Q_n^{\alpha_n}$, $\frac{\partial^{\|\beta\|}}{\partial z^\beta} = \frac{\partial^{\|\beta\|}}{\partial z_1^{\beta_1} \partial z_2^{\beta_2} \cdots \partial z_n^{\beta_n}}$ и, наконец, $\mathfrak{M}$ — линейный функционал, сопоставляющий ряду Лорана его свободный член.*

Доказательство. Поскольку для $\gamma(r)$ выполнены неравенства (3), то

$$\frac{1}{f_j} = \frac{1}{z^{\beta^j} + Q_j(z)} = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{(Q_j(z))^s}{z^{(s+1)\beta^j}}$$

и ряд сходится абсолютно и равномерно на $\gamma(r)$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Поэтому

$$\frac{1}{z^{\beta+I}}\frac{df}{f} = \frac{\Delta\, dz}{z^{\beta+I}(z^{\beta_1}+Q_1)(z^{\beta_2}+Q_2)\cdots(z^{\beta_n}+Q_n)} = \frac{\Delta\, dz}{z^{\beta+I}}\sum_{\|\alpha\|\geqslant 0}(-1)^{\|\alpha\|}\frac{Q_1^{\alpha_1}\cdot Q_2^{\alpha_2}\cdots Q_n^{\alpha_n}}{z^{(\alpha_1+1)\beta^1+\cdots+(\alpha_n+1)\beta^n}},$$

где $\Delta = \det\left\|\frac{\partial f_j}{\partial z_k}\right\|_{j,k=1}^n$ — якобиан системы (4), а $dz = dz_1\wedge dz_2\wedge\cdots\wedge dz_n$.

Следовательно, на $\gamma(r)$ получаем

$$J_\beta = \frac{1}{(2\pi i)^n}\sum_{\|\alpha\|\geqslant 0}\int_{\gamma(r)}\frac{(-1)^{\|\alpha\|}\Delta\, dz}{z^{\beta+I}}\frac{Q^\alpha}{z^{(\alpha_1+1)\beta^1+\cdots+(\alpha_n+1)\beta^n}}. \qquad (5)$$

Покажем, что в этой сумме лишь конечное число слагаемых отлично от нуля. Для этого подсчитаем степени (по совокупности переменных) мономов, входящих в числитель и знаменатель подинтегрального выражения.

Степень мономов, входящих в Δ ($\deg\Delta$), не меньше $\max(\|\beta^1\|+\cdots+\|\beta^n\|-n, 0) = \max(k_1+\cdots+k_n-n, 0)$. Для степени мономов, входящих в Q^α, получаем оценку

$$\deg Q^\alpha \geqslant \alpha_1(1+\|\beta_1\|)+\cdots+\alpha_n(1+\|\beta_n\|) = \alpha_1(1+k_1)+\cdots+\alpha_n(1+k_n).$$

Поэтому степень числителя не меньше

$$\max(k_1+\cdots+k_n-n, 0)+\alpha_1(1+k_1)+\cdots+\alpha_n(1+k_n).$$

Степень знаменателя равна

$$\|\beta\|+n+(\alpha_1+1)k_1+\cdots+(\alpha_n+1)k_n.$$

Поэтому в сумме (5) все слагаемые, для которых степень числителя больше степени знаменателя на n, равны нулю. Таким образом, могут быть отличными от нуля лишь слагаемые, для которых

$$\max(k_1+\cdots+k_n-n, 0)+\alpha_1(1+k_1)+\cdots+\alpha_n(1+k_n) \leqslant \|\beta\|+n+(\alpha_1+1)k_1+\cdots+(\alpha_n+1)k_n.$$

Последнее неравенство эквивалентно следующему:

$$\|\alpha\| \leqslant \|\beta\| + \min(n, k_1+\cdots+k_n). \quad \square$$

Отметим, что в указанные в теореме 1 формулы, как показывает доказательство, входит лишь конечное число коэффициентов функций $Q_j(z)$.

