ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 4 (455)

УДК 517.988

Э.В. ПЛЕХОВА

УСТОЙЧИВАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ МОНОТОННЫХ И АККРЕТИВНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Работа посвящена исследованию разрешимости операторного уравнения

$$Tx = Fx \tag{1}$$

с непрерывным оператором $T : X \to Y$ и вполне непрерывным оператором $F : X \to Y$, X, Y — банаховы пространства.

Уравнение (1) исследовалось многими авторами в случаях, когда T — линейный оператор (так называемые квазилинейные уравнения) или T допускает линеаризацию (напр., является дифференцируемым оператором). Однако известно мало работ, в которых уравнение (1) изучается с существенно нелинейным оператором T, т.е. без предположения о линеаризуемости оператора T.

В работе предложен способ исследования разрешимости уравнения (1), основанный на новом понятии "устойчивой разрешимости" относительно некоторого класса возмущений. Ранее попытка введения такого понятия была предпринята в [1].

Основное внимание в работе уделяется изучению условий устойчивой разрешимости монотонных по Минти–Браудеру и аккретивных операторов.

Через Φ обозначим некоторое непустое выпуклое множество непрерывных операторов $H : X \to Y$, и пусть $G \subset Y$ — подмножество пространства Y.

Определение 1. Непрерывный оператор $T : X \to Y$ будем называть устойчиво разрешимым относительно класса Φ и множества G ((Φ, G)-устойчиво разрешимым), если для любого оператора $H \in \Phi$ и произвольного элемента $g \in G$ уравнение

$$Tx = Hx + g$$

имеет хотя бы одно решение.

Данное определение обладает известной степенью общности, т.к. оставляет свободу выбора класса Φ и множества G. Содержательные утверждения об устойчивой разрешимости можно получить относительно естественного класса

$$\Phi(X, Y) = \{H : X \to Y \text{ вполне непрерывный и такой, что } \lim_{r\to\infty} \sup_{\|x\|=r} \|Hx\| = 0\}.$$

Будем также предполагать, что множество G совпадает со всем пространством X. В этом случае будем говорить просто об устойчивой разрешимости. Свойство устойчивой разрешимости сохраняется при вполне непрерывных возмущениях определенного типа. Об этом говорит

Теорема 1. *Пусть $T : X \to Y$ — устойчиво разрешимый оператор, семейство $K : X \times [0,1] \to Y$ удовлетворяет условиям*

1) $K(\cdot, t)$ *вполне непрерывный при каждом* $t \in [0,1]$;

2) $K(x, 0) = 0$ *для любого* $x \in X$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-15-96195).

Если существует число $\widetilde{r} > 0$ такое, что для любого $r > \widetilde{r}$ и любого $t \in [0,1]$ справедливо

$$\inf_{\|x\|=r} \|Tx - K(x,t)\| \neq 0,$$

то оператор $T - K(\cdot, 1)$ устойчиво разрешим.

Пусть $H \in \Phi(X,Y)$. Приведем схему доказательства в два этапа. Сначала покажем, что ограничено множество

$$S = \{x \in X : Tx - K(x,t) = Hx \text{ для некоторого } t \in [0,1]\}.$$

Если S — неограниченное множество, то существует последовательность $\{x_n\} \subset S$ и соответствующая последовательность чисел $\{t_n\}$ таких, что $\|x_n\| \geq n$. Для этих последовательностей имеем

$$0 = \lim_{n\to\infty} \|Hx_n\| = \lim_{n\to\infty} \|Tx_n - K(x_n,t_n)\| \geq \inf_{\|x\|=\|x_n\|,\ t\in[0,1]} \|Tx - K(x,t)\| \neq 0 \text{ для } \|x_n\| \geq \widetilde{r}.$$

Пришли к противоречию. Следовательно, множество S ограничено.

Перейдем ко второму этапу. Как показано выше, множество $\overline{S}$ — ограниченное замкнутое множество, т. е. найдется $r_0 > 0$ такое, что $\overline{S} \subset U_{r_0}$, где U_{r_0} — открытый шар радиуса r_0 с центром в нуле пространства X. Согласно лемме Урысона ([2], с. 25) существует непрерывный функционал $\varphi : X \to R$ такой, что

$$0 \leq \varphi(x) \leq 1, \quad \varphi(x) = 1 \text{ для } x \in S, \quad \varphi(x) = 0 \text{ для } x \notin U_{r_0}.$$

В уравнении

$$Tx = Hx + K(x, \varphi(x)) = \widetilde{H}x$$

оператор $\widetilde{H}$ вполне непрерывен.

