ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2007 МАТЕМАТИКА № 9 (544)

УДК 514.764

В.Ф. КИРИЧЕНКО, Е.А. ПОЛЬКИНА

ГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ ЖЕСТКОСТЬ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ПОЧТИ КОНТАКТНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЙ

Введение. Работа [1] явилась естественным продолжением в исследовании основных проблем теории геодезических отображений псевдоримановых пространств. Свое начало теория берет в конце XIX в. в трудах Т. Леви-Чивита, Т. Томаса, Г. Вейля. С тех пор многие исследователи обращались к этой проблематике, изучая геодезические отображения псевдоримановых многообразий, наделенных дополнительной структурой. Теория наполнялась новым содержанием. Так, в середине XX в. Уэстлейком и Яно было доказано, что келеровы многообразия не допускают нетривиальных геодезических преобразований, сохраняющих комплексную структуру. На сегодняшний день получен контактный аналог этих результатов. В частности, в работе ([1], с. 215) вводится понятие контактно-геодезического преобразования почти контактной метрической структуры как геодезического преобразования, сохраняющего почти контактную структуру. Там же разработан аппарат, с помощью которого авторы доказывают, что косимплектические и сасакиевы структуры, а также структуры Кенмоцу не допускают нетривиальных контактно-геодезических преобразований метрики.

С помощью результатов указанного выше исследования, в данной работе доказывается, что квази-сасакиевы структуры не допускают нетривиальных контактно-геодезических преобразований метрики, что, в свою очередь, обобщает результаты [1]. Нами также доказано, что регулярные локально конформно квази-сасакиевы структуры, допускающие нетривиальные контактно-геодезические преобразования метрики, нормальны.

1. Предварительные понятия. Пусть M — $(2n{+}1)$-мерное гладкое многообразие, $\mathrm{X}(M)$ — модуль гладких векторных полей на M. Напомним ([2], с. 446), что *почти контактной структурой* на многообразии M называется тройка (η,ξ,Φ) тензорных полей на этом многообразии, где η — дифференциальная 1-форма, называемая контактной формой структуры; ξ — векторное поле, называемое характеристическим; Φ — поле тензора типа $(1;1)$, называемое структурным эндоморфизмом модуля $\mathrm{X}(M)$. При этом

$$1)\ \ \eta(\xi)=1;\quad 2)\ \ \eta\circ\Phi=0;\quad 3)\ \ \Phi(\xi)=0;\quad 4)\ \ \Phi^2=-\,\mathrm{id}+\eta\otimes\xi. \tag{1}$$

Если, кроме того, на M фиксирована риманова структура $g=\langle\cdot,\cdot\rangle$ такая, что $\langle\Phi X,\Phi Y\rangle=\langle X,Y\rangle-\eta(X)\eta(Y)$, $X,Y,\in\mathrm{X}(M)$, то четверка (η,ξ,Φ,g) называется *почти контактной метрической* (короче, AC-) *структурой.* Тензор $\Omega(X,Y)=\langle X,\Phi Y\rangle$ кососимметричен и называется *фундаментальной формой AC-структуры.* Многообразие, на котором фиксирована почти контактная метрическая структура, называется почти контактным метрическим многообразием.

AC-структура называется *контактной метрической*, если $d\eta(X,Y)=\langle X,\Phi Y\rangle$. AC-структура называется *нормальной*, если тензор Нейенхейса ее структурного эндоморфизма удовлетворяет тождеству $2N_\Phi+d\eta\otimes\xi=0$, где

$$N_\Phi(X,Y)=\frac{1}{4}([\Phi X,\Phi Y]+\Phi^2[X,Y]-\Phi[\Phi X,Y]-\Phi[X,\Phi Y]).$$

Сасакиевой структурой называется нормальная контактная метрическая структура. *Квази-сасакиевой* (короче, QS-) *структурой* называется нормальная почти контактная метрическая структура с замкнутой фундаментальной формой.

В $C^\infty(M)$-модуле $\mathrm{X}(M)$ гладких векторных полей на AC-многообразии внутренним образом определены два взаимно дополнительных проектора $\mathrm{I} = -\Phi^2$ и $\mathrm{m} = \eta \otimes \xi = \mathrm{id} + \Phi^2$ на распределения $\mathrm{L} = \operatorname{Im}\Phi = \ker\eta$ и $\mathrm{M} = \ker\Phi$ размерностей $2n$ и 1 соответственно, причем $\mathrm{X} = \mathrm{L} \oplus \mathrm{M}$, $\mathrm{L} \cap \mathrm{M} = \{0\}$.

Определение 1 ([1], с. 209). Диффеоморфизм $\varphi : M \to \overline{M}$ риманова многообразия (M, g) на риманово многообразие $(\overline{M}, \overline{g})$ называется *геодезическим отображением*, если любую геодезическую многообразия (M, g) он переводит в геодезическую многообразия $(\overline{M}, \overline{g})$. Если $\overline{M} = M$, то геодезическое отображение φ называется *геодезическим преобразованием многообразия* (M, g). Переход от римановой метрики g к римановой метрике $\widetilde{g} = \varphi^* g$, возникающей на многообразии M при геодезическом преобразовании φ, называется *геодезическим преобразованием метрики* g, если метрики g и $\widetilde{g}$ имеют общие геодезические.

