ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2003 МАТЕМАТИКА № 3 (490)

УДК 517.95

Г.Н. ЗАЙНУЛЛИНА

ЗАДАЧА Δ_2 ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА–ПУАССОНА–ДАРБУ В КЛАССЕ НЕОГРАНИЧЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Впервые задача Δ_2 для уравнения

$$u_{xx} - u_{yy} - \frac{2q}{y} u_y = 0, \quad 0 < q < \frac{1}{2}, \tag{1}$$

где q — кусочно-постоянный параметр, была рассмотрена в [1]. Большое число работ посвящено исследованию задачи Δ_2 для уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу

$$u_{\xi\eta} - \frac{\beta}{\xi - \eta} u_\xi + \frac{\beta'}{\xi - \eta} u_\eta = 0, \tag{2}$$

к которому заменой переменных сводятся многие вырождающиеся модельные уравнения гиперболического типа (в частности, уравнение (1)). Однако во всех этих работах на параметры β и β' накладываются условия, которые можно объединить неравенством $|\beta| + |\beta'| < 1$.

В [2] построено единственное решение задачи Δ_2 для уравнения (2) при

а) $\beta = \beta'$, $-1 < \beta + n < 0$, $\beta + n \neq \frac{1}{2}$, $n = m$;

б) $-1 < \beta + n < 0$, $\beta' = -m$,

где n, m — целые неотрицательные числа, причем в случае $\beta \neq \beta'$ возникают $|m - n|$ условий разрешимости.

Отличительной особенностью данной статьи является исследование задачи в классе неограниченных функций, что позволяет снять подобные условия разрешимости.

Рассмотрим уравнение (2) в области Ω, ограниченной характеристиками AB: $\xi = 0$, BC: $\eta = 1$, AD: $\eta = 0$, CD: $\xi = 1$. Примем следующие обозначения: $\Omega_1 = \Omega \cap \{\xi < \eta\}$; $\Omega_2 = \Omega \cap \{\xi > \eta\}$; $\zeta = \eta - (\eta - \xi)\sigma$, $\zeta_1 = \xi + (\eta - \xi)\sigma$; n, m — такие целые неотрицательные числа, что выполняются неравенства $0 < \beta + n < 1$, $\beta_0 = \beta + n$, и $0 < \beta' + m < 1$, $\beta_0' = \beta' + m$.

Пусть $m > n$, $1 < \beta_0' + \beta_0 < 2$.

Задача Δ_2. В области Ω найти функцию $u(\xi, \eta)$ со свойствами

1) $u(\xi, \eta) \in C\ (\Omega \cup AB \cup CD)$;
2) $u(\xi, \eta)$ имеет непрерывные производные u_ξ, u_η и $u_{\xi\eta}$ и удовлетворяет уравнению (1) в $\Omega_1 \cup \Omega_2$;
3) существуют пределы из областей Ω_i, $i = 1, 2$,

$$\nu_i(\eta) = \lim_{\eta \to \xi} |\eta - \xi|^{\beta + \beta'} [u_\xi - u_\eta - H(\xi, \eta; \beta, \beta'; \tau)], \quad 0 < \eta < 1, \tag{3}$$

и на линии вырождения AC выполняется условие склеивания

$$\nu_1(\eta) = (-1)^{n+m} \nu_2(\eta), \quad 0 < \eta < 1, \tag{4}$$

где $H(\xi, \eta; \beta, \beta'; \tau) = T_\xi(\xi, \eta; \beta, \beta'; \tau) - T_\eta(\xi, \eta; \beta, \beta'; \tau)$,