Следствие 1. Если все $\beta^j = (0, 0, \ldots, 0)$, то

$$J_\beta = \sum_{\|\alpha\|\leqslant\|\beta\|}(-1)^{\|\alpha\|}\mathfrak{M}\left[\frac{\Delta\, Q^\alpha}{z^\beta}\right] = \sum_{\|\alpha\|\leqslant\|\beta\|}\frac{(-1)^{\|\alpha\|}}{\beta!}\frac{\partial^{\|\beta\|}}{\partial z^\beta}(\Delta Q^\alpha)\bigg|_{z=0}.$$

Пусть $n = 1$ и $f_j(z) = f(z) = 1 + Q(z) = 1 + \sum\limits_{s=1}^{\infty} a_s z^s$.

Следствие 2. Интеграл

$$J_\beta = \sum_{0\leqslant\alpha\leqslant\beta}(-1)^\alpha\mathfrak{M}\left(\frac{f'(z)Q^\alpha(z)}{z^\beta}\right) = \sum_{0\leqslant\alpha\leqslant\beta}\frac{(-1)^\alpha}{\beta!}\frac{\partial^\beta}{\partial z^\beta}(f'Q^\alpha)\bigg|_{z=0} =$$

$$= (-1)^{\beta+1}\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 2a_2 & a_1 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (\beta+1)a_{\beta+1} & a_\beta & a_{\beta-1} & \ldots & a_1 \end{vmatrix}.$$

Наша дальнейшая цель — связать рассмотренные интегралы со степенными суммами корней системы (4). Для этого нужно сузить класс функций f_j. Сначала возьмем в качестве функций Q_j, $j = 1, 2, \dots, n$, многочлены вида

$$Q_j(z) = \sum_{\alpha \in M_j} a^j_\alpha z^\alpha, \tag{6}$$

где M_j — конечное множество мультииндексов такое, что $\alpha_k \leqslant \beta^j_k$, $k = 1, 2, \dots, n$, $k \neq j$, при $\alpha \in M_j$. Но по-прежнему предполагается, что $\|\alpha\| > k_j$ для всех $\alpha \in M_j$.

Сделаем замену $z_j = \frac{1}{w_j}$, $j = 1, 2, \dots, n$. При такой замене получим

$$f_j\left(\frac{1}{w_1}, \frac{1}{w_2}, \dots, \frac{1}{w_n}\right) = \frac{1}{w^{\beta^j}} + Q_j\left(\frac{1}{w_1}, \frac{1}{w_2}, \dots, \frac{1}{w_n}\right) = \frac{1}{w^{\beta^j + s_j e^j}}\left(w_j^{s_j} + \widetilde{Q}_j(w_1, w_2, \dots, w_n)\right),$$

где s_j — наибольшая степень многочлена $Q_j(z)$ по переменной z_j,

$$e^1 = (1, 0, \dots, 0),\ e^2 = (0, 1, \dots, 0), \dots,\ e^n = (0, 0, \dots, 1),$$

а многочлен

$$\widetilde{Q}_j(w_1, w_2, \dots, w_n) = \widetilde{Q}_j(w) = w^{\beta^j + s_j e^j} Q_j\left(\frac{1}{w_1}, \frac{1}{w_2}, \dots, \frac{1}{w_n}\right)$$

в силу условий, наложенных на многочлены $Q_j(z)$, имеет степень по совокупности переменных строго меньшую, чем s_j.

По теореме Безу система нелинейных алгебраических уравнений

$$\widetilde{f}_j(w) = w_j^{s_j} + \widetilde{Q}_j(w) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \tag{7}$$

имеет конечное число корней, равное с учетом их кратностей $s_1 \cdot s_2 \cdots s_n$, и не имеет корней на бесконечной гиперплоскости $\mathbb{CP}^n \setminus \mathbb{C}^n$. Обозначим корни системы (7), не лежащие на координатных плоскостях, с учетом их кратностей через $w_{(k)} = (w_{1(k)}, w_{2(k)}, \dots, w_{n(k)})$, $k = 1, 2, \dots, M$, $M \leqslant s_1 \cdot s_2 \cdots s_n$. Тогда точки $z_{(k)} = \left(\frac{1}{w_{1(k)}}, \frac{1}{w_{2(k)}}, \dots, \frac{1}{w_{n(k)}}\right)$ и только они являются корнями системы (4), не лежащими на координатных плоскостях.

