Известия вузов. Математика
2008, 4 (551), с. 66–72

http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/
email: izvuz.matem@ksu.ru

Е.Н. Сосов

ОТНОСИТЕЛЬНЫЙ ЧЕБЫШЕВСКИЙ ЦЕНТР КОНЕЧНОГО МНОЖЕСТВА ГЕОДЕЗИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

Аннотация. Получены оценки изменения относительного чебышевского радиуса $R_W(M)$ при изменении непустых ограниченных множеств M, W метрического пространства. Найдены замыкание и внутренность множества всех N-сетей, каждая из которых обладает принадлежащим ей единственным относительным чебышевским центром, в множестве всех N-сетей специального геодезического пространства относительно метрики Хаусдорфа. Рассмотрены различные свойства относительных чебышевских центров конечного множества, принадлежащих этому множеству.

Ключевые слова: относительный чебышевский центр, метрика Хаусдорфа, геодезическое пространство.

УДК: 515.124

1. Необходимые обозначения и определения

Рассмотрим метрическое пространство (X,ρ) и примем следующие обозначения. $\mathbb{R}_+$ — множество всех неотрицательных вещественных чисел, $|xy| = \rho(x,y)$ для $x,y \in X$; $B[x,r]$ ($B(x,r)$, $S(x,r)$) — замкнутый шар (открытый шар, сфера) с центром в точке $x \in (X,\rho)$, радиуса $r \geq 0$. $\overline{M}$ ($\mathrm{Int}(M)$, ∂M) — замыкание (внутренность, граница) множества $M \subset X$. $B(X)$ ($B[X]$, $K(X)$) — множество всех непустых ограниченных (замкнутых, компактных) подмножеств пространства X. $\Sigma_N^*(X)$ ($\Sigma_N(X)$) — множество всех (непустых) подмножеств в X, состоящих (не более чем) из N точек. Элементы множества $\Sigma_N(X)$ называются N-сетями [1]. Пусть $|MW| = \inf\{|xy| : x \in M,\ y \in W\}$ для непустых подмножеств $M, W \subset X$. $\alpha : B(X) \times B(X) \to \mathbb{R}_+$, $\alpha(M,W) = \max\{\beta(M,W), \beta(W,M)\}$, где $\beta(M,W) = \sup\{|xW| : x \in M\}$, — псевдометрика Хаусдорфа на множестве $B(X)$ (ограничение которой на множество $B[X]$ является метрикой) ([2], с. 223); $B_\alpha(S,r)$ — открытый шар с центром в точке $S \in (\Sigma_N^*(X),\alpha)$, радиуса $r > 0$; $D(M,W) = \sup\{|xy| : x \in M,\ y \in W\}$ для $M, W \in B(X)$; $D(M) = D(M,M)$ — диаметр множества M.

Пусть $M \in B(X)$, W — непустое подмножество в X; $R_W(M) = \inf\{\beta(M,x) : x \in W\}$ — относительный чебышевский радиус множества M [3]; $Z_W(M) = \{x \in W : \beta(M,x) = R_W(M)\}$ — множество всех относительных чебышевских центров множества M [4]; $R(M) = R_X(M)$ ($Z(M) = Z_X(M)$) — чебышевский радиус (множество всех чебышевских центров) множества M; $R_0(M) = R_M(M)$, $Z_0(M) = Z_M(M)$; $H(M) = \{x \in M : \beta(M,x) = D(M)\}$ — множество диаметральных точек множества M [5]; $Q_0(M) = \{x \in M : \beta(Z_0(M),x) = R_0(M)\}$.

Пусть $S \in \Sigma_N(X)$, $x \in S$. Если $S \neq \{x\}$, то $S(x) = S \setminus \{x\}$. Если $S = \{x\}$, то $S(x) = x$. Пусть $m(S) = \min\{|xy| : x,y \in S,\ x \neq y\}$, $m_1(S) = \max\{|xS(x)| : x \in S\}$, $h(S) = \{x \in S : |xS(x)| =$