$$T(\xi,\eta;\beta,\beta';\tau)=\frac{\Gamma(\beta+\beta')}{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta')}\Big[\sum_{s=0}^{n}C_{n+m}^{n-s}\frac{(\eta-\xi)^s}{(\beta_0'+s)_s}\times$$
$$\times\int_0^1\tau^{(s)}(\zeta)\sigma^{\beta_0'+2s-1}F(\beta_0'+s,1-\beta_0+s,\beta_0'+2s,\sigma)d\sigma+$$
$$+\sum_{s=1}^{m}C_{n+m}^{m-s}\frac{(\xi-\eta)^s}{(\beta_0+s)_s}\int_0^1\tau^{(s)}(\zeta_1)\sigma^{\beta_0+2s-1}F(\beta_0+s,1-\beta_0'+s,\beta_0+2s,\sigma)d\sigma\Big]+$$
$$+\sum_{l=0}^{n-1}\frac{\tau^{(l)}(\xi)(\eta-\xi)^l}{l!(\beta+\beta')_{n+m+l}}\sum_{s=0}^{n-1-l}C_{n+m}^{s}(\beta)_{s+l}(\beta')_{n+m-s}+\sum_{l=0}^{m-1}\frac{\tau^{(l)}(\eta)(\xi-\eta)^l}{l!(\beta+\beta')_{n+m+l}}\sum_{s=0}^{m-1-l}C_{n+m}^{s}(\beta')_{s+l}(\beta)_{n+m-s},$$
$$\tau(\eta)=u(\eta,\eta); \tag{5}$$

4) $u(\xi,\eta)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(0,\eta)=\varphi(\eta),\quad 0\le\eta<1, \tag{6}$$
$$u(1,\eta)=\psi(\eta),\quad 0<\eta\le 1. \tag{7}$$

Здесь $\varphi(\eta)$, $\psi(\eta)$ — заданные функции, для которых выполняется

Условие 1. Функция $\varphi(\eta)\in C^{n-1}[0,1)\cap C^n(0,1)$ может иметь особенности при $\eta=1$ порядка ниже $\beta-\beta'$, а производная $\varphi^{(n)}(\eta)$ при $\eta=0$ может иметь особенности порядка ниже β_0; функция $\psi(\eta)\in C^{n-1}(0;1]\cap C^n(0;1)$ имеет особенности при $\eta=0$ порядка ниже $\beta-\beta'$, а производная $\psi^{(n)}(\eta)$ может иметь особенности при $\eta=1$ порядка ниже β_0.

Решение будем искать в классе функций, для которых выполняется

Условие 2. Функция $\tau(\eta)\in C^{n-1}[0,1]\cap C^n(0,1)$, $\tau^{(n)}(\eta)$ может иметь особенности при $\eta=0$ и $\eta=1$ порядка ниже β_0; функции $\nu_i(\eta)\in C(0;1)$ могут иметь особенности при $\eta=0$ и $\eta=1$ порядка ниже $1-\beta'$.

Задачу будем решать методом интегральных уравнений. Задачи типа Коши (2), (3), (5) имеют единственные решения, которые соответственно в областях Ω_i записываются формулами [2]

$$u(\xi,\eta)=-\frac{\Gamma(1-\beta-\beta')}{2\Gamma(1-\beta)\Gamma(1-\beta')}\int_\xi^\eta\nu_1(\zeta)(\eta-\zeta)^{-\beta}(\zeta-\xi)^{-\beta'}d\zeta+T, \tag{8}$$
$$u(\xi,\eta)=\frac{\Gamma(1-\beta-\beta')}{2\Gamma(1-\beta)\Gamma(1-\beta')}\int_\eta^\xi\nu_2(\zeta)(\zeta-\eta)^{-\beta}(\xi-\zeta)^{-\beta'}d\zeta+T. \tag{9}$$

В [2] предполагается, что функция $\tau(\eta)$ является ограниченной. Если же $\tau(\eta)$ и $\nu_i(\eta)$ удовлетворяют условию 2, то решение $u(\xi,\eta)$ будет иметь особенности при $\eta=0$ и $\eta=1$ порядка ниже $\beta-\beta'$.

Аналогично [3] получим соотношения между $\tau(\eta)$ и $\nu_i(\eta)$ соответственно в областях Ω_1 и Ω_2:

$$\nu_1(\eta)=l_1\Gamma(\beta+\beta')\frac{d^m}{d\eta^m}D_{0\eta}^{-\delta}\tau^{(n)}(\eta)+\frac{2\Gamma(1-\beta')}{\Gamma(1-\beta-\beta')}\eta^{\beta'}\frac{d}{d\eta}D_{0\eta}^{-\beta_0}\varphi^{(n)}(\eta), \tag{10}$$
$$\tau^{(s)}(0)=\frac{(\beta+\beta')_s}{(\beta)_s}\varphi^{(s)}(0),\quad s=\overline{0,n-1}, \tag{11}$$
$$\nu_2(\eta)=-l_1\Gamma(\beta+\beta')(-1)^{m+n}\frac{d^m}{d\eta^m}D_{\eta 1}^{-\delta}\tau^{(n)}(\eta)+\frac{2\Gamma(1-\beta')}{\Gamma(1-\beta-\beta')}(1-\eta)^{\beta'}(-1)^n\frac{d}{d\eta}D_{\eta 1}^{-\beta_0}\psi^{(n)}(\eta), \tag{12}$$
$$\tau^{(s)}(1)=\frac{(\beta+\beta')_s}{(\beta)_s}\psi^{(s)}(1),\quad s=\overline{0,n-1}, \tag{13}$$

где $l_1=\frac{2\Gamma(1-\beta')}{\Gamma(\beta)\Gamma(1-\beta-\beta')}$, $\delta=\beta_0+\beta_0'-1$.

Используя условие склеивания (4), получим уравнение относительно $\tau^{(n)}(\eta)$:

$$\frac{d^m}{d\eta^m}[D_{0\eta}^{-\delta}\tau^{(n)}(\eta)+D_{\eta 1}^{-\delta}\tau^{(n)}(\eta)]=f(\eta),$$

$$f(\eta)=\frac{2\Gamma(1-\beta')}{l_1\Gamma(\beta+\beta')\Gamma(1-\beta-\beta')}\Big[(-1)^m(1-\eta)^{\beta'}\frac{d}{d\eta}D_{\eta 1}^{-\beta_0}\psi^{(n)}(\eta)-\eta^{\beta'}\frac{d}{d\eta}D_{0\eta}^{-\beta_0}\varphi^{(n)}(\eta)\Big].$$

Оно равносильно равенству

$$D_{0\eta}^{-\delta}\tau^{(n)}(\eta)+D_{\eta 1}^{-\delta}\tau^{(n)}(\eta)=F(\eta)+\sum_{s=0}^{m-1}C_s\eta^s, \tag{14}$$

где $F(\eta)$ — некоторая первообразная $f(\eta)$ порядка m, а C_s — произвольные постоянные. Применим к равенству (14) оператор $D_{0\eta}^{\delta}$ и используем формулы композиции ([4], сс. 18, 24). После приведения подобных членов уравнение примет вид

$$\tau^{(n)}(\eta)\cos\frac{\pi\delta}{2}+\frac{\sin\frac{\pi\delta}{2}}{\pi}\int_0^1\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\delta}\frac{\tau^{(n)}(t)dt}{t-\eta}=F_1(\eta)+\sum_{s=0}^{m-1}C'_s\eta^{s-\delta},$$

$$F_1(\eta)=\frac{D_{0\eta}^{\delta}F(\eta)}{2\cos\frac{\pi\delta}{2}},\quad C'_s=\frac{C_s s!}{2\Gamma(s-\delta+1)\cos\frac{\pi\delta}{2}}.$$

Функция $f(\eta)$ может иметь особенности при $\eta=0$ и $\eta=1$ порядка ниже $(1-\beta')$, поэтому $F(\eta)$ может иметь при $\eta=0$ и $\eta=1$ особенности порядка ниже $(1-\beta'_0)$. Следовательно, $F_1(\eta)$ допускает особенности при $\eta=0$ и $\eta=1$ порядка ниже β_0.

Введем новую искомую функцию $\mu(\eta)=\eta^{\delta}\tau^{(n)}(\eta)$. В результате получим

$$\mu(\eta)\cos\frac{\pi\delta}{2}+\frac{\sin\frac{\pi\delta}{2}}{\pi}\int_0^1\frac{\mu(t)dt}{t-\eta}=\eta^{\delta}F_1(\eta)+\sum_{s=0}^{m-1}C'_s\eta^s. \tag{15}$$