Лемма. *Система* (4) *с многочленами* f_j *вида* (1) *и многочленами* Q_j *вида* (6) *имеет конечное число корней* (*с учетом их кратностей*) $z_{(1)}, z_{(2)}, \dots, z_{(M)}$, *не лежащих на координатных плоскостях* $\{z_s = 0\}$, $s = 1, 2, \dots, n$.

Обозначим

$$\sigma_{\beta+I} = \sigma_{(\beta_1+1, \beta_2+1, \dots, \beta_n+1)} = \sum_{k=1}^{M} \frac{1}{z_{1(k)}^{\beta_1+1} \cdot z_{2(k)}^{\beta_2+1} \cdots z_{n(k)}^{\beta_n+1}}.$$

Данное выражение является степенной суммой корней, не лежащих на координатных плоскостях, системы (4), но в отрицательной степени.

Теорема 2. *Для системы* (4) *с многочленами* f_j *вида* (1) *и многочленами* (6) *справедлива формула*

$$J_\beta = (-1)^n \sigma_{\beta+I}, \tag{8}$$

где

$$\sigma_{\beta+I} = \sum_{\|\alpha\| \leqslant \|\beta\| + \min(n, k_1 + \dots + k_n)} (-1)^{\|\alpha\|} \mathfrak{M}\left[\frac{\Delta \cdot Q^\alpha}{z^{\beta + (\alpha_1+1)\beta^1 + \dots + (\alpha_n+1)\beta^n}}\right].$$

Доказательство. Сделаем в интеграле J_β замену переменных $z_j = \frac{1}{w_j}$, $j = 1, 2, \ldots, n$. При такой замене цикл $\gamma(r)$ перейдет в цикл $(-1)^n \gamma(\frac{1}{r_1}, \frac{1}{r_2}, \ldots, \frac{1}{r_n}) = (-1)^n \gamma(R_1, R_2, \ldots, R_n)$ (с учетом изменения ориентации при данной замене).

Обозначим через γ^j мультииндекс $\beta^j + s_j e^j$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Тогда

$$\frac{df_j(\frac{1}{w_1}, \frac{1}{w_2}, \ldots, \frac{1}{w_n})}{f_j(\frac{1}{w_1}, \frac{1}{w_2}, \ldots, \frac{1}{w_n})} = \frac{d\frac{\tilde{f}_j(w)}{w^{\gamma^j}}}{\frac{\tilde{f}_j(w)}{w^{\gamma^j}}} = \frac{d\widetilde{f}_j(w)}{\widetilde{f}_j(w)} - \sum_{k=1}^{n} \gamma_k^j \frac{dw_k}{w_k}.$$

Поэтому

$$J_\beta = \frac{(-1)^n}{(2\pi i)^n} \int_{\gamma(R)} w^{\beta+I} \left(\frac{d\widetilde{f}_1(w)}{\widetilde{f}_1(w)} - \sum_{k=1}^{n} \gamma_k^1 \frac{dw_k}{w_k} \right) \wedge \cdots \wedge \left(\frac{d\widetilde{f}_n(w)}{\widetilde{f}_n(w)} - \sum_{k=1}^{n} \gamma_k^n \frac{dw_k}{w_k} \right).$$

Покажем, что все интегралы вида

$$\int_{\gamma(R)} w^{\beta+I} \frac{d\widetilde{f}_1(w)}{\widetilde{f}_1(w)} \wedge \cdots \wedge \frac{d\widetilde{f}_l(w)}{\widetilde{f}_l(w)} \wedge \frac{dw_{j_1}}{w_{j_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{dw_{j_{n-l}}}{w_{j_{n-l}}} \tag{9}$$

равны нулю, если $0 \leqslant l < n$ и R_j достаточно велики.

