ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 12 (463)

УДК 519.10

В.А. ЕМЕЛИЧЕВ, Ю.В. СТЕПАНИШИНА

КВАЗИУСТОЙЧИВОСТЬ ВЕКТОРНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ТРАЕКТОРНОЙ ЗАДАЧИ С ПАРЕТОВСКИМ ПРИНЦИПОМ ОПТИМАЛЬНОСТИ

Как обычно [1], [2], под квазиустойчивостью многокритериальной дискретной задачи будем понимать свойство сохранения всех оптимумов Парето при малых независимых возмущениях параметров векторного критерия. Тем самым квазиустойчивость задачи является дискретным аналогом полунепрерывности снизу в смысле Хаусдорфа точечно-множественного отображения, которое параметрам векторного критерия ставит в соответствие множество Парето [3]–[6]. Известно [6], [7] (см. также [1], [2], [8], [9]), что необходимым и достаточным условием квазиустойчивости векторной дискретной задачи с линейными частными критериями (вида MINSUM) является равенство множеств Парето (эффективных решений) и Смейла (строго эффективных решений). В [1] показано, что в случае, когда векторный критерий состоит лишь из нелинейных частных критериев (вида MINMAX и MINMIN), равенство этих множеств, оставаясь достаточным, перестает быть необходимым условием рассматриваемого типа устойчивости векторной траекторной задачи. Цель данной работы — получить необходимые и достаточные условия квазиустойчивости векторной траекторной задачи с любой комбинацией наиболее распространенных в дискретной оптимизации частных критериев вида MINSUM, MINMAX и MINMIN.

Рассмотрим традиционную [1], [8]–[11] модель траекторной задачи, в схему которой вкладываются практически все комбинаторные экстремальные задачи. Пусть на множестве $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$, $m > 1$, задана совокупность T непустых подмножеств (траекторий) и векторная функция $a : E \longrightarrow \mathbf{R}^n$, $n \geq 1$, которую удобно представлять в виде матрицы $A = [a_{ij}]_{n\times m} \in \mathbf{R}^{nm}$, где $(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj}) = a(e_j)$, $j \in N_m := \{1, 2, \dots, m\}$.

Пусть компонентами векторного критерия

$$f(t, A) = (f_1(t, A), f_2(t, A), \dots, f_n(t, A)) \longrightarrow \min_{t\in T}$$

являются частные критерии вида

$$\text{MINSUM} \quad f_i(t, A) = \sum_{j\in N(t)} a_{ij} \longrightarrow \min_{t\in T},$$

$$\text{MINMAX} \quad f_i(t, A) = \max_{j\in N(t)} a_{ij} \longrightarrow \min_{t\in T},$$

$$\text{MINMIN} \quad f_i(t, A) = \min_{j\in N(t)} a_{ij} \longrightarrow \min_{t\in T},$$

где $N(t) = \{j \in N_m : e_j \in t\}$. В дальнейшем будем считать, что число траекторий $|T| > 1$. Через I_{SUM}, I_{MAX} и I_{MIN} будем обозначать множества тех индексов из множества N_n, которыми перенумерованы соответственно критерии MINSUM, MINMAX и MINMIN.

Под векторной (n-критериальной) задачей $Z^n(A)$, $n \geq 1$, будем понимать задачу поиска множества Парето $P^n(A)$, состоящего из всех эффективных траекторий

$$P^n(A) = \{t \in T : \pi(t, A) = \emptyset\},$$

где

$$\pi(t, A) = \{t' \in T : f(t, A) \geq f(t', A), \quad f(t, A) \neq f(t', A)\}.$$

Очевидно, $P^1(A)$ (A — m-мерный вектор) является множеством всех оптимальных решений скалярной траекторной задачи $Z^1(A)$.