Поступила 17.05.2007

$m(S)\}$, $h_1(S) = \{x \in S : |xS(x)| = m_1(S)\}$, $d_0(N) = \{S \in \Sigma_N^*(X) : D(S) = R_0(S)\}$ — множество диаметральных N-сетей в $\Sigma_N^*(X)$ [5]; $Z_{k,N} = \{S \in \Sigma_N^*(X) : \mathrm{card}(Z_0(S)) \le k\}$, $Z_{k,N}^* = \{S \in \Sigma_N^*(X) : \mathrm{card}(Z_0(S)) = k\}$ $(1 \le k \le N)$, где $\mathrm{card}(S)$ — мощность множества S; $md(N) = \{S \in \Sigma_N^*(X) : D(S) = m(S)\}$, $mr_0(N) = \{S \in \Sigma_N^*(X) : m(S) = R_0(S)\}$, $dm_1(N) = \{S \in \Sigma_N^*(X) : D(S) = m_1(S)\}$, $mm_1(N) = \{S \in \Sigma_N^*(X) : m(S) = m_1(S)\}$, $m_1r_0(N) = \{S \in \Sigma_N^*(X) : m_1(S) = R_0(S)\}$.

Нам понадобятся также следующие определения.

Кривая, соединяющая точки $x, y \in X$, длина которой равна расстоянию $|xy|$ между этими точками, называется сегментом $[x, y]$ ([6], с. 42). Для $\lambda \in [0, 1]$ и сегмента $[x, y] \subset X$ обозначим через $\omega_\lambda[x, y]$ точку сегмента $[x, y]$ такую, что $|x\omega_\lambda[x, y]| = \lambda|xy|$. Метрическое пространство называется геодезическим пространством, если любые две его точки можно соединить сегментом ([7], с. 34).

Будем рассматривать геодезическое пространство X, удовлетворяющее следующему условию.

(A) Для любого сегмента $[x, y] \subset X$ и любой точки $z \in X$ верно неравенство

$$2|z\omega_{1/2}[x, y]| \le |zx| + |zy|.$$

Если точки x, y, z не принадлежат одному сегменту, то неравенство строгое.

Из условия (A) нетрудно получить следующее свойство (B) в геодезическом пространстве X.

(B) Для любого сегмента $[x, y] \subset X$, любой точки $z \in X$ и любого числа $\varepsilon \in (0, 1)$ верно неравенство

$$|z\omega_\varepsilon[x, y]| \le (1 - \varepsilon)|zx| + \varepsilon|zy|.$$

Если точки x, y, z не принадлежат одному сегменту, то неравенство строгое.

2. Постановка задач и результаты

Различные свойства относительных чебышевских центров и относительного чебышевского радиуса, связанные, в основном, с задачами теории приближений, исследовались многими авторами для множеств банахова пространства (напр., статьи [3], [4] и литература, указанная в них). В метрическом пространстве эти свойства исследованы недостаточно. В данной статье решены следующие задачи.

1. Получить оценки изменения относительного чебышевского радиуса $R_W(M)$ при изменении множеств $M, W \in (B(X), \alpha)$ (лемма 1, следствие 1).

2. Выяснить поведение последовательности множеств относительных чебышевских центров $Z_0(M_n)$ (множеств диаметральных точек $H(M_n)$, множеств $Q_0(M_n)$), когда последовательность компактов M_n сходится к компакту M при $n \to \infty$ относительно метрики Хаусдорфа (теорема 1).

3. Пусть $N > 2$, X — геодезическое пространство, удовлетворяющее условию (A). Найти внутренность и замыкание множеств $Z_{1,N}$, $Z_{N-2,N}$ в пространстве $(\Sigma_N^*(X), \alpha)$ (теорема 2, следствие 2).

При решении этих задач обнаружились интересные свойства некоторых классов фигур пространства $(\Sigma_N^*(X), \alpha)$ (лемма 2, утверждение (iv) теоремы 2, следствие 2).

Автор благодарен рецензенту за внимание к данной работе и исправление неточностей. Более того, рецензент сообщил автору теорему 3, утверждение (i) теоремы 2 для случая $k > 1$ вместе с доказательствами, а также свойства 7 и 8, благодаря чему, работа приобрела более законченный вид.

Надеюсь, что работа будет интересна геометрам, специалистам по теории графов, а также исследователям геометрических свойств макромолекул.

Сначала перечислим некоторые простые свойства и взаимосвязи рассмотренных понятий в метрическом пространстве X, доказательства первых шести из которых непосредственно следуют из их определений.

1. Если $M \in B(X)$, то условие а) $H(M) = M$ равносильно условию б) $Z_0(M) = M$. Из этих условий следует $Q_0(M) = M$ и в) $R_0(M) = D(M)$. Если $M \in K(X)$, то условия а), б), в) равносильны.