Геодезическое преобразование $g \to \widetilde{g}$ метрики g AC-структуры (η, ξ, Φ, g) называется *контактно-* (короче, *c-*) *геодезическим* преобразованием, если $(\eta, \xi, \Phi, \widetilde{g})$ — AC-структура.

Известно ([3], с. 72), что если ∇ и $\widetilde{\nabla}$ — римановы связности метрик g и $\widetilde{g}$ соответственно, то тензор T аффинной деформации от связности ∇ к связности $\widetilde{\nabla}$ при c-геодезическом преобразовании имеет вид

$$T(X, Y) \equiv \widetilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y = \Psi(X)Y + \Psi(Y)X, \quad X, Y \in \mathrm{X}(M),$$

где Ψ — точная 1-форма на M, называемая *формой геодезического искажения*; вектор ζ, дуальный форме Ψ, называется *вектором геодезического искажения*. Поэтому

$$\begin{aligned}\widetilde{\nabla}_X(\Phi)Y = \widetilde{\nabla}_X(\Phi Y) - \Phi \circ \widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X(\Phi Y) + T(X, \Phi Y) - \Phi \circ \nabla_X Y - \Phi \circ T(X, Y) = \\ = \nabla_X(\Phi)Y + T(X, \Phi Y) - \Phi \circ T(X, Y) = \nabla_X(\Phi)Y + \Psi(\Phi Y)X - \Psi(Y)\Phi X.\end{aligned}$$

Таким образом, ковариантная производная эндоморфизма Φ AC-структуры в связности $\widetilde{\nabla}$ при c-геодезическом преобразовании имеет вид

$$\widetilde{\nabla}_X(\Phi)Y = \nabla_X(\Phi)Y + \Psi(\Phi Y)X - \Psi(Y)\Phi X, \quad X, Y \in \mathrm{X}(M). \tag{2}$$

Определение 2 ([1], с. 210). Геодезическое преобразование метрики называется *тривиальным*, если оно имеет нулевую форму геодезического искажения, т. е. $\Psi = 0$.

Поднятие индекса у метрики g с помощью метрики $\widetilde{g}$ дает эндоморфизм h модуля $\mathrm{X}(M)$, который называется *оператором геодезической деформации* и задается тождеством

$$g(X, Y) = \widetilde{g}(X, hY), \quad X, Y \in \mathrm{X}(M). \tag{3}$$

В силу симметрии метрического тензора g оператор h самосопряжен, т. е. выполняется свойство

$$\widetilde{g}(hX, Y) = \widetilde{g}(X, hY), \quad X, Y \in \mathrm{X}(M). \tag{4}$$

2. Контактно-геодезические преобразования метрики квази-сасакиевых многообразий. Напомним ([1], с. 216), что характеристический вектор ξ AC-структуры является собственным вектором оператора h геодезической деформации с собственным значением 1, т. е.

$$h(\xi) = \xi. \tag{5}$$

Хорошо известно ([2], с. 461), что AC-структура (η, ξ, Φ, g) на многообразии M сасакиева тогда и только тогда, когда на ней выполняется тождество $\nabla_X(\Phi)Y = \langle X, Y\rangle\xi - \eta(Y)X$ $(X, Y \in \mathrm{X}(M))$. Проводя аналогичные рассуждения для квази-сасакиевых структур, нетрудно убедиться, что AC-структура (η, ξ, Φ, g) на многообразии M квази-сасакиева тогда и только тогда, когда на ней выполняется тождество

$$\nabla_X(\Phi)Y = \langle \widetilde{C}X, Y\rangle\xi - \eta(Y)\widetilde{C}X, \quad X, Y \in \mathrm{X}(M), \tag{6}$$

где $\widetilde{C}(X) = \nabla_{\Phi X}\xi$ — самосопряженный эндоморфизм модуля $\mathrm{X}(M)$, который коммутирует со структурным эндоморфизмом Φ и аннулирует характеристический вектор ξ, т. е. выполняются свойства

$$1)\ \ \langle \widetilde{C}X, Y\rangle = \langle X, \widetilde{C}Y\rangle, \quad 2)\ \ \widetilde{C}\circ\Phi = \Phi\circ\widetilde{C}, \quad 3)\ \ \widetilde{C}(\xi) = 0. \tag{7}$$