Действительно, при достаточно больших R_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, справедливы неравенства

$$|w_j|^{s_j} > |\widetilde{Q}_j(w)| \quad \text{на} \quad \gamma(R),$$

поэтому

$$\frac{1}{\widetilde{f}_j(w)} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p \widetilde{Q}_j^p(w)}{w_j^{(p+1)s_j}},$$

следовательно, интегралы (9) являются абсолютно сходящимися рядами из интегралов вида

$$\int_{\gamma(R)} w^{\beta+I} \frac{w^\alpha \, dw_1 \wedge dw_2 \wedge \cdots \wedge dw_n}{w_1^{(p_1+1)s_1} \cdot w_2^{(p_2+1)s_2} \cdots w_l^{(p_l+1)s_l} \cdot w_{j_1} \cdots w_{j_{n-l}}}.$$

Все они равны нулю по теореме о вычетах.

Таким образом,

$$J_\beta = \frac{(-1)^n}{(2\pi i)^n} \int_{\gamma(R)} w^{\beta+I} \frac{d\widetilde{f}_1(w)}{\widetilde{f}_1(w)} \wedge \cdots \wedge \frac{d\widetilde{f}_n(w)}{\widetilde{f}_n(w)}.$$

По теореме Южакова (напр., [1], гл. 1) о логарифмическом вычете последний интеграл равен сумме значений голоморфной функции $w^{\beta+I}$ во всех корнях системы (7). Но значение функции $w^{\beta+I}$ в корне системы (7), лежащем на координатной плоскости, равно нулю. Поэтому выполнено (8). □

Пример 1. Рассмотрим систему

$$f_j(z) = 1 + a_j z_j = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Тогда $\Delta = a_1 \cdot a_2 \cdots a_n$. Единственный корень имеет координаты $z_j = -\frac{1}{a_j}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, и

$$\sigma_{\beta+I} = (-1)^{\|\beta\|+n} a_1^{\beta_1+1} \cdots a_n^{\beta_n+1} = (-1)^{\|\beta\|+n} a^{\beta+I}.$$

Многочлены $Q^\alpha(z) = a^\alpha z^\alpha$, а $\beta^j = (0, 0, \ldots, 0)$, поэтому

$$J_\beta = \sum_{\|\alpha\| \leqslant \|\beta\|} (-1)^{\|\alpha\|} \mathfrak{M}\left[\frac{\Delta\, Q^\alpha}{z^\beta}\right] = (-1)^{\|\beta\|} a_1 \cdots a_n \cdot a^\beta = (-1)^{\|\beta\|} a^{\beta+I}$$

в полном соответствии с теоремой 2.

Рассмотрим более общую ситуацию. Пусть

$$f_j(z) = \frac{f_j^{(1)}(z)}{f_j^{(2)}(z)}, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{10}$$

где $f_j^{(1)}(z)$, $f_j^{(2)}(z)$ — целые функции в $\mathbb{C}^n$, разлагающиеся в бесконечные произведения (равномерно и абсолютно сходящиеся в $\mathbb{C}^n$)

$$f_j^{(1)}(z) = \prod_{s=1}^{\infty} f_{js}^{(1)}(z), \quad f_j^{(2)}(z) = \prod_{s=1}^{\infty} f_{js}^{(2)}(z),$$

причем каждый из сомножителей имеет форму $z^{\beta^j} + Q_j(z)$, а $Q_j(z)$ — функции вида (6).

Для каждого набора индексов $j_1, \ldots, j_n \in \mathbb{N}$ и каждого набора чисел $i_1, \ldots, i_n$, равных 1 или 2, системы нелинейных алгебраических уравнений

$$f_{1j_1}^{(i_1)}(z) = 0, \ \ f_{2j_2}^{(i_2)}(z) = 0, \ \ldots, \ f_{nj_n}^{(i_n)}(z) = 0 \tag{11}$$

имеют согласно лемме конечное число корней, не лежащих на координатных плоскостях.