2. Пусть $N > 2$. Тогда $Z^*_{N-1,N} = \emptyset$, $Z_{N,N} = \Sigma^*_N(X)$, $Z^*_{N,N} = d_0(N) = \Sigma^*_N(X) \setminus Z_{N-2,N}$.

3. Пусть $M \in B(X)$. Если $M \cap Z(M) \neq \emptyset$, то $Z_0(M) = M \cap Z(M)$, $R_0(M) = R(M)$.

4. Пусть $M, W, T \in B(X)$. Тогда $R_W(M) \le R_T(M) + R_W(T)$ и $\theta : B(X) \times B(X) \to \mathbb{R}_+$, $\theta(M, W) = \max\{R_W(M), R_M(W)\}$ — функция, удовлетворяющая неравенству треугольника, а также неравенствам $\alpha(M, W) \le \theta(M, W) \le D(M, W)$.

5. Пусть $S \in \Sigma^*_N(X)$. Тогда следующие условия равносильны: а) $h(S) = S$; б) $h_1(S) = S$; в) $m(S) = m_1(S)$.

6. Для любых $M, W \in B[X]$ множество $Z_W(M)$ ($H(M)$, $Q_0(M)$) замкнуто в множестве W (M) с индуцированной метрикой.

7. В геодезическом пространстве X, удовлетворяющем условию (A), для любых точек x, y существует единственный сегмент $[x, y]$.

Действительно, в противном случае найдутся такие два сегмента $[x, y]$, $[x, y]'$ с концами в точках x, $y \in X$ и различными серединами $u = \omega_{1/2}[x, y]$ и $v = \omega'_{1/2}[x, y]$ соответственно. Тогда согласно условию (A) имеем $|x\omega_{1/2}[u, v]| + |y\omega_{1/2}[u, v]| < |xy|$. Получили противоречие.

8. Пусть X — геодезическое пространство, удовлетворяющее условию (A), $M \subset K(X)$, точки x, $y \in Z_0(M)$ различны и $\varepsilon \in (0, 1)$. Тогда $\omega_\varepsilon[x, y] \notin M$.

Докажем это свойство. Предположим противное, т. е. $\omega_\varepsilon[x, y] \in M$. Тогда в силу условий нашего утверждения и свойства (B) найдется такая точка $z \in M$, что $\beta(M, \omega_\varepsilon[x, y]) = |z\omega_\varepsilon[x, y]| < \max\{|zx|, |zy|\} \le R_0(M)$. Получили противоречие.

Понадобится еще следующее следствие упражнения 7.3.14 из ([8], с. 305) (В частном случае, когда $M, W \in K(X)$, см. также [9].)

9. Если $M, W \in B(X)$, то $|D(M) - D(W)| \le 2\alpha(M, W)$.

Приведем доказательство этого утверждения. Для любого $\varepsilon > 0$ выберем такие элементы $x, y \in M$, $u, v \in W$, что $D(M) \le |xy| + \varepsilon$, $|xu| \le |xW| + \varepsilon$, $|yv| \le |yW| + \varepsilon$. Тогда $D(W) \ge |uv| \ge |xy| - |xu| - |yv| \ge |xy| - |xW| - |yW| - 2\varepsilon \ge D(M) - 2\alpha(M, W) - 3\varepsilon$. Используя произвольность выбора $\varepsilon > 0$, получим $D(M) - D(W) \le 2\alpha(M, W)$. Осталось использовать произвольность выбора $M, W \in B(X)$.

Сформулируем полученные результаты.

Лемма 1. *Пусть X — метрическое пространство, $M, W, A, B \in B(X)$. Тогда*

(i) $|R_W(M) - R_B(A)| \le \max[\beta(M, A) + \beta(B, W),\ \beta(A, M) + \beta(W, B)]$;

(ii) $R_W(M) \le R(M) + |Z(M)W|$ *при* $Z(M) \neq \emptyset$. *В частном случае, когда X — банахово пространство, это неравенство известно* [3];

(iii) $R_W(M) \le R_0(M) + |Z_0(M)W|$ *при* $Z_0(M) \neq \emptyset$.