Известно также ([2], с. 451), что на AC-многообразии внутренним образом определены шесть тензоров, называемых структурными тензорами AC-структуры. В них содержится основная информация о соответствующих классах AC-структур. В явном виде эти тензоры получены, например, в работе [1]. В частности, первый структурный тензор имеет вид

$$B(X,Y) = -\frac{1}{8}\{\Phi\circ\nabla_{\Phi^2 Y}(\Phi)(\Phi^2 X) + \Phi\circ\nabla_{\Phi Y}(\Phi)(\Phi X) + \\ + \Phi^2\circ\nabla_{\Phi Y}(\Phi)(\Phi^2 X) - \Phi^2\circ\nabla_{\Phi^2 Y}(\Phi)(\Phi X)\}.$$

В этом же исследовании показано, что если подвергнуть метрику g AC-структуры (η,ξ,Φ,g) c-геодезическому преобразованию, то первый структурный тензор $\widetilde{B}(X,Y)$ преобразованной AC-структуры $(\eta,\xi,\Phi,\widetilde{g})$ будет иметь вид

$$\widetilde{B}(X,Y) = B(X,Y) - \frac{1}{2}\Psi(\Phi X)\Phi Y - \frac{1}{2}\Psi(\Phi^2 X)\Phi^2 Y, \quad X,Y\in\mathrm{X}(M). \tag{8}$$

AC-структуры с равным нулю первым тензором называют структурами квазикелерова типа ([1], с. 217). Заметим, что сюда будут относиться и квази-сасакиевы структуры, т. к. для них доказано ([2], с. 466), что $B(X,Y)=0$.

Теорема 1 ([1], с. 217). *C-геодезические преобразования метрики переводят AC-структуру квазикелерова типа в AC-структуру квазикелерова типа.*

Доказательство. Пусть M — AC-многообразие квазикелерова типа. Для него по определению $B(X,Y)=0$. Подвергнем его метрику c-геодезическому преобразованию. Согласно (8), для преобразованной структуры

$$\widetilde{B}(X,Y) = -\frac{1}{2}\Psi(\Phi X)\Phi Y - \frac{1}{2}\Psi(\Phi^2 X)\Phi^2 Y, \quad X,Y\in\mathrm{X}(M). \tag{9}$$

Известно ([2], с. 451), что тензор $B(X,Y)$ обладает свойством

$$\langle B(X,Y),Z\rangle + \langle Y, B(X,Z)\rangle = 0.$$

Подставляя сюда (9), имеем

$$\Psi(\Phi X)\langle\Phi Y,Z\rangle + \Psi(\Phi^2 X)\langle\Phi^2 Y,Z\rangle + \Psi(\Phi X)\langle Y,\Phi Z\rangle + \Psi(\Phi^2 X)\langle Y,\Phi^2 Z\rangle = 0.$$

С учетом того, что

$$\langle X,\Phi Y\rangle = \langle\Phi X,\Phi^2 Y\rangle + \eta(X)\eta(\Phi Y) = \langle\Phi X,\Phi^2 Y\rangle = \\ = -\langle\Phi X,Y\rangle + \langle\Phi X,\eta(Y)\xi\rangle = -\langle\Phi X,Y\rangle, \quad X,Y\in\mathrm{X}(M), \tag{10}$$

получим $2\Psi(\Phi^2 X)\langle\Phi^2 Y,Z\rangle = 0$. В силу невырожденности метрики $\Psi(\Phi^2 X)\Phi^2 Y = 0$, а значит, $\Psi(\Phi^2 X) = 0$. С учетом (1_4)

$$\Psi(X) = \Psi(\xi)\eta(X), \quad X\in\mathrm{X}(M). \tag{11}$$

В частности, с учетом (1_3) $\Psi\circ\Phi = 0$, в силу чего тождество (2) на AC-структурах квазикелерова типа принимает вид

$$\widetilde{\nabla}_X(\Phi)Y = \nabla_X(\Phi)Y - \Psi(Y)\Phi X, \quad X,Y\in\mathrm{X}(M), \tag{12}$$

а тождество (9) — вид $\widetilde{B}(X,Y) = 0$. $\square$

Теперь приступим непосредственно к преобразованию метрики квази-сасакиева многообразия. Ковариантно дифференцируя тождество $\widetilde{g}(\Phi Y, Z) + \widetilde{g}(Y, \Phi Z) = 0$ ([2], с. 447), получим, что для AC-многообразий справедливо

$$\widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_X(\Phi)Y, Z) + \widetilde{g}(Y, \widetilde{\nabla}_X(\Phi)Z) = 0. \tag{13}$$

Заметим, что с учетом (6) тождество (12) запишется в виде

$$\widetilde{\nabla}_X(\Phi)Y = \langle \widetilde{C}X, Y\rangle \xi - \eta(Y)\widetilde{C}X - \psi(Y)\Phi X, \quad X, Y \in \mathrm{X}(M).$$

Подставляя полученное выражение в (13), с учетом билинейности метрики получим

$$\langle \widetilde{C}X, Y\rangle \widetilde{g}(\xi, Z) - \eta(Y)\widetilde{g}(\widetilde{C}X, Z) - \Psi(Y)\widetilde{g}(\Phi X, Z) + \\ + \langle \widetilde{C}X, Z\rangle \widetilde{g}(Y, \xi) - \eta(Z)\widetilde{g}(Y, \widetilde{C}X) - \Psi(Z)\widetilde{g}(Y, \Phi X) = 0.$$