Как обычно [1], [2], [6]–[12], возмущение параметров векторного критерия $f(t, A)$ будем осуществлять путем сложения матрицы $A \in \mathbf{R}^{nm}$ с матрицами множества

$$\mathcal{B}(\varepsilon) = \{B \in \mathbf{R}^{nm} : \|B\| < \varepsilon\},$$

где $\varepsilon > 0$, $\|\cdot\|$ — норма l_∞ в пространстве $\mathbf{R}^{nm}$, т. е.

$$\|B\| = \max\{|b_{ij}| : (i,j) \in N_n \times N_m\}, \quad B = [b_{ij}]_{n\times m}.$$

Задачу $Z^n(A+B)$, полученную из исходной задачи $Z^n(A)$ при сложении матриц A и $B \in \mathcal{B}(\varepsilon)$, будем называть возмущенной, а матрицу B — возмущающей.

Следуя [1], [2], [8]–[10], задачу $Z^n(A)$ назовем квазиустойчивой, если справедлива формула

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall B \in \mathcal{B}(\varepsilon) \quad (P^n(A) \subseteq P^n(A+B)).$$

Для всякого индекса $i \in N_n$ введем обозначения

$$\gamma_i(t,t',A) = -\frac{\tau_i(t,t',A)}{\Delta(t,t')},$$

$$\tau_i(t,t',A) = f_i(t,A) - f_i(t',A),$$

$$\Delta(t,t') = \begin{cases} |(t \setminus t') \ \cup \ (t' \setminus t)|, & \text{если } \ i \in I_{\mathrm{SUM}}; \\ 2, & \text{если } \ i \in I_{\mathrm{MAX}} \cup I_{\mathrm{MIN}}. \end{cases}$$

Очевидно, $\Delta(t,t') > 0$ при $t \neq t'$.

Для любой матрицы $A \in \mathbf{R}^{nm}$ будем в дальнейшем полагать

$$f_i(\emptyset, A) = \begin{cases} 0, & \text{если } \ i \in I_{\mathrm{SUM}}; \\ -\infty, & \text{если } \ i \in I_{\mathrm{MAX}}; \\ +\infty, & \text{если } \ i \in I_{\mathrm{MIN}}. \end{cases} \tag{1}$$

Лемма 1. *Для любого индекса $i \in I_{\mathrm{SUM}} \cup I_{\mathrm{MAX}} \cup I_{\mathrm{MIN}}$ справедливо утверждение: если $0 < \varphi \le \gamma_i(t,t',A)$, то для всякой матрицы $B \in \mathcal{B}(\varphi)$ верно неравенство*

$$\tau_i(t,t',A+B) < 0.$$

Доказательство. Пусть $B = [b_{ij}]_{n\times m} \in \mathcal{B}(\varphi)$. Тогда $\|B\| < \gamma := \gamma_i(t,t',A)$. Рассмотрим два случая.

Случай 1. $i \in I_{\mathrm{SUM}}$. Тогда выводим

$$\tau_i(t,t',B) = \sum_{j \in N(t\setminus t')} b_{ij} - \sum_{j \in N(t'\setminus t)} b_{ij} \le \sum_{j \in N((t\setminus t')\cup(t'\setminus t))} |b_{ij}| \le \|B\|\Delta(t,t') < \gamma\Delta(t,t') = -\tau_i(t,t',A).$$

Отсюда с учетом линейности функции $\tau_i(t,t',A)$ получаем

$$\tau_i(t,t',A+B) = \tau_i(t,t',A) + \tau_i(t,t',B) < 0.$$

Случай 2. $i \in I_{\mathrm{MAX}} \cup I_{\mathrm{MIN}}$. Тогда очевидны неравенства

$$f_i(t,A+B) \le f_i(t,A) + \|B\|,$$
$$f_i(t',A+B) \ge f_i(t',A) - \|B\|.$$

Отсюда, учитывая равенство $\tau_i(t,t',A) = -2\gamma$, выводим

$$\tau_i(t,t',A+B) \le \tau_i(t,t',A) + 2\|B\| < \tau_i(t,t',A) + 2\gamma = 0. \quad \square$$