Из леммы 1, определения метрики Хаусдорфа и функции θ получим

Следствие 1. В условиях леммы 1 имеют место неравенства

$|R_W(M) - R_B(A)| \le \alpha(M, A) + \alpha(W, B)$, $|R_0(M) - R_0(A)| \le \beta(M, A) + \beta(A, M)$,

$\theta(M, W) \le \max\{R(M) + |Z(M)W|,\ R(W) + |Z(W)M|\}$,

$\theta(M, W) \le \max\{R_0(M) + |Z_0(M)W|,\ R_0(W) + |Z_0(W)M|\}$.

Лемма 2. *Пусть X — метрическое пространство, $S, \widehat{S} \in (\Sigma^*_N(X), \alpha)$. Тогда*

(i) $mr_0(N) = mm_1(N) \cap m_1r_0(N)$, $dm(N) = mm_1(N) \cap m_1r_0(N) \cap d_0(N)$, $dm_1(N) = m_1r_0(N) \cap d_0(N) = \{S \in d_0(N) : \exists x_1, \dots, x_N \in S\ (|x_1x_2| = \dots = |x_1x_N| = D(S))\}$;

(ii) $|m_1(S) - m_1(\widehat{S})| \le 2\theta(S, \widehat{S})$.

Теорема 1. *Пусть X — метрическое пространство, $M, M_n \in K(X)$, $n \in \{1, 2, \dots\}$, $\alpha(M_n, M) \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда найдется такая подпоследовательность $(M_k) \subset (M_n)$, что при $k \to \infty$*

(i) $\beta(Z_0(M_k), Z_0(M)) \to 0$;

(ii) $\beta(H(M_k), H(M)) \to 0$;

(iii) $\beta(Q_0(M_k), Q_0(M)) \to 0$.

Пример 1. Рассмотрим в евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ 3-сети

$S = \{O(0;0), A(1/2; \sqrt{3}/2), B(-1/2; \sqrt{3}/2)\}$,

$S_n = \{C_n(0; 1/n), A(1/2; \sqrt{3}/2), B(-1/2; \sqrt{3}/2)\}$, где $n \in \{2, 3, \dots\}$. Тогда нетрудно проверить, что при $n \in \{2, 3, \dots\}$ имеют место $\alpha(S_n, S) = 1/n$, $Z_0(S) = H(S) = Q_0(S) = S$, $Z_0(S_n) = \{C_n\}$, $H(S_n) = Q_0(S_n) = \{A, B\}$, $\alpha(Z_0(S_n), Z_0(S)) = |BC_n|$, $\alpha(H(S_n), H(S)) = \alpha(Q_0(S_n), Q_0(S)) = 1$.

Таким образом, в теореме 1 в общем случае нельзя заменить отклонение β на метрику Хаусдорфа.

Теорема 2. *Пусть $N > 2$, X — геодезическое пространство, удовлетворяющее условию* (A). *Тогда в пространстве $(\Sigma_N^*(X), \alpha)$ имеют место следующие соотношения*:

(i) *для всех $k \in \{1, \dots, N\}$* $\mathrm{Int}(Z_{k,N}) = Z_{k,N}$;

(ii) $\overline{Z_{N-2,N}} = \Sigma_N^*(X)$;

(iii) $\overline{Z_{1,N}} = \{S \in \Sigma_N^*(X) : D(Z_0(S)) < R_0(S)\} \cup \{S \in \Sigma_N^*(X) : \exists x, y \in S \ (|xy| = R_0(S), D(\{x, y\}, S \setminus \{x, y\}) = R_0(S))\}$;

(iv) $dm_1(N) \cup d_{0,N-1} \subset \overline{Z_{1,N}} \cap d_0(N)$, *где* $d_{0,N-1} = \{S \in d_0(N) : \exists x_1, \dots, x_{N-1} \in S \ (|x_1x_2| = \dots = |x_1x_{N-1}| = D(S))\}$, *при $N \in \{3, 4\}$ имеет место равенство.*

Из определения множества $d_0(N)$, теоремы 2 и свойства 2 получим

Следствие 2. В условиях теоремы 2 имеет место равенство $d_0(N) = \partial Z_{N-2,N}$.

Пример 2. Пусть 4-сеть S состоит из вершин квадрата в евклидовой плоскости. Тогда $S \in d_0(4) \setminus \overline{Z_{1,4}}$ в силу утверждения (iii) теоремы 2.