Или с учетом (3), (7_1) и (10)

$$\widetilde{g}(\widetilde{C}hY, X)\eta(Z) - \eta(Y)\widetilde{g}(\widetilde{C}Z, X) + \Psi(Y)\widetilde{g}(\Phi Z, X) + \\ + \widetilde{g}(\widetilde{C}hZ, X)\eta(Y) - \eta(Z)\widetilde{g}(\widetilde{C}Y, X) + \Psi(Z)\widetilde{g}(\Phi Y, X) = 0,$$

где h — оператор геодезической деформации от метрики $\widetilde{g}$ к метрике g. В силу невырожденности метрики $\widetilde{g}$ имеем

$$\widetilde{C}h(Y)\eta(Z) - \eta(Y)\widetilde{C}Z + \Psi(Y)\Phi(Z) + \widetilde{C}h(Z)\eta(Y) - \eta(Z)\widetilde{C}Y + \Psi(Z)\Phi(Y) = 0, \quad Y, Z \in \mathrm{X}(M).$$

Положив здесь $Z = \xi$, согласно $(1_{1,3})$, (5) и (7_3) получим $\widetilde{C}h(Y) = \widetilde{C}(Y) - \Psi(\xi)\Phi(Y)$.

Лемма. *Оператор геодезической деформации c-геодезического преобразования метрики QS-структуры коммутирует с эндоморфизмом $\widetilde{C}$ этой структуры.*

Доказательство. С учетом (4) и (7_1)

$$g(\widetilde{C}hX, Y) = g(hX, \widetilde{C}Y) = g(X, h\widetilde{C}Y) = \widetilde{g}(X, \widetilde{C}Y) = \widetilde{g}(\widetilde{C}X, Y) = g(\widetilde{C}X, hY) = g(h\widetilde{C}X, Y).$$

Отсюда в силу невырожденности метрики

$$\widetilde{C} \circ h = h \circ \widetilde{C}. \quad \square \tag{14}$$

С учетом леммы тождество $\widetilde{C}h(Y) = \widetilde{C}(Y) - \Psi(\xi)\Phi(Y)$ принимает вид $h\widetilde{C}(Y) = \widetilde{C}(Y) - \Psi(\xi)\Phi(Y)$. Умножим обе части этого равенства скалярно на Z:

$$\langle h\widetilde{C}(Y), Z\rangle = \langle \widetilde{C}(Y), Z\rangle - \Psi(\xi)\langle \Phi(Y), Z\rangle. \tag{15}$$

В силу (4), (7_1) и (14) имеем $\langle Y, h\widetilde{C}(Z)\rangle = \langle Y, \widetilde{C}(Z)\rangle - \Psi(\xi)\langle Y, \Phi(Z)\rangle$. Переобозначив $Y \leftrightarrow Z$, с учетом (4) и (7_1)

$$\langle h\widetilde{C}(Y), Z\rangle = \langle \widetilde{C}(Y), Z\rangle - \Psi(\xi)\langle \Phi(Y), Z\rangle.$$

Вычитая из последнего равенства почленно равенство (15), получаем

$$\Psi(\xi)\langle \Phi(Y), Z\rangle = 0.$$

Отсюда с учетом невырожденности метрики следует $\Psi(\xi)\Phi(Y) = 0$. В частности, если $Y \in \mathrm{L}$ — ненулевой вектор, то $\Psi(\xi) = 0$ и в силу (11) $\Psi(X) = \Psi(\xi)\eta(X) = 0 \quad \forall X \in \mathrm{X}(M)$, т. е. $\Psi = 0$. Доказана

Теорема 2. *Квази-сасакиевы структуры не допускают нетривиальных контактно-геодезических преобразований метрики.*

3. Контактно-геодезические преобразования метрики локально конформно квази-сасакиевых многообразий. Напомним ([4], с. 26), что AC-многообразие M с AC-структурой $S=(\eta,\xi,\Phi,g)$ называется *локально конформно квази-сасакиевым* (короче, $lcQS$-) *многообразием*, если в некоторой окрестности U каждой точки из M существует конформное преобразование метрики g, переводящее структуру S в квази-сасакиеву структуру $\widehat{S}=(\widehat{\eta},\widehat{\xi},\Phi,\widehat{g})$, где

$$1)\ \ \widehat{\eta}=e^{-\sigma}\eta|_U,\quad 2)\ \ \widehat{\xi}=e^{\sigma}\xi|_U,\quad 3)\ \ \widehat{g}=e^{-2\sigma}g|_U,$$

$\sigma\in C^\infty(U)$ — локально определенная гладкая функция на многообразии M, называемая *определяющей* функцией конформного преобразования. Несложно показать, что ее внешний дифференциал $d\sigma$ корректно определяет замкнутую глобальную 1-форму α на M, сужение которой на U совпадает с $d\sigma$.