Для любых двух различных траекторий t и t' положим

$$\zeta_i(t,t',A) = \begin{cases} \gamma_i(t,t',A), & \text{если } i \in I_{\mathrm{SUM}}; \\ \gamma_i(t \setminus t',t',A), & \text{если } i \in I_{\mathrm{MAX}}; \\ \gamma_i(t,t' \setminus t,A), & \text{если } i \in I_{\mathrm{MIN}}. \end{cases}$$

Поэтому, учитывая (1), легко видеть, что $\zeta_i(t,t',A) = +\infty$ лишь в двух случаях: 1) $i \in I_{\mathrm{MAX}}$, $t \setminus t' = \emptyset$; 2) $i \in I_{\mathrm{MIN}}$, $t' \setminus t = \emptyset$.

Очевидно,

$$\forall i \in N_n, \quad \forall t \in T, \quad \forall t' \in T \quad (\zeta_i(t,t',A) \geq \gamma_i(t,t',A)), \tag{2}$$

причем неравенство $\zeta_i(t,t',A) > \gamma_i(t,t',A)$ выполняется лишь в следующих случаях:

1^0 $i \in I_{\mathrm{MAX}}$, $t \setminus t' = \emptyset$;

2^0 $i \in I_{\mathrm{MIN}}$, $t' \setminus t = \emptyset$;

3^0 $i \in I_{\mathrm{MAX}}$, $t \setminus t' \neq \emptyset$, $f_i(t \setminus t', A) < f_i(t,A)$;

4^0 $i \in I_{\mathrm{MIN}}$, $t' \setminus t \neq \emptyset$, $f_i(t' \setminus t, A) > f_i(t',A)$.

Лемма 2. *Для любого индекса $i \in I_{\mathrm{SUM}} \cup I_{\mathrm{MAX}} \cup I_{\mathrm{MIN}}$ справедливо утверждение: если $0 < \varphi \leq \zeta_i(t,t',A)$, $t \neq t'$, то для всякой матрицы $B \in \mathcal{B}(\varphi)$ верно неравенство*

$$\tau_i(t,t',A+B) \leq 0.$$

Доказательство. Если $\zeta_i(t,t',A) = \gamma_i(t,t',A)$, то утверждение леммы справедливо в силу леммы 1. Поэтому согласно (2) остается рассмотреть лишь случай, когда $\zeta_i(t,t',A) > \gamma_i(t,t',A)$. Тогда выполняется одно из условий 1^0–4^0, приведенных выше.

Случай 1^0. Для любой матрицы $B \in \mathbf{R}^{nm}$ ввиду $t' \setminus t \neq \emptyset$ справедливы соотношения

$$\tau_i(t,t',A+B) = f_i(t,A+B) - \max\{f_i(t,A+B),\ f_i(t' \setminus t, A+B)\} \leq 0.$$

Случай 2^0. Для всякой матрицы $B \in \mathbf{R}^{nm}$ с учетом $t \setminus t' \neq \emptyset$ верны соотношения

$$\tau_i(t,t',A+B) = \min\{f_i(t \setminus t', A+B),\ f_i(t',A+B)\} - f_i(t',A+B) \leq 0.$$

Случай 3^0. Тогда $\zeta_i(t,t',A) = \gamma_i(t \setminus t',t',A) > 0$. Поэтому, благодаря лемме 1, для всякого числа φ такого, что $0 < \varphi \leq \zeta_i(t,t',A)$, при любой матрице $B \in \mathcal{B}(\varphi)$ имеет место неравенство

$$\tau_i(t \setminus t',t',A+B) < 0. \tag{3}$$

Пусть $B \in \mathcal{B}(\varphi)$. Возможны два подслучая.