Пример 3. Рассмотрим 5-сеть S, состоящую из вершин правильного пятиугольника в евклидовой плоскости. Используя утверждение (iii) теоремы 2, нетрудно проверить, что $S \in \overline{Z_{1,5}} \cap d_0(5)$. С другой стороны, $S \notin dm_1(5) \cup d_{0,4}$. Таким образом, в общем случае, включение множеств в (iv) теоремы 2 строгое уже при $N = 5$.

Теорема 3. *Пусть $N > 2$, X — геодезическое пространство, удовлетворяющее условию* (A), *и $\Sigma_N^*(X) \setminus \overline{Z_{1,N}} \ne \emptyset$. Тогда $\Sigma_N^*(X) = \overline{Z_{1,N} \cup \widehat{Z}_{2,N}}$, где $\widehat{Z}_{2,N} = \{S \in Z_{2,N}^*(X) : D(Z_0(S), S \setminus Z_0(S)) < R_0(S),\ D(Z_0(S)) = R_0(S)\}$ — открытое множество в пространстве $(\Sigma_N^*(X), \alpha)$, непересекающееся с множеством $\overline{Z_{1,N}}$.*

3. Доказательства результатов

Доказательство леммы 1. (i) Для любых $x \in W$, $y \in B$ верно неравенство $\beta(M, x) \le \beta(M, y) + |yx|$. Тогда $R_W(M) \le \beta(M, y) + |yW| \le \beta(M, y) + \beta(B, W)$. Следовательно, $R_W(M) \le R_B(M) + \beta(B, W)$. Кроме того, $\beta(M, x) \le \beta(M, A) + \beta(A, x)$ для любого $x \in B$. Тогда $R_B(M) \le \beta(M, A) + R_B(A)$. Учитывая эти неравенства, получим

$$R_W(M) - R_B(A) \le R_W(M) - R_B(M) + R_B(M) - R_B(A) \le \beta(B, W) + \beta(M, A).$$

Из полученного неравенства следует требуемое неравенство.

(ii) Для любых $y \in Z(M)$, $x \in W$ верно неравенство $\beta(M,x) \le \beta(M,y) + |yx|$. Тогда из этого неравенства и определений $R(M)$, $Z(M)$ следует $R_W(M) \le \beta(M,y) + |yW| = R(M) + |Z(M)W|$.

(iii) Для любых $y \in Z_0(M)$, $x \in W$ верно неравенство $\beta(M,x) \le \beta(M,y) + |yx|$. Тогда из этого неравенства и определений $R_0(M)$, $Z_0(M)$ следует $R_W(M) \le \beta(M,y) + |yW| = R_0(M) + |Z_0(M)W|$. $\square$

Доказательство леммы 2. (i) Докажем сначала, что для любого $S \in \Sigma_N^*(X)$ верно неравенство $m_1(S) \le R_0(S)$. Выберем такой элемент $x \in S$, что $m_1(S) = |xS(x)|$. Тогда для каждого $y \in S(x)$ $|xS(x)| \le |xy| \le \beta(S,y)$. Кроме того, $|xS(x)| \le \beta(S,x)$. Следовательно, $m_1(S) \le \min[\beta(S,z) : z \in S] = R_0(S)$. Используя полученное неравенство, а также очевидные неравенства $m(S) \le m_1(S)$, $R_0(S) \le D(S)$ для $S \in \Sigma_N(X)$, получим $mr_0(N) = mm_1(N) \cap m_1r_0(N)$, $dm_1(N) = m_1r_0(N) \cap d_0(N)$, $md(N) = mm_1(N) \cap m_1r_0(N) \cap d_0(N)$. Кроме того, из полученного представления множества $dm_1(N)$ и его определения следует равенство $dm_1(N) = \{S \in d_0(N) : \exists x_1, \dots, x_N \in S \ (|x_1x_2| = \dots = |x_1x_N| = D(S))\}$.

(ii) Заметим, что для любых $x \in S$, $y \in \widehat{S}$ $\;|xS(x)| - |y\widehat{S}(y)| \le |xy| + |yS(x)| \le 2\beta(S,y)$. Следовательно, $m_1(S) - m_1(\widehat{S}) \le 2R_{\widehat{S}}(S) \le 2\theta(S,\widehat{S})$. Осталось использовать произвольность выбора $S, \widehat{S} \in \Sigma_N^*$. $\square$

Доказательство теоремы 1. Из свойства 6 и компактности множеств M, M_n следует, что для каждого $n \in \{1,2,\dots\}$ найдется такой элемент $z_n \in Z_0(M_n)$ ($z_n \in H(M_n)$, $z_n \in Q_0(M_n)$), что $|z_nZ_0(M)| = \beta(Z_0(M_n), Z_0(M))$ ($|z_nH(M)| = \beta(H(M_n), H(M))$, $|z_nQ_0(M)| = \beta(Q_0(M_n), Q_0(M))$).