Итак, пусть теперь $S=(\eta,\xi,\Phi,g)$ — $lcQS$-структура на многообразии M, $\widehat{S}=(\widehat{\eta},\widehat{\xi},\Phi,\widehat{g})$ — соответствующая квази-сасакиева структура, локально определенная на этом многообразии, ∇ и $\widehat{\nabla}$ — римановы связности метрик g и $\widehat{g}$ соответственно. Известно ([2], с. 352), что при конформном преобразовании метрики g тензор T аффинной деформации от связности ∇ к связности $\widehat{\nabla}$ имеет вид $T(X,Y)=\langle X,Y\rangle\alpha^\sharp-\alpha(X)Y-\alpha(Y)X$, где $X,Y\in \mathrm{X}(M)$, $\alpha=d\sigma$, $\alpha^\sharp=\operatorname{grad}\sigma$ — вектор, дуальный форме $d\sigma$. С учетом этого, аналогично выводу тождества (2), получаем, что ковариантная производная эндоморфизма Φ AC-структуры в связности $\widehat{\nabla}$ при конформном преобразовании имеет вид

$$\widehat{\nabla}_X(\Phi)Y=\nabla_X(\Phi)Y+\alpha(\Phi Y)X-\alpha(Y)\Phi X+\langle X,Y\rangle\Phi\alpha^\sharp-\langle X,\Phi Y\rangle\alpha^\sharp,\quad X,Y\in\mathrm{X}(M). \tag{16}$$

С другой стороны, согласно (6) для QS-структур верно тождество

$$\widehat{\nabla}_X(\Phi)Y=\widehat{g}(\widetilde{C}X,Y)\widehat{\xi}-\widehat{\eta}(Y)\widetilde{C}X.$$

Отсюда для $lcQS$-структур получаем

$$\widehat{\nabla}_X(\Phi)Y=e^{-2\sigma}\langle e^{\sigma}CX,Y\rangle e^{\sigma}\xi-e^{-\sigma}\eta(Y)e^{\sigma}CX=\langle CX,Y\rangle\xi-\eta(Y)CX,$$

где $C=e^{-\sigma}\widetilde{C}$. Сравнивая с (16), приходим к выводу, что $lcQS$-многообразия определяются тождеством

$$\begin{aligned}\nabla_X(\Phi)Y=\alpha(\Phi Y)X-\alpha(Y)\Phi X+\langle X,Y\rangle\Phi\alpha^\sharp-\\ -\langle X,\Phi Y\rangle\alpha^\sharp+\langle CX,Y\rangle\xi-\eta(Y)CX,\quad X,Y\in\mathrm{X}(M).\end{aligned}$$

Подвергнем метрику $lcQS$-многообразия c-геодезическому преобразованию. С учетом (2) ковариантная производная эндоморфизма Φ $lcQS$-структуры в связности $\widetilde{\nabla}$ при c-геодезическом преобразовании будет иметь вид

$$\begin{aligned}\widetilde{\nabla}_X(\Phi)Y&=\nabla_X(\Phi)Y+\Psi(\Phi Y,X)-\Psi(Y)\Phi X=\\ &=\alpha(\Phi Y)X-\alpha(Y)\Phi X+\langle X,Y\rangle\Phi\alpha^\sharp-\langle X,\Phi Y\rangle\alpha^\sharp+\\ &\quad+\langle CX,Y\rangle\xi-\eta(Y)CX+\Psi(\Phi Y)X-\Psi(Y)\Phi X,\quad X,Y\in\mathrm{X}(M).\end{aligned}$$

Подставив в (13), с учетом билинейности метрики получим

$$\begin{aligned}&-\langle X,\Phi Y\rangle\widetilde{g}(\alpha^\sharp,Z)+\langle X,Y\rangle\widetilde{g}(\Phi\alpha^\sharp,Z)-\alpha(Y)\widetilde{g}(\Phi X,Z)+\alpha(\Phi Y)\widetilde{g}(X,Z)+\\ &\quad+\langle CX,Y\rangle\eta(Z)-\eta(Y)\widetilde{g}(CX,Z)+\Psi(\Phi Y)\widetilde{g}(X,Z)-\Psi(Y)\widetilde{g}(\Phi X,Z)-\\ &\quad-\langle X,\Phi Z\rangle\widetilde{g}(Y,\alpha^\sharp)+\langle X,Z\rangle\widetilde{g}(Y,\Phi\alpha^\sharp)-\alpha(Z)\widetilde{g}(Y,\Phi X)+\alpha(\Phi Z)\widetilde{g}(Y,X)+\\ &\quad+\langle CX,Z\rangle\eta(Y)-\eta(Z)\widetilde{g}(Y,CX)+\Psi(\Phi Z)\widetilde{g}(Y,X)-\Psi(Z)\widetilde{g}(Y,\Phi X)=0\end{aligned}$$