$3^0.1$ $f_i(t,A+B) = f_i(t \setminus t', A+B)$. Тогда в силу (3) получаем $\tau_i(t,t',A+B) < 0$.

$3^0.2$ $f_i(t,A+B) = f_i(t \cap t', A+B)$, $t \cap t' \neq \emptyset$. В этом подслучае очевидны соотношения

$$\tau_i(t,t',A+B) = f_i(t \cap t', A+B) - f_i(t',A+B) \leq 0.$$

Случай 4^0 рассматривается аналогично случаю 3^0. □

Для всякой траектории $t \in P^n(A)$ введем множество

$$Q(t,A) = \{t' \in T \setminus \{t\} : f(t',A) = f(t,A)\}.$$

Теорема 1. *Задача $Z^n(A)$, $n \geq 1$, с любой комбинацией частных критериев* MINSUM, MINMAX *и* MINMIN *квазиустойчива тогда и только тогда, когда справедлива формула*

$$\forall t \in P^n(A) \quad (Q(t,A) \neq \emptyset \ \Rightarrow\ \forall t' \in Q(t,A), \ \ \forall i \in N_n \quad (\zeta_i(t,t',A) > 0)).$$

Доказательство. Достаточность. Пусть $t \in P^n(A)$, $t' \in T \setminus \{t\}$. Возможны два случая.

Случай 1. $t' \in T \setminus Q(t, A)$. Тогда $f(t, A) \neq f(t', A)$ и в силу $t \in P^n(A)$ найдется индекс s такой, что $\tau_s(t, t', A) < 0$. Поэтому существует такое число $\varepsilon = \varepsilon(t') > 0$, что для любой возмущающей матрицы $B \in \mathcal{B}(\varepsilon)$ справедливо неравенство

$$\tau_s(t, t', A + B) < 0.$$

Следовательно, никакая траектория из $T \setminus Q(t, A)$ не принадлежит множеству $\pi(t, A + B)$ ни при какой матрице $B \in \mathcal{B}(\varepsilon_1)$, где $\varepsilon_1 = \min\{\varepsilon(t') : t' \in T \setminus Q(t, A)\}$.

Случай 2. $t' \in Q(t, A)$. Тогда для любого индекса $i \in N_n$ справедливо неравенство $\zeta_i(t, t', A) > 0$. Далее, полагая $\varepsilon(t') = \min\{\zeta_i(t, t', A) : i \in N_n\}$, на основании леммы 2 получаем

$$\forall i \in N_n, \ \ \forall B \in \mathcal{B}(\varepsilon(t')) \quad (\tau_i(t, t', A + B) \leq 0).$$

Таким образом, никакая траектория из множества $Q(t, A)$ не принадлежит множеству $\pi(t, A + B)$ ни при какой матрице $B \in \mathcal{B}(\varepsilon_2)$, где $\varepsilon_2 = \min\{\varepsilon(t') : t' \in Q(t, A)\}$.

Резюмируя, заключаем, что $t \in P^n(A + B)$ при любой возмущающей матрице $B \in \mathcal{B}(\varepsilon)$, где $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Поэтому задача $Z^n(A)$ квазиустойчива.

Необходимость докажем методом от противного. Пусть $t \in P^n(A)$, $Q(t, A) \neq \emptyset$ и существуют такие $t' \in Q(t, A)$ и $p \in N_n$, что

$$\zeta_p(t, t', A) \leq 0. \tag{4}$$

Построим возмущающую матрицу $B^* = [b_{ij}]_{n \times m}$ по правилу

$$b_{ij} = \begin{cases} \beta, & \text{если } \ i = p \in I_{\mathrm{SUM}} \cup I_{\mathrm{MAX}}, \ \ j \in N(t \setminus t'); \\ -\beta, & \text{если } \ i = p \in I_{\mathrm{SUM}} \cup I_{\mathrm{MIN}}, \ \ j \in N(t' \setminus t); \\ 0 & \text{для остальных пар } \ (i, j) \in N_n \times N_m, \end{cases}$$

где $0 < \beta < \varepsilon$.