Теперь $\eta^{\delta}F_1(\eta)$ может иметь особенности порядка ниже $1-\beta'_0$ при $\eta=0$ и ниже β_0 при $\eta=1$. Можно проверить, что у функции $\mu(\eta)$ допускаются такие же особенности. В этом классе у уравнения (15) существует единственное решение ([5], с. 486). Оно записывается по формуле решения, ограниченного при $\eta=0$ и неограниченного при $\eta=1$:

$$\mu(\eta)=\eta^{\delta}F_1(\eta)\cos\frac{\pi\delta}{2}-\frac{\sin\frac{\pi\delta}{2}}{\pi}\int_0^1\left(\frac{1-t}{1-\eta}\right)^{\delta/2}\left(\frac{\eta}{t}\right)^{\delta/2}\frac{t^{\delta}F_1(t)dt}{t-\eta}+$$
$$+\sum_{s=0}^{m-1}C'_s\Big\{\eta^s\cos\frac{\pi\delta}{2}-\frac{\sin\frac{\pi\delta}{2}}{\pi}\int_0^1\left(\frac{1-t}{1-\eta}\right)^{\delta/2}\left(\frac{\eta}{t}\right)^{\delta/2}\frac{t^s dt}{t-\eta}\Big\}.$$

Вычислим выражение в фигурных скобках индукцией по s с использованием тождества ([5], с. 489)

$$\int_0^1\frac{dt}{t^{\mu}(1-t)^{1-\mu}(t-\eta)}=\frac{\pi\,\mathrm{ctg}\,\pi\mu}{\eta^{\mu}(1-\eta)^{1-\mu}},\quad 0<\mu<1.$$

Окончательная формула запишется в виде

$$\tau^{(n)}(\eta)=F_1(\eta)\cos\frac{\pi\delta}{2}-\frac{\sin\frac{\pi\delta}{2}}{\pi}\int_0^1\left(\frac{(1-t)t}{(1-\eta)\eta}\right)^{\delta/2}\frac{F_1(t)dt}{t-\eta}+[\eta(1-\eta)]^{-\delta/2}\sum_{l=0}^{m-1}C^*_l\eta^l, \tag{16}$$

$$C^*_l=-\frac{\sin\frac{\pi\delta}{2}}{\pi}\Gamma\left(\frac{\delta}{2}+1\right)\sum_{s=l}^{m-1}\frac{\Gamma\left(s-l-\frac{\delta}{2}\right)}{(s-l)!}C'_s,\quad l=\overline{0,m-1}.$$

Матрица преобразования $\{C'_s\}$ в $\{C^*_l\}$ треугольная, поэтому C^*_l можно также рассматривать как произвольные независимые постоянные.

Итак, для определения $\tau(\eta)$ получена двуточечная задача (16), (11), (13).

Лемма. *Пусть задано дифференциальное уравнение*

$$z^{(n)}(\eta) = f(\eta) + (1-\eta)^{\frac{2-\delta}{2}-1}\eta^{\frac{2-\delta}{2}-1}\sum_{l=0}^{m-1} a_l\eta^l, \quad 0<\eta<1, \tag{17}$$

где $\frac{2-\delta}{2}>0$, $f(\eta)\in C(0;1)\cap L(0;1)$, a_l *— заранее не заданные постоянные, и краевые условия*

$$z^{(l)}(0) = b_l^0, \quad l=\overline{0,n-1}, \tag{18}$$

$$z^{(l)}(1) = b_l^1, \quad l=\overline{0,n-1}. \tag{19}$$

Тогда решение двуточечной задачи (17)–(19) *существует и содержит* $m-n$ *произвольных постоянных.*

Доказательство. Запишем функцию $z(\eta)$ в виде

$$z(\eta) = \sum_{l=0}^{n-1}\frac{b_l^0}{l!}(\eta-1)^l + \frac{(-1)^n}{(n-1)!}\int_\eta^1 f(\sigma)(\sigma-\eta)^{n-1}d\sigma + \\ + \frac{(-1)^n}{(n-1)!}\sum_{l=0}^{m-1} a_l\int_\eta^1 \sigma^l(\sigma-\eta)^{n-1}\sigma^{-\delta/2}(1-\sigma)^{-\delta/2}d\sigma. \tag{20}$$

Очевидно, (20) удовлетворяет (17), (19). Далее подставим (20) в (18) и получим систему относительно a_l:

$$\sum_{l=0}^{m-1} a_l\int_0^1 \sigma^{s+l}\sigma^{-\delta/2}(1-\sigma)^{-\delta/2}d\sigma = d_s, \quad s=\overline{0,n-1}, \tag{21}$$

$$d_s = s!(-1)^{s+1}b_{n-1-s}^0 + s!\sum_{l=0}^{s}\frac{b_{n-1-l}^1(-1)^l}{(s-l)!} - \int_0^1 f(\sigma)\sigma^s d\sigma.$$

Система (21) состоит из n линейных алгебраических уравнений с m неизвестными. Покажем, что она разрешима.