или с учетом (3)

$$\begin{aligned}&-\widetilde{g}(X,h\Phi Y)\widetilde{g}(\alpha^\sharp Z)+\widetilde{g}(X,hY)\widetilde{g}(\Phi\alpha^\sharp,Z)-\alpha(Y)\widetilde{g}(\Phi X,Z)+\\ &\quad+\alpha(\Phi Y)\widetilde{g}(X,Z)+\widetilde{g}(CX,hY)\eta(Z)-\eta(Y)\widetilde{g}(CX,Z)+\Psi(\Phi Y)\widetilde{g}(X,Z)-\end{aligned}$$

$$-\Psi(Y)\widetilde{g}(\Phi X,Z)-\widetilde{g}(X,h\Phi Z)\widetilde{g}(Y,\alpha^\sharp)+\widetilde{g}(X,hZ)\widetilde{g}(Y,\Phi\alpha^\sharp)-$$
$$-\alpha(Z)\widetilde{g}(Y,\Phi X)+\alpha(\Phi Z)\widetilde{g}(Y,X)+\widetilde{g}(CX,hZ)\eta(Y)-$$
$$-\eta(Z)\widetilde{g}(Y,CX)+\Psi(\Phi Z)\widetilde{g}(Y,X)-\Psi(Z)\widetilde{g}(Y,\Phi X)=0.$$

Далее, учитывая (4), (7_1) и (13), а также невырожденность метрики, получаем

$$-h\Phi(Y)\widetilde{g}(\alpha^\sharp,Z)+hY\widetilde{g}(\Phi\alpha^\sharp,Z)+\alpha(Y)\Phi Z+\alpha(\Phi Y)Z+$$
$$+ChY\eta(Z)-\eta(Y)CZ+\Psi(\Phi Y)Z+\Psi(Y)\Phi Z-$$
$$-h\Phi(Z)\widetilde{g}(Y,\alpha^\sharp)+hZ\widetilde{g}(Y,\Phi\alpha^\sharp)+\alpha(Z)\Phi Y+\alpha(\Phi Z)Y+$$
$$+ChZ\eta(Y)-\eta(Z)CY+\Psi(\Phi Z)Y+\Psi(Z)\Phi Y=0.$$

Положив здесь $Z=\xi$, с учетом $(1_{1,3})$, (5) и (7_3) приходим к тождеству

$$ChY-CY+\Psi(\xi)\Phi Y+\Psi(\Phi Y)\xi-\eta(\alpha^\sharp)h\Phi(Y)+\alpha(\Phi Y)\xi+\alpha(\xi)\Phi Y+\widetilde{g}(Y,\Phi\alpha^\sharp)\xi=0,$$

которое с учетом

$$\widetilde{g}(Y,\Phi\alpha^\sharp)=-\widetilde{g}(\Phi Y,\alpha^\sharp)=-\widetilde{g}(\Phi Y,\operatorname{grad}\sigma)=-d\sigma(\Phi Y)=-\alpha(\Phi Y)$$

запишется в виде $ChY-CY+\Psi(\xi)\Phi Y+\Psi(\Phi Y)\xi-\eta(\alpha^\sharp)h\Phi Y+\alpha(\xi)\Phi Y=0$. Так как $\mathrm{L}\cap\mathrm{M}=\{0\}$, то последнее равенство равносильно следующим двум:

$$\begin{aligned}&1)\ \ ChY-CY+\Psi(\xi)\Phi Y-\eta(\alpha^\sharp)h\Phi Y+\alpha(\xi)\Phi Y=0,\\&2)\ \ \Psi(\Phi Y)\xi=0.\end{aligned}\tag{17}$$

Из (17_2) следует, что для $lcQS$-многообразий верно тождество $\Psi(\Phi Y)=0\quad\forall Y\in\mathrm{X}(M)$. Таким образом, справедливо

Предложение 1. *Для $lcQS$-структур верно тождество* $\Psi\circ\Phi=0$.

Далее, умножив обе части тождества (17_1) скалярно на Z, получим

$$\langle hCY,Z\rangle-\langle CY,Z\rangle+\Psi(\xi)\langle\Phi Y,Z\rangle-\eta(\alpha^\sharp)\langle h\Phi Y,Z\rangle+\alpha(\xi)\langle\Phi Y,Z\rangle=0\tag{18}$$

или с учетом (4), (7_2) и (10)

$$\langle hCZ,Y\rangle-\langle CZ,Y\rangle-\Psi(\xi)\langle\Phi Z,Y\rangle+\eta(\alpha^\sharp)\langle h\Phi Z,Y\rangle-\alpha(\xi)\langle\Phi Z,Y\rangle=0.$$

Переобозначив в последнем равенстве $Y\leftrightarrow Z$ и вычитая из него почленно равенство (18), получаем $\Psi(\xi)\langle\Phi Y,Z\rangle-\eta(\alpha^\sharp)\langle h\Phi Y,Z\rangle+\alpha(\xi)\langle\Phi Y,Z\rangle=0$ или с учетом невырожденности метрики $\Psi(\xi)\Phi Y-\eta(\alpha^\sharp)h\Phi Y+\alpha(\xi)\Phi Y=0$. Так как $\eta(\alpha^\sharp)=\langle\xi,\alpha\rangle=\langle\alpha,\xi\rangle=\langle\operatorname{grad}\sigma,\xi\rangle=d\sigma(\xi)=\alpha(\xi)$, то приходим к тождеству $\alpha(\xi)h\Phi Y=\Psi(\xi)\Phi Y+\alpha(\xi)\Phi Y$.