(i) Тогда $\alpha(M_n, z_n) = \beta(M_n, z_n) = R_0(M_n)$. Используя условия теоремы 1, найдем такие подпоследовательность $(z_k) \subset (z_n)$ и элемент $z \in M$, что $|z_kz| \to 0$ $(k \to \infty)$. Тогда в силу следствия 1 и непрерывности метрики α получим $\beta(M,z) = \alpha(M,z) = R_0(M)$. Следовательно, $z \in Z_0(M)$ и $\beta(Z_0(M_k), Z_0(M)) = |z_kZ_0(M)| \to 0$ $(k \to \infty)$.

(ii) Тогда $\alpha(M_n, z_n) = \beta(M_n, z_n) = D(M_n)$. Используя условия теоремы 1, найдем такие подпоследовательность $(z_k) \subset (z_n)$ и элемент $z \in M$, что $|z_kz| \to 0$ $(k \to \infty)$. Тогда в силу свойства 9 и непрерывности метрики α получим $\beta(M,z) = \alpha(M,z) = D(M)$. Следовательно, $z \in H(M)$ и $\beta(H(M_k), H(M)) = |z_kH(M)| \to 0$ $(k \to \infty)$.

(iii) Тогда $\beta(Z_0(M_n), z_n) = R_0(M_n)$. Используя условия теоремы 1 и доказанное утверждение (i), найдем такие подпоследовательности $(z_k) \subset (z_n)$, $(Z_0(M_k)) \subset (Z_0(M_n))$ и элемент $z \in M$, что $|z_kz| \to 0$, $\beta(Z_0(M_k), Z_0(M)) \to 0$ $(k \to \infty)$. Тогда в силу следствия 1 и неравенства $|\beta(Z_0(M_k), z_k) - \beta(Z_0(M), z)| \le \beta(Z_0(M_k), Z_0(M)) + |z_kz|$ получим $\beta(Z_0(M), z) = R_0(M)$. Следовательно, $z \in Q_0(M)$ и $\beta(Q_0(M_k), Q_0(M)) = |z_kQ_0(M)| \to 0$ $(k \to \infty)$. $\square$

Доказательство теоремы 2. (i) В силу свойства 2 достаточно рассмотреть случай, когда $k \le N-2$. Пусть $S \in Z_{k,N}$ и $\varepsilon = 1/8 \min\{R_0(S \setminus Z_0(S)) - R_0(S), m(S)/2\}$. Рассмотрим произвольную N-сеть $\widehat{S} \in B_\alpha(S,\varepsilon)$. Тогда нетрудно проверить, что $Z_0(\widehat{S}) = \widehat{S} \cap B(Z_0(S), \varepsilon)$ и $\widehat{S} \in Z_{k,N}$. Следовательно, $\widehat{S} \in \mathrm{Int}(Z_{k,N})$ и $\mathrm{Int}(Z_{k,N}) = Z_{k,N}$.

(ii) Учитывая свойство 2, достаточно рассмотреть случай, когда $Z_0(S) = S$, и найти в произвольной окрестности N-сети S N-сеть $\widehat{S} \in Z_{N-2,N}$. Выберем $\varepsilon = m(S)/4$. Пусть найдутся такие попарно различные элементы $x, y, z \in S$, что $R_0(S) = |xy| = |xz|$. Положим $\widehat{y} = \omega_\varepsilon[y,z]$, $\widehat{S} = \{\widehat{y}\} \cup S(y)$. Тогда в силу свойства (B) получим $x, z \notin Z_0(\widehat{S})$. Следовательно, $\widehat{S} \in Z_{N-2,N} \cap B_\alpha(S,\varepsilon)$. Отметим, что для $N = 3$ наше утверждение доказано. Рассмотрим случай, когда $N > 3$ и таких элементов нет. Тогда найдутся такие элементы $x, y, u \in S$, что $R_0(S) = |xy| = |uv|$ и $u, v \notin \{x, y\}$. Положим $\widehat{x} = \omega_\varepsilon[x,y]$, $\widehat{S} = \{\widehat{x}\} \cup S(x)$. В силу свойства (B) получим $u, v \notin Z_0(\widehat{S})$. Таким образом, $\widehat{S} \in Z_{N-2,N} \cap B_\alpha(S,\varepsilon)$.