Корни всех таких систем, не лежащие на координатных плоскостях, составляют не более чем счетное множество. Перенумеруем их с учетом кратностей: $z_{(1)}, \ z_{(2)}, \ldots, z_{(l)}, \ldots$ Будем предполагать, что ряд

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{|z_{1(l)}| \cdot |z_{2(l)}| \cdots |z_{n(l)}|} \tag{12}$$

сходится. Обозначим

$$\sigma_{\beta+I} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_l}{z_{1(l)}^{\beta_1+1} \cdot z_{2(l)}^{\beta_2+1} \cdots z_{n(l)}^{\beta_n+1}}.$$

Здесь $\beta_1, \ldots, \beta_n$, как и прежде, — неотрицательные целые числа, а знак ε_l равен $+1$, если в систему (11), корнем которой является $z_{(l)}$, входит четное число функций $f_{js}^{(2)}$; и равен -1, если входит нечетное число функций $f_{js}^{(2)}$.

Ряды, определяющие суммы $\sigma_{\beta+I}$, сходятся в силу условия, наложенного на ряд (12).

Для системы (4), составленной из функций (10), точки $z_{(l)}$ являются корнями или особыми точками (полюсами). Модули $|z_{(l)}|$ не могут стремиться к нулю. В противном случае ряд (12) не мог бы сходиться. Следовательно, все функции f_j голоморфны и не равны нулю вблизи точки 0 и вне координатных плоскостей, поэтому для них определены интегралы J_β.

Теорема 3. *Для системы* (4) *с функциями* (10) *справедливы равенства* (8).

Доказательство. Так как

$$\frac{df_j(z)}{f_j(z)} = \frac{d\,f_j^{(1)}(z)}{f_j^{(1)}(z)} - \frac{d\,f_j^{(2)}(z)}{f_j^{(2)}(z)},$$

то

$$\frac{df_1(z)}{f_1(z)} \wedge \frac{df_2(z)}{f_2(z)} \wedge \cdots \wedge \frac{df_n(z)}{f_n(z)} =$$

$$= \left(\frac{d\,f_1^{(1)}(z)}{f_1^{(1)}(z)} - \frac{d\,f_1^{(2)}(z)}{f_1^{(2)}(z)} \right) \wedge \left(\frac{d\,f_2^{(1)}(z)}{f_2^{(1)}(z)} - \frac{d\,f_2^{(2)}(z)}{f_2^{(2)}(z)} \right) \wedge \cdots \wedge \left(\frac{d\,f_n^{(1)}(z)}{f_n^{(1)}(z)} - \frac{d\,f_n^{(2)}(z)}{f_n^{(2)}(z)} \right) =$$

$$= \sum (-1)^s \frac{d\,f_1^{(i_1)}(z)}{f_1^{(i_1)}(z)} \wedge \frac{d\,f_2^{(i_2)}(z)}{f_2^{(i_2)}(z)} \wedge \cdots \wedge \frac{d\,f_n^{(i_n)}(z)}{f_n^{(i_n)}(z)},$$

где s — число сомножителей, для которых $i_l = 2$, а сумма берется по всевозможным наборам чисел $i_1, i_2, \ldots, i_n$, равных 1 или 2.

Поэтому теорему достаточно доказать для целых функций $f_j(z)$. В этом случае

$$\frac{df_j(z)}{f_j(z)} = \frac{d\prod\limits_{s=1}^{\infty} f_{js}(z)}{\prod\limits_{s=1}^{\infty} f_{js}(z)} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{df_{js}(z)}{f_{js}(z)}.$$

Последний ряд сходится абсолютно и равномерно на $\gamma(r)$ для достаточно малых r_j. Таким образом, интеграл J_β равен сумме интегралов вида

$$\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{\gamma(r)} \frac{1}{z^{\beta+I}} \frac{df_{1s_1}(z)}{f_{1s_1}(z)} \wedge \frac{d\,f_{2s_2}(z)}{f_{2s_2}(z)} \wedge \dots \wedge \frac{d\,f_{ns_n}(z)}{f_{ns_n}(z)}.$$

Для каждого из этих интегралов нужная формула доказана (теорема 2). □

Отметим, что если $f_j(z)$ являются целыми функциями, разлагающимися в бесконечные произведения, то они сами имеют вид (1) с функциями $Q_j(z)$ вида (2). Поэтому интегралы J_β вычисляются по теореме 1.