Рассмотрим открытое подмногообразие многообразия M, в каждой точке которого $\alpha(\xi)\neq0$, и назовем его *регулярным подмногообразием* многообразия M. В силу регулярности определена функция $\frac{1}{\alpha(\xi)}$. Обозначим $\frac{1}{\alpha(\xi)}=u$, $\Psi(\xi)=v$. Тогда последнее тождество примет вид $h\circ\Phi(Y)=uv(\Phi)Y+\Phi Y$ или $h\circ(-\Phi^2)Y=(uv+1)(-\Phi^2)Y$. Поскольку $\mathrm{I}=-\Phi^2$ и $\mathrm{m}=\eta\otimes\xi$, то

$$h(Y)=h\mathrm{I}(Y)+h\mathrm{m}(Y)=(uv+1)(-\Phi^2)Y+\eta(Y)\xi=$$
$$=uv(-\Phi^2)Y+Y-\eta(Y)\xi+\eta(Y)\xi=uv(-\Phi^2)Y+Y$$

или $h=\mathrm{id}-uv(\Phi^2)$.

С учетом последнего соотношения и тождества (3) получаем $g(X,Y)=\widetilde{g}(X,Y)+f\widetilde{g}(\Phi X,\Phi Y)$ или

$$g(X,Y)=(1+f)\widetilde{g}(X,Y)-f\eta(X)\eta(Y),\tag{19}$$

где $f=uv$, $X,Y\in\mathrm{X}(M)$.

Вычислим в явном виде тензор аффинной деформации $T(X,Y) = \widetilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y$ от связности ∇ к связности $\widetilde{\nabla}$. Для этого, применив к обеим частям тождества (19) оператор ∇_Z, получим

$$(1+f)\{\widetilde{g}(T(Z,X),Y) + \widetilde{g}(X,T(Z,Y))\} = -\widetilde{g}(X,Y)df(X) + \\ + \eta(X)\eta(Y)df(Z) + f\circ\nabla_Z(\eta)(X)\eta(Y) + f\circ\eta(X)\nabla_Z(\eta)(Y). \quad (20)$$

Предложение 2. *На $lcQS$-многообразии справедливо тождество*

$$\nabla_X(\eta)(Y) = \langle CX, \Phi Y\rangle + \langle X,Y\rangle\eta(\alpha^\sharp) - \alpha(Y)\eta(X).$$

Доказательство. Применим оператор $\widetilde{\nabla}_X$ к тождеству $\Phi^2 = -\operatorname{id} + \widetilde{\eta}\otimes\widetilde{\xi}$, получим $\widetilde{\nabla}_X(\Phi)(\Phi Y) + \Phi(\widetilde{\nabla}_X(\Phi)(Y)) = \widetilde{\nabla}_X(\widetilde{\eta})Y\circ\widetilde{\xi} + \widetilde{\eta}(Y)\widetilde{\nabla}_X\widetilde{\xi}$ или с учетом (6) и (1_3)

$$\widetilde{g}(\widetilde{C}X,\Phi Y)\widetilde{\xi} - \widetilde{\eta}(\Phi Y)\widetilde{C}X - \widetilde{\eta}(Y)\widetilde{C}(\Phi X) = \widetilde{\nabla}_X(\widetilde{\eta})Y\circ\widetilde{\xi} + \widetilde{\eta}(Y)\widetilde{\nabla}_X\widetilde{\xi}.$$

Поскольку $\langle\widetilde{\nabla}_X\widetilde{\xi},\widetilde{\xi}\rangle = \frac{1}{2}X(\langle\widetilde{\xi},\widetilde{\xi}\rangle)$, имеем $\widetilde{\nabla}_X\widetilde{\xi}\in \mathrm{L}$. Таким образом, $\widetilde{\nabla}_X(\widetilde{\eta})Y = \widetilde{g}(\widetilde{C}X,\Phi Y)$ или

$$\widetilde{\nabla}_X(\widetilde{\eta})Y = e^{-\sigma}\langle CX,\Phi Y\rangle. \quad (21)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}\widetilde{\nabla}_X(\widetilde{\eta})Y &= \widetilde{\nabla}_X(\widetilde{\eta}(Y)) - \widetilde{\eta}\circ\widetilde{\nabla}_X Y = \\ &= X(e^{-\sigma}\eta(Y)) - e^{-\sigma}\eta(\nabla_X Y + T(X,Y)) = \\ &= e^{-\sigma}\{-d\sigma(X)\eta(Y) + \nabla_X(\eta(Y)) - \eta(\nabla_X Y) - \eta(T(X,Y))\} = \\ &= e^{-\sigma}\{-d\sigma(X)\eta(Y) + \nabla_X(\eta)Y - \eta(T(X,Y))\}.\end{aligned}$$