Рассмотрим однородную систему

$$\sum_{l=0}^{m-1} a_l\int_0^1 \sigma^{s+l}\sigma^{-\delta/2}(1-\sigma)^{-\delta/2}d\sigma = 0, \quad s=\overline{0,n-1}. \tag{22}$$

Пусть $(a_0^*,\dots,a_{m-1}^*)$ — некоторое решение (22). Составим полином $Q_{m-1}(\eta) = \sum\limits_{l=0}^{m-1} a_l^*\eta^l$ степени не выше $m-1$. Тогда (22) можно записать в виде

$$\int_0^1 \sigma^s Q_{m-1}(\sigma)\sigma^{-\delta/2}(1-\sigma)^{-\delta/2}d\sigma = 0, \quad s=\overline{0,n-1}. \tag{23}$$

Из (23) следует, что для любого полинома $P_k(\eta)$ степени не выше $k\le n-1$ должно выполняться равенство

$$\int_0^1 P_k(\sigma)Q_{m-1}(\sigma)\sigma^{-\delta/2}(1-\sigma)^{-\delta/2}d\sigma = 0. \tag{24}$$

Теперь будем считать, что $P_k(\eta) = G_k\big(1-\delta,\frac{2-\delta}{2},\eta\big)$, $k=\overline{0,n-1}$. В силу (24) полином $Q_{m-1}(\eta)$ ортогонален с соответствующим весом всем полиномам Якоби $G_k\big(1-\delta,\frac{2-\delta}{2},\eta\big)$, $k=\overline{0,n-1}$. Следовательно, $Q_{m-1}(\eta)$ линейно выражается через $G_k\big(1-\delta,\frac{2-\delta}{2},\eta\big)$, $k=\overline{n,m-1}$. Таким образом, система (22) имеет $m-n$ линейно независимых решений. Значит, ранг системы (21) равен числу уравнений. Отсюда следует утверждение леммы.

Функцию $\tau(\eta)$ найдем как решение задачи (16), (11), (13). В силу леммы $\tau(\eta)$ определяется безусловно, причем содержит $m - n$ произвольных постоянных. Далее из соотношений (10), (12) вычислим $\nu_i(\eta)$ и по формулам (8), (9) запишем искомую функцию $u(\xi, \eta)$ соответственно в областях Ω_1 и Ω_2.

Итак, доказана

Теорема. *Если заданные функции $\varphi(\eta)$, $\psi(\eta)$ удовлетворяют условию* 1, *то задача Δ_2 имеет неограниченное решение в классе функций, удовлетворяющих условию* 2, *причем оно будет содержать $m - n$ произвольных постоянных.*

Литература

1. Волкодавов В.Ф., Андреев А.А. *Краевые задачи для уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу.* Учеб. пособие. – Куйбышев: Куйбышев. гос. пед. ин-т, 1984. – 80 с.
2. Хайруллин Р.С. *Краевые задачи для модельных дифференциальных уравнений с сильным вырождением внутри области*: Дис. … канд. физ.-матем. наук. – Казань, 1986. – 144 с.
3. Хайруллин Р.С. *Задача Трикоми для одного уравнения с сингулярными коэффициентами* // Изв. вузов. Математика. – 1996. – № 3. – С. 75–84.
4. Смирнов М.М. *Уравнения смешанного типа.* – М.: Наука, 1970. – 295 с.
5. Гахов Ф.Д. *Краевые задачи.* – 3-е изд. – М.: Наука, 1977. – 640 с.

Казанская архитектурно-строительная академия

Поступили
первый вариант 17.07.2001
окончательный вариант 22.11.2001