Рассмотрим возможные случаи.

Случай 1. $p \in I_{\mathrm{SUM}}$. Тогда очевидно равенство

$$\tau_p(t, t', A + B^*) = \tau_p(t, t', A) + \beta\Delta(t, t').$$

Случай 2. $p \in I_{\mathrm{MAX}}$. В силу строения матрицы B^* выводим

$$\begin{aligned} \tau_p(t, t', A + B^*) &= \max\{f_p(t \setminus t', A + B^*),\, f_p(t \cap t', A + B^*)\} - f_p(t', A + B^*) = \\ &= \max\{f_p(t \setminus t', A) + \beta, f_p(t \cap t', A)\} - f_p(t', A). \end{aligned}$$

Из формулы (4) с учетом определения величины $\zeta_p(t, t', A)$ получаем $f_p(t \setminus t', A) \geq f_p(t', A)$, причем $t \setminus t' \neq \emptyset$. Отсюда ввиду очевидного неравенства $f_p(t', A) \geq f_p(t \cap t', A)$ вытекает неравенство $f_p(t \setminus t', A) \geq f_p(t \cap t', A)$. Следовательно,

$$\max\{f_p(t \setminus t', A) + \beta, f_p(t \cap t', A)\} = f_p(t \setminus t', A) + \beta = f_p(t, A) + \beta.$$

Поэтому справедливо равенство $\tau_p(t, t', A + B^*) = \tau_p(t, t', A) + \beta$.

Случай 3. $p \in I_{\mathrm{MIN}}$. Тогда, принимая во внимание строение матрицы B^*, выводим

$$\begin{aligned} \tau_p(t, t', A + B^*) &= f_p(t, A + B^*) - \min\{f_p(t' \setminus t, A + B^*),\, f_p(t \cap t', A + B^*)\} = \\ &= f_p(t, A) - \min\{f_p(t' \setminus t, A) - \beta,\ f_p(t \cap t', A)\}. \end{aligned}$$

Согласно (4) и определению числа $\zeta_p(t, t', A)$ получаем $f_p(t' \setminus t, A) \leq f_p(t, A)$, причем $t' \setminus t \neq \emptyset$. Отсюда ввиду очевидного неравенства $f_p(t, A) \leq f_p(t \cap t', A)$ выводим $f_p(t' \setminus t, A) \leq f_p(t \cap t', A)$. Следовательно,

$$\min\{f_p(t' \setminus t, A) - \beta,\ f_p(t \cap t', A)\} = f_p(t' \setminus t, A) - \beta = f_p(t', A) - \beta.$$

Поэтому выполняется равенство $\tau_p(t,t',A+B^*) = \tau_p(t,t',A)+\beta$. Собирая все доказанное и учитывая, что $\tau_p(t,t',A) \geq 0$, убеждаемся в справедливости неравенства $\tau_p(t,t',A+B^*) > 0$. В то же время, поскольку $t' \in Q(t,A)$, получаем, что для всякого индекса $i \in N_n \setminus \{p\}$ верно равенство $\tau_i(t,t',A+B^*) = 0$.

Таким образом, для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такая матрица $B^* \in \mathcal{B}(\varepsilon)$, что $t \notin P^n(A+B^*)$. Следовательно, в силу принадлежности $t \in P^n(A)$ заключаем, что задача $Z^n(A)$ не является квазиустойчивой. $\square$

Традиционное множество Смейла, т. е. множество строго эффективных траекторий, определим следующим образом:

$$S^n(A) = \{t \in P^n(A): \quad Q(t,A) = \emptyset\}.$$

Очевидно, $Q(t,A) \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда $t \in P^n(A) \setminus S^n(A)$.