(iii) Пусть $S \in \{S \in \Sigma_N^*(X) : D(Z_0(S)) < R_0(S)\} \cup \{S \in \Sigma_N^*(X) : \exists x, y \in S \ (|xy| = R_0(S), D(\{x,y\}, S \setminus \{x,y\}) = R_0(S))\}$ и $S \notin Z_{1,N}$. Докажем, что $S \in \overline{Z_{1,N}}$. Выберем $\varepsilon = m(S)/4$ и рассмотрим два случая.

1. Пусть $D(Z_0(S)) < R_0(S)$, $u, v \in Z_0(S)$ и $u \neq v$. Положим $\widehat{u} = \omega_\varepsilon[u, v]$, $\widehat{S} = \{\widehat{u}\} \cup S(u)$. Тогда в силу свойства (B) получим $\widehat{u} \in Z_0(\widehat{S})$ и $R_0(\widehat{S}) < R_0(S)$. Если $z \in Z_0(S)$, то найдется такой элемент $t \in S \setminus Z_0(S)$, что $|zt| = R_0(S)$. Если $z \in S \setminus Z_0(S)$, то найдется такой элемент $t \in S(u)$, что $|zt| \geq R_0(S)$. Следовательно, $\{\widehat{u}\} = Z_0(\widehat{S})$.

2. Пусть найдутся такие $x, y \in S$, что $|xy| = R_0(S)$ и $D(\{x,y\}, S \setminus \{x,y\}) = R_0(S)$. Для определенности считаем, что $D(x, S \setminus \{x,y\}) = R_0(S)$. Если для каждого $z \in S \setminus \{x,y\}$ $\beta(S \setminus \{y\}, z) \geq R_0(S)$, то выберем $\widehat{y} = \omega_\varepsilon[y, x]$, $\widehat{S} = \{\widehat{y}\} \cup S(y)$. Тогда в силу свойства (B) получим $\{\widehat{y}\} = Z_0(\widehat{S})$. Если найдется $z \in S \setminus \{x,y\}$ такой, что $\beta(S \setminus \{y\}, z) < R_0(S)$, то $|zy| = R_0(S)$. Выберем $\widehat{z} = \omega_\varepsilon[z, x]$, $\widehat{S} = \{\widehat{z}\} \cup S(z)$. Тогда в силу свойства (B) получим $\{\widehat{z}\} = Z_0(\widehat{S})$.

Таким образом, в обоих случаях $\widehat{S} \in Z_{1,N} \cap B_\alpha(S, \varepsilon)$.

Пусть $S \in \overline{Z_{1,N}}$. Тогда либо $D(Z_0(S)) < R_0(S)$, либо найдутся такие $x, y \in Z_0(S)$, что $|xy| = R_0(S)$. В первом случае N-сеть S принадлежит множеству в правой части устанавливаемого равенства. Во втором случае предположим, что $D(\{x,y\}, S \setminus \{x,y\}) < R_0(S)$ и выберем $\delta = 1/8 \min\{R_0(S) - D(\{x,y\}, S \setminus \{x,y\}), m(S)/2\}$. Тогда для любой N-сети $\widehat{S} \in B_\alpha(S, \delta)$ найдутся такие $\{u\} = \widehat{S} \cap B(x, \delta)$, $\{v\} = \widehat{S} \cap B(y, \delta)$, что $u \neq v$ и $u, v \in Z_0(\widehat{S})$. Следовательно, $\widehat{S} \notin Z_{1,N}$ и наше предположение приводит к противоречию с тем, что $S \in \overline{Z_{1,N}}$. Таким образом, во втором случае $D(\{x,y\}, S \setminus \{x,y\}) = R_0(S)$ и N-сеть S также принадлежит множеству в правой части устанавливаемого равенства. Следовательно, утверждение (iii) доказано.