Так как для любого $r > r_0$ значение функционала Урысона равно нулю, то

$$\lim_{r\to\infty} \sup_{\|x\|=r} \|K(x,\varphi(x))\| = 0,$$

поэтому

$$\lim_{r\to\infty} \sup_{\|x\|=r} \|\widetilde{H}x\| \leq \lim_{r\to\infty} \sup_{\|x\|=r} \|Hx\| + \lim_{r\to\infty} \sup_{\|x\|=r} \|K(x,\varphi(x))\| = 0.$$

Таким образом, $\widetilde{H} \in \Phi(X,Y)$. Оператор T устойчиво разрешим, следовательно, уравнение

$$Tx = \widetilde{H}x$$

имеет хотя бы одно решение $x_0 \in X$. Иными словами, x_0 удовлетворяет равенству

$$Tx_0 - K(x_0, \varphi(x)) = Hx_0.$$

Согласно определению множества S имеем $x_0 \in S$ и $\varphi(x_0) = 1$.

Таким образом, $T - K(\cdot, 1)$ — устойчиво разрешимый оператор.

Используя теорему 1, получим следующее утверждение об условиях разрешимости уравнения (1).

Теорема 2. *Пусть $T : X \to Y$ — устойчиво разрешимый оператор, вполне непрерывный оператор $F : X \to Y$ удовлетворяет условию: существует число $r_0 > 0$ такое, что для любого $r > r_0$ выполнено неравенство*

$$\sup_{\|x\|=r} \|Fx\| < \inf_{\|x\|=r} \|Tx\|.$$

Тогда уравнение (1) имеет хотя бы одно решение $x \in U_{r_0}$.

Наметим схему доказательства. Вполне непрерывный оператор $K : X \times [0,1] \to Y$ определим равенством
$$K(x,t) = tFx.$$
Для любого $r > r_0$ имеем
$$\inf_{\|x\|=r} \|Tx - K(x,t)\| \geq \inf_{\|x\|=r} \|Tx\| - \sup_{\|x\|=r} \|K(x,t)\| \geq \inf_{\|x\|=r} \|Tx\| - \sup_{\|x\|=r} \|Fx\| > 0.$$
Оператор $K(x,t) = tFx$ удовлетворяет условиям теоремы 1, следовательно, оператор $T - F$ устойчиво разрешим, и уравнение
$$Tx - Fx = Hx$$
с вполне непрерывным оператором $H \in \Phi(X,Y)$ имеет хотя бы одно решение. Выбирая в качестве вполне непрерывного оператора H нулевой оператор, получим утверждение теоремы 2.

Таким образом, теорема 2 позволяет при наличии достаточных условий устойчивой разрешимости оператора T установить факт существования решения уравнения (1).

Сформулируем достаточные признаки устойчивой разрешимости для двух классов нелинейных операторов. Предварительно напомним некоторые определения (напр., [3]).

Пусть $A : X \to X$ — линейный, сюръективный оператор с конечномерным ядром.

Определение 2. Оператор $T : X \to X^*$ будем называть A-монотонным, если для любых $x_1, x_2 \in D(T)$ выполняется неравенство
$$\langle Tx_1 - Tx_2, A(x_1 - x_2)\rangle \geq 0.$$

Определение 3. Оператор $T : X \to X^*$ будем называть A-коэрцитивным, если для любого $x \in D(T)$ справедливо неравенство
$$\langle Tx, Ax\rangle \geq \gamma(\|x\|)\|x\|$$
с функцией $\gamma : [0,\infty) \to R$, удовлетворяющей условию $\lim\limits_{t\to\infty} \gamma(t) = \infty$.

Отметим, что в случае, когда оператор $A = I$ тождественный, введенные определения совпадают с определениями монотонного и коэрцитивного по Минти–Браудеру оператора [3]. Случай, когда A — линейный обратимый оператор, исследован в [4].