2. Приложения

Пример 2. Рассмотрим систему уравнений от двух комплексных переменных

$$\begin{aligned} f_1(z_1,z_2) &= 1 + a_1 z_1 = 0,\\ f_2(z_1,z_2) &= 1 + b_1 z_1 + b_2 z_2 = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Здесь функции не удовлетворяют условиям теоремы 2, но удовлетворяют условиям теоремы 1. Поэтому

$$J_\beta = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\gamma(r)} \frac{1}{z_1^{\beta_1+1} z_2^{\beta_2+1}} \frac{df_1\wedge df_2}{f_1 f_2} = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\gamma(r)} \frac{1}{z_1^{\beta_1+1} z_2^{\beta_2+1}} \frac{a_1 b_2 dz_1\wedge dz_2}{(1+a_1z_1)(1+b_1z_1+b_2z_2)} =$$

$$= \frac{a_1b_2}{\beta_1!\cdot\beta_2!}\frac{\partial^{\beta_1+\beta_2}}{\partial z_1^{\beta_1}\partial z_2^{\beta_2}}\left[\frac{1}{(1+a_1z_1)(1+b_1z_1+b_2z_2)}\right]_{z_1=z_2=0} =$$

$$= \frac{a_1b_2}{\beta_1!}\frac{\partial^{\beta_1}}{\partial z_1^{\beta_1}}\left[\frac{1}{(1+a_1z_1)}\frac{(-1)^{\beta_2}b_2^{\beta_2}}{(1+b_1z_1+b_2z_2)^{\beta_2+1}}\right]_{z_1=z_2=0}.$$

Применяя формулу Лейбница дифференцирования произведения двух функций, получим

$$J_\beta = \frac{(-1)^{\beta_2}a_1b_2^{\beta_2+1}}{\beta_1!}\sum_{s=0}^{\beta_1}\frac{\beta_1!}{s!(\beta_1-s)!}\left[\frac{\partial^s}{\partial z_1^s}\left(\frac{1}{1+a_1z_1}\right)\frac{\partial^{\beta_1-s}}{\partial z_1^{\beta_1-s}}\left(\frac{1}{(1+b_1z_1)^{\beta_2+1}}\right)\right]_{z_1=0} =$$

$$= (-1)^{\beta_2}a_1b_2^{\beta_2+1}\sum_{s=0}^{\beta_1}\frac{1}{s!(\beta_1-s)!}\left[\frac{(-1)^s s! a_1^s}{(1+a_1z_1)^{s+1}}\frac{(-1)^{\beta_1-s}b_1^{\beta_1-s}(\beta_2+1)\cdots(\beta_1+\beta_2-s)}{(1+b_1z_1)^{\beta_1+\beta_2+1-s}}\right]_{z_1=0} =$$

$$= (-1)^{\beta_1+\beta_2}a_1b_2^{\beta_2+1}\sum_{s=0}^{\beta_1}\frac{a_1^s b_1^{\beta_1-s}(\beta_1+\beta_2-s)!}{(\beta_1-s)!\beta_2!} =$$

$$= \frac{(-1)^{\beta_1+\beta_2}a_1b_2^{\beta_2+1}}{\beta_2!}\sum_{s=0}^{\beta_1}\frac{(\beta_1+\beta_2-s)!}{(\beta_1-s)!}a_1^s b_1^{\beta_1-s}.$$

Например, в случае $\beta_2 = 0$ имеем

$$J_{(\beta_1,0)} = (-1)^{\beta_1}a_1b_2\frac{a_1^{\beta_1+1}-b_1^{\beta_1+1}}{a_1-b_1}.$$

Корень системы (13) равен $z_1 = -\frac{1}{a_1}$, $z_2 = \frac{b_1 - a_1}{a_1 b_2}$. Поэтому степенная сумма

$$\sigma_{\beta+I} = \frac{(-1)^{\beta_1+\beta_2} a_1^{\beta_1+\beta_2+2} b_2^{\beta_2+1}}{(a_1 - b_1)^{\beta_2+1}},$$

в частности,

$$\sigma_{(\beta_1+1,1)} = \frac{(-1)^{\beta_1} a_1^{\beta_1+2} b_2}{a_1 - b_1},$$

т. е.

$$I_{(\beta_1,0)} = \sigma_{(\beta_1+1,1)} - \frac{(-1)^{\beta_1} a_1 b_2 b_1^{\beta_1+1}}{a_1 - b_1}. \qquad (14)$$

Значит, теорема 2 для системы (13) не верна (при $b_2 \neq 0$). Тем не менее проведенные вычисления и теорема 2 позволяют находить суммы некоторых двойных рядов.