Введем множество

$$P^n_\alpha(A) = \{t \in P^n(A) \setminus S^n(A) : \forall t' \in Q(t,A), \quad \forall i \in N_n \ \ (\zeta_i(t,t',A) > 0)\}.$$

Тогда справедлива следующая эквивалентная формулировка теоремы 1.

Теорема 1$'$. *Задача $Z^n(A)$, $n \geq 1$, с любой комбинацией частных критериев* MINSUM, MINMAX *и* MINMIN *квазиустойчива тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий*:

$P^n(A) = S^n(A)$;

$\emptyset \neq P^n(A) \setminus S^n(A) = P^n_\alpha(A)$.

Приведем очевидные следствия теоремы 1 (теоремы 1$'$).

Следствие 1. Если $|P^n(A)| = 1$, $n \geq 1$, то задача $Z^n(A)$ квазиустойчива.

Следствие 2 ([1]). Если векторный критерий $f(t,A)$ содержит хотя бы один частный критерий вида MINSUM, то задача $Z^n(A)$, $n \geq 1$, квазиустойчива тогда и только тогда, когда $P^n(A) = S^n(A)$.

Следствие 3 ([13]). Однокритериальная линейная (с критерием вида MINSUM) задача $Z^1(A)$ квазиустойчива тогда и только тогда, когда $|P^1(A)| = 1$.

Литература

1. Емеличев В.А., Кравцов М.К., Подкопаев Д.П. *О квазиустойчивости траекторных задач векторной оптимизации* // Матем. заметки. – 1998. – Т. 63. – Вып. 1. – С. 21–27.
2. Емеличев В.А., Подкопаев Д.П. *О количественной мере устойчивости векторной задачи целочисленного программирования* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1998. – Т. 38. – № 11. – С. 1801–1805.
3. Дубов Ю.А., Травкин С.И., Якимец В.Н. *Многокритериальные модели формирования и выбора вариантов систем.* – М.: Наука, 1986. – 295 с.
4. Молодцов Д.А. *Устойчивость принципов оптимальности.* – М.: Наука, 1987. – 280 с.
5. Белоусов Е.Г., Андронов В.Г. *Разрешимость и устойчивость задач полиномиального программирования.* – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1993. – 272 с.
6. Сергиенко И.В., Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т. *Исследование устойчивости и параметрический анализ дискретных оптимизационных задач.* – Киев: Наук. думка, 1995. – 169 с.
7. Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т., Сергиенко Т.И. *Задачи целочисленного программирования с векторным критерием: параметрический анализ и исследование устойчивости* // ДАН СССР. – 1989.– Т. 307. – № 3. – С. 527–529.
8. Емеличев В.А., Кравцов М.К., Подкопаев Д.П. *О радиусе квазиустойчивости многокритериальной траекторной задачи* // Докл. АН Беларуси. – 1996. – Т. 40. – № 1. – С. 9–12.

9. Емеличев В.А., Кравцов М.К. *Об устойчивости в траекторных задачах векторной оптимизации* // Кибернет. и системн. анал. – 1995. – № 4. – С. 137–143.
10. Бердышева Р.А., Емеличев В.А. *Некоторые виды устойчивости комбинаторной задачи лексикографической оптимизации* // Изв. вузов. Математика. – 1998. – № 12. – С. 11–21.
11. Sotskov Yu.N., Leontev V.K., Gordeev E.N. *Some concepts of stability analysis in combinatorial optimization* // Discr. Appl. Math. – 1995. – V. 58. – P. 169–190.
12. Емеличев В.А., Бердышева Р.А. *О радиусах устойчивости, квазиустойчивости и стабильности векторной траекторной задачи лексикографической оптимизации* // Дискретн. матем. – 1998. – Т. 10. – Вып. 1. – С. 20–27.
13. Леонтьев В.К. *Устойчивость в линейных дискретных задачах* // Пробл. кибернетики. – М.: Наука, 1979. – Вып. 35. – С. 169–184.

Белорусский государственный университет

Поступила
18.07.2000