Теорема 3. *Пусть X — гильбертово пространство и выполнены условия*

1) *оператор $T : X \to X$ обладает свойствами A-монотонности и A-коэрцитивности;*
2) *оператор $F : X \to X$ вполне непрерывен и существует число $r_0 > 0$ такое, что для любого $r > r_0$ справедливо неравенство*
$$\sup_{\|x\|=r} \|Fx\| \leq \gamma(r)/\|A\|.$$

Тогда оператор $T : X \to X$ устойчиво разрешим и уравнение (1) *имеет хотя бы одно решение $x \in U_{r_0}$.*

Замечание. В случае рефлексивного банахова пространства X можно доказать справедливость аналогичного утверждения, однако при более сильном требовании изоморфности оператора $A : X \to X$.

В качестве примера применения теоремы 3 рассмотрим задачу Коши
$$\frac{d}{dt}\left(k\left(\frac{dx}{dt}\right)\frac{dx}{dt}\right) = f(t,x), \quad t \in [0,1]; \quad x(0) = x_0, \quad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 0. \tag{2}$$
Данное дифференциальное уравнение возникает при изучении задач одномерной стационарной теплопроводности. В этом случае x — температура, t — координата, $k(\cdot)$ — коэффициент теплопроводности (непрерывная функция), функция $f(\cdot,\cdot)$ характеризует источники тепла.

Теорема 4. *Пусть*

1) *функция* $tk(t)$ *неубывающая для всех* $t \in R$;
2) *существует неотрицательное число* a *такое, что* $k(t) \geq a$ *для любого* $t \in R$;
3) *функция* $f(\cdot, \cdot)$ *удовлетворяет условию Каратеодори и справедливо неравенство*

$$|f(s,u)| \leq c(s) + d|u|, \quad c \in L_2, \quad 0 < d < a.$$

Тогда задача (2) *имеет хотя бы одно решение в пространстве* D_2 *абсолютно непрерывных функций* $x : [0,1] \to R$ *таких, что* $\dot{x} \in L_2$.

Другим классом нелинейных операторов, обладающих свойством устойчивой разрешимости, являются аккретивные ([5], с. 316) операторы. Понятие аккретивного оператора в банаховом пространстве вводится относительно фиксированного дуального ([5], с. 311) отображения.

Зафиксируем линейный вполне непрерывный оператор $\Lambda : X \to X$ с нулевым ядром. Сформулируем теорему об устойчивой разрешимости аккретивного коэрцитивного оператора T и разрешимости уравнения

$$Tx = F\Lambda x. \tag{3}$$

Теорема 5. *Пусть выполнены условия*

1) X *— вещественное рефлексивное банахово пространство, допускающее аппроксимацию, и* X^* *строго выпукло*;
2) *дуальное отображение* $J : X \to X^*$ *непрерывно, сюрьективно и обладает свойством: если* $x_i \rightharpoonup x$, *то* $Jx_i \rightharpoonup Jx$;
3) $T : X \to X$ *— аккретивный, коэрцитивный оператор*;
4) *для непрерывного, ограниченного оператора* $F : X \to X$ *существует число* $r_0 > 0$ *такое, что для любого* $r > r_0$ *справедливо неравенство* $\sup_{\|x\|=r} \|F\Lambda x\| \leq \gamma(r)$.

Тогда 1) оператор T *устойчиво разрешим относительно класса вполне непрерывных операторов* H, *представимых в виде* $H = \widetilde{H}\Lambda$, *где* $\widetilde{H}$ *— непрерывный ограниченный оператор, удовлетворяющий условию* $\lim\limits_{r\to\infty} \sup\limits_{\|x\|=r} \|\widetilde{H}x\| = 0$; *2) уравнение* (3) *имеет в шаре* U_{r_0} *хотя бы одно решение.*

Литература

1. Furi M., Martelli M., Vignoli A. *On the solvability of nonlinear operator equations in normed spaces* // Ann. Mat. Pura Appl. – 1980. – V. 124. – P. 321–343.
2. Данфорд Н., Шварц Дж. *Линейные операторы. Общая теория.* – М.: Ин. лит., 1962. – 896 с.
3. Пушкарев Г.А. *Двухточечная задача для дифференциального уравнения второго порядка с отклоняющимся аргументом* // Функц.-дифференц. уравнения. – Пермь, 1987. – С. 52–55.
4. Куфнер А., Фучик С. *Нелинейные дифференциальные уравнения.* – М.: Наука, 1988. – 304 с.
5. Вайнберг М.М. *Вариационный метод и метод монотонных операторов.* – М.: Наука, 1972. – 416 с.

Пермский государственный технический университет

Поступила 30.04.1999