Напомним известные разложения синуса в бесконечное произведение и степенной ряд:

$$\frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}} = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{k^2\pi^2}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^k}{(2k+1)!},$$

которые равномерно и абсолютно сходятся на комплексной плоскости.

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} f_1(z_1,z_2) &= \frac{\sin\sqrt{z_1}}{\sqrt{z_1}} = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z_1}{k^2\pi^2}\right) = 0, \\ f_2(z_1,z_2) &= \frac{\sin\sqrt{z_2 - z_1}}{\sqrt{z_2 - z_1}} = \prod_{m=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z_2 - z_1}{m^2\pi^2}\right) = 0. \end{aligned} \qquad (15)$$

Каждая из функций этой системы разлагается в бесконечное произведение функций из системы (13). Корнями системы (15) являются точки $(\pi^2 k^2, \pi^2(k^2 + m^2))$, $k, m \in \mathbb{N}$. Поэтому степенная сумма $\sigma_{(\beta_1,\beta_2)}$ равна сумме ряда:

$$\sigma_{(\beta_1,\beta_2)} = \frac{1}{\pi^{2(\beta_1+\beta_2)}} \sum_{k,m=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2\beta_1}(k^2+m^2)^{2\beta_2}}.$$

Для системы (15) верна теорема 1, поскольку

$$f_1 = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z_1^k}{(2k+1)!},$$

а

$$f_2 = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k (z_2 - z_1)^k}{(2k+1)!} = \sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(-1)^m (m+n)! z_1^n z_2^m}{m! n! (2m+2n+1)!}.$$

Рассмотрим интеграл J_β для системы (15). Используя равенство (14) и вид корней системы (15), получим

$$J_{(\beta_1,0)} = \sigma_{(\beta_1+1,1)} + (-1)^{\beta_1} \sum_{k,m=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^{2(\beta_1+1)}(k^2+m^2) m^{2(\beta_1+1)}}.$$

Таким образом, для нечетных β_1 интеграл $I_{(\beta_1,0)} = 0$, а для четных β_1 интеграл $I_{(\beta_1,0)} = 2\sigma_{(\beta_1+1,1)}$. Полагая $\beta_1 = 2s$, получим следующую формулу для нахождения суммы ряда.

Следствие 3. Справедливы формулы

$$\sigma_{(2s+1,1)}=\frac{1}{\pi^{2(2s+1)}}\sum_{k,m=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2(2s+1)}(m^2+k^2)}=\frac{1}{2}J_{(2s,0)}=\frac{1}{2}\sum_{\|\alpha\|\leqslant 2s}\mathfrak{M}\left[\frac{\Delta Q^{\alpha}}{z_1^{2s}}\right],$$

где Δ, Q и $\mathfrak{M}$ определены в теореме 1.

Вычислим, например, $I_{(2,0)}$. Якобиан

$$\Delta=\frac{\partial f_1}{\partial z_1}\frac{\partial f_2}{\partial z_2}=\frac{1}{(3!)^2}-\frac{2z_2}{3!5!}+\frac{4z_1z_2}{(5!)^2}+z_1^2\left(\frac{1}{7!}-\frac{4}{(5!)^2}\right)+\cdots,$$

тогда

$$\mathfrak{M}\left[\frac{\Delta}{z_1^2}\right]=\frac{1}{7!}-\frac{4}{(5!)^2},\quad \mathfrak{M}\left[\frac{\Delta Q_1}{z_1^2}\right]=\frac{1}{(3!)^2 5!},\quad \mathfrak{M}\left[\frac{\Delta Q_2}{z_1^2}\right]=\frac{1}{(3!)^2 5!},$$
$$\mathfrak{M}\left[\frac{\Delta Q_1^2}{z_1^2}\right]=\frac{1}{(3!)^4},\quad \mathfrak{M}\left[\frac{\Delta Q_1\cdot Q_2}{z_1^2}\right]=-\frac{1}{(3!)^4},\quad \mathfrak{M}\left[\frac{\Delta Q_2^2}{z_1^2}\right]=\frac{1}{(3!)^4}.$$