(iv) Из равенств (i) леммы 2 получим $dm_1(N) = \{S \in d_0(N) : \exists x_1, \ldots, x_N \in S \ (|x_1x_2| = \cdots = |x_1x_N| = D(S))\}$. Следовательно, для произвольного $S \in dm_1(N)$ найдутся такие $x = x_1$, $y = x_2 \in S$, что $|xy| = D(S) = R_0(S)$ и $D(\{x,y\}, S \setminus \{x,y\}) = D(S) = R_0(S)$. Тогда, учитывая доказанное утверждение (iii), получим $dm_1(N) \subset \overline{Z_{1,N}} \cap d_0(N)$. Пусть $S = \{x_1, \ldots, x_N\} \in d_{0,N-1}$ и $|x_1x_2| = \cdots = |x_1x_{N-1}| = D(S)$. Используя определения множеств $d_0(N)$, $d_{0,N-1}$, найдем такой элемент $x \in S(x_N)$, что $|xx_N| = D(S)$. Тогда $|xx_1| = D(S) = R_0(S)$, $D(\{x, x_1\}, S \setminus \{x, x_1\}) = D(S) = R_0(S)$. Учитывая доказанное утверждение (iii), получим $d_{1,N-1} \subset \overline{Z_{1,N}} \cap d_0(N)$.

Докажем обратное включение при $N \in \{3, 4\}$. Используя доказанное утверждение (iii), свойство 1 и определение множеств $d_0(N)$, $d_{0,N-1}$, получим $\overline{Z_{1,N}} \cap d_0(N) = \{S \in d_0(N) : \exists x, y \in S \ (|xy| = D(S), D(\{x,y\}, S \setminus \{x,y\}) = D(S))\} = \{S \in d_0(N) : \exists x, y, z \in S \ (|xy| = |xz| = D(S))\} = d_{0,N-1} \subset dm_1(N) \cup d_{0,N-1}$. Таким образом, теорема 2 доказана. □

Доказательство теоремы 3. Пусть $S \in \Sigma_N^*(X) \setminus \overline{Z_{1,N}}$. Тогда в силу утверждения (iii) теоремы 2 $D(Z_0(S)) = R_0(S)$ и найдутся такие точки $x, y \in Z_0(S)$, что $|xy| = R_0(S)$. Кроме того, для каждой такой пары точек $0 < D(\{x,y\}, S \setminus \{x,y\}) < R_0(S)$. Выберем такую пару $\{x,y\}$ и возьмем произвольное ε, удовлетворяющее неравенствам $0 < \varepsilon < R_0(S) - D(\{x,y\}, S \setminus \{x,y\})$. Определим $\widehat{S} = \{\omega_\varepsilon[y, x]\} \cup S(y)$. Нетрудно проверить, что $\widehat{S} \in \widehat{Z}_{2,N}$. Теперь также ясно, что $\widehat{Z}_{2,N}$ — открытое множество в пространстве $(\Sigma_N^*(X), \alpha)$, непересекающееся с множеством $\overline{Z_{1,N}}$.

Таким образом, теорема 3 доказана.

Литература

[1] Гаркави А.Л. *О наилучшей сети и наилучшем сечении множеств в нормированном пространстве* // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1962. – Т. 26. – №1. – С. 87–106.

[2] Куратовский К. *Топология.* Т. 1. – М.: Мир, 1966. – 594 с.

[3] Wisnicki A., Wosko J. *On relative Hausdorff measures of noncompactness and relative Chebyshev radii in Banach spaces* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1996. – V. 124. – № 8. – P. 2465–2474.
[4] Amir D., Mach J., Saatkamp K. *Existence of Chebyshev centers, best n-nets and best compact approximants* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1982. – V. 271. – № 2. – P. 513–524.
[5] Khamsi M.A. *On metric spaces with uniform normal structure* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1989. – V. 106. – № 3. – P. 723–726.
[6] Буземан Г. *Геометрия геодезических.* – М.: Физматгиз, 1962. – 503 с.
[7] Papadopoulos A. *Metric spaces convexity and nonpositive curvature.* – Zurich: European Math. Society, 2005. – 287 p.
[8] Бураго Д.Ю., Бураго Ю.Д., Иванов С.В. *Курс метрической геометрии.* – Москва–Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2004. – 496 с.
[9] Buyalo S., Schroeder V. *Extension of Lipschitz maps into 3-manifolds* // Asian J. Math. – 2001. – V. 5. – № 4. – P. 685–704.

Е.Н. Сосов
доцент, кафедра геометрии, факультет механико-математический,
Казанский государственный университет,
420008, г. Казань, ул. Кремлевская, 18
E-mail: Evgenii.Sosov@ksu.ru