Поэтому $J_{(2,0)}=\frac{13}{56700}$, а $\sigma_{(3,1)}=\frac{13}{113400}$. Следовательно,

$$\sum_{k,m=1}^{\infty}\frac{1}{k^6(k^2+m^2)}=\frac{13\pi^8}{113400},$$

что отличается от формулы 10 ([6], с. 750) (где она приведена с ошибкой), но полностью совпадает с примером 1 из [7].

Рассмотрим более сложную систему

$$\begin{aligned} f_1(z_1,z_2)&=\frac{\sin\sqrt{z_1-a^2}}{\sqrt{z_1-a^2}}=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z_1-a^2}{\pi^2k^2}\right)=0,\\ f_1(z_1,z_2)&=\frac{\sin\sqrt{z_2-z_1-a^2}}{\sqrt{z_2-z_1-a^2}}=\prod_{m=1}^{\infty}\left(1-\frac{z_2-z_1-a^2}{\pi^2m^2}\right)=0.\end{aligned}\tag{16}$$

Корни данной системы равны $(\pi^2k^2+a^2,\pi^2(m^2+k^2)+2a^2)$, $k,m\in\mathbb{N}$. Функции системы (16) являются бесконечными произведениями функций из системы (13). Данная система удовлетворяет теореме 1. Нетрудно подсчитать (используем, как для предыдущей системы (15), формулу (14)), что интеграл $J_{(0,0)}=2\sigma_{(1,1)}$.

Для функций

$$f_1=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(z_1-a^2)^k}{(2k+1)!},\quad f_2=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(z_2-z_1-a^2)^k}{(2k+1)!}$$

имеем

$$f_1(0,0)=f_2(0,0)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^{2k}}{(2k+1)!}=\frac{\operatorname{sh}a}{a}.$$

Следовательно, чтобы применить формулу из теоремы 1, нужно функции f_1 и f_2 разделить на эту константу (отнормировать).

Тогда интеграл

$$J_{(0,0)}=\mathfrak{M}[\Delta]=\left(\frac{1}{2a^2}-\frac{1}{2a}\operatorname{cth}a\right)^2,$$

отсюда получим

$$\sigma_{(1,1)}=\sum_{k,m=1}^{\infty}\frac{1}{\pi^2k^2+a^2}\frac{1}{\pi^2(k^2+m^2)+2a^2}=\frac{(1-a\operatorname{cth}a)^2}{8a^4}.$$

Литература

1. Айзенберг Л.А., Южаков А.П. *Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе.* – Новосибирск: Наука, 1979. – 366 с.
2. Цих А.К. *Многомерные вычеты и их применения.* – Новосибирск: Наука, 1989. – 240 с.
3. Быков В.И., Кытманов А.М., Лазман М.З. *Методы исключения в компьютерной алгебре многочленов.* – Новосибирск: Наука, 1991. – 234 с.
4. Быков В.И., Кытманов А.М., Осетрова Т.А. *Компьютерная алгебра многочленов. Модифицированный метод исключения* // Докл. РАН. – 1996. – Т. 350. – № 4. – С. 443–445.
5. Быков В.И., Кытманов А.М., Осетрова Т.А., Потапова З.Е. *Применение систем компьютерной алгебры в модифицированном методе исключения неизвестных* // Докл. РАН. – 2000. – Т. 370. – № 4. – С. 439–442.
6. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. *Интегралы и ряды. Элементарные функции.* – М.: Наука, 1981. – 800 с.
7. Ермилов И.В. *Вычисление сумм и улучшение сходимости числовых рядов* // Исследов. по комплексному анализу. – Изд-во Красноярск. ун-та, 1989. – С. 52–62.

Красноярский государственный университет
Московский авиационный институт

Поступила
07.04.2003