Сравнивая с (21) и учитывая, что при конформном преобразовании метрики g тензор T аффинной деформации от связности ∇ к связности $\widehat{\nabla}$ имеет вид $T(X,Y) = \langle X,Y\rangle\alpha^\sharp - \alpha(X)Y - \alpha(Y)X$, получаем

$$\nabla_X(\eta)Y = \langle CX,\Phi Y\rangle + \alpha(X)\eta(Y) + \eta(T(X,Y)) = \\ = \langle CX,\Phi Y\rangle + \alpha(X)\eta(Y) + \langle X,Y\rangle\eta(\alpha^\sharp) - \alpha(X)\eta(Y) - \alpha(Y)\eta(X).$$

Таким образом, на $lcQS$-многообразии верно тождество

$$\nabla_X(\eta)(Y) = \langle CX,\Phi Y\rangle + \langle X,Y\rangle\eta(\alpha^\sharp) - \alpha(Y)\eta(X). \quad \square$$

С учетом предложения 2 тождество (20) принимает вид

$$(1+f)\{\widetilde{g}(T(Z,X),Y) + \widetilde{g}(X,T(Z,Y))\} = -\widetilde{g}(\Phi X,\Phi Y)df(Z) + \\ + f\langle CZ,\Phi X\rangle\eta(Y) + f\langle Z,X\rangle\eta(\alpha^\sharp)\eta(Y) - f\alpha(x)\eta(Z)\eta(Y) + \\ + f\eta(X)\langle CZ,\Phi Y\rangle + f\eta(X)\langle Z,Y\rangle\eta(\alpha^\sharp) - f\eta(X)\alpha(Y)\eta(Z).$$

Дважды производя циклическую перестановку аргументов, а затем почленно складывая первые два тождества и вычитая третье, получаем

$$2(1+f)\widetilde{g}(T(Z,X),Y) = \widetilde{g}(\Phi^2 X,Y)df(Z) + \widetilde{g}(\Phi^2 Z,Y)df(X) + \\ + \widetilde{g}(\Phi X,\Phi Z)\langle\operatorname{grad}(f),Y\rangle + 2f\langle X,Z\rangle\eta(\alpha^\sharp)\widetilde{g}(\xi,Y) + 2f(1+f)\widetilde{g}(CZ,\Phi Y)\eta(X) + \\ + 2f(1+f)\widetilde{g}(CX,\Phi Y)\eta(Z) - 2f\eta(X)\eta(Z)d\sigma(Y).$$

Отсюда с учетом невырожденности метрики получаем

$$2(1+f)T(Z,X) = df(Z)\Phi^2 X + df(X)\Phi^2 Z + \widetilde{g}(\Phi X,\Phi Z)\operatorname{grad}(f) + 2f\langle X,Z\rangle\eta(\alpha^\sharp)\xi - \\ - 2f(1+f)C(\Phi Z)\eta(X) - 2f(1+f)C(\Phi X)\eta(Z) - 2f\circ\operatorname{grad}(\sigma)\eta(X)\eta(Z).$$

В частности,

$$(1+f)T(\xi,\xi) = 2f\langle\xi,\xi\rangle\eta(\alpha^\sharp)\xi - 2f\circ\operatorname{grad}(\sigma).$$

Учитывая, что $f = uv$, $u = \frac{1}{\alpha(\xi)}$, $v = \Psi(\xi)$, имеем

$$\left(1 + \frac{\Psi(\xi)}{\alpha(\xi)}\right) T(\xi, \xi) = 2\frac{\Psi(\xi)}{\alpha(\xi)}\langle\xi, \xi\rangle\alpha(\xi)\xi - 2\frac{\Psi(\xi)}{\alpha(\xi)}\alpha^\sharp,$$

$$T(\xi, \xi) = \frac{2\Psi(\xi)\xi - 2\frac{\Psi(\xi)}{\alpha(\xi)}\alpha^\sharp}{1 + \frac{\Psi(\xi)}{\alpha(\xi)}}. \tag{22}$$

При этом, поскольку переход от метрики g к метрике $\tilde{g}$ является геодезическим преобразованием, $T(X, Y) = \Psi(X)Y + \Psi(Y)X$, а значит, $T(\xi, \xi) = 2\Psi(\xi)\xi$. Сравнивая с (22), получаем

$$\frac{2\Psi(\xi)\xi - 2\frac{\Psi(\xi)}{\alpha(\xi)}\alpha^\sharp}{1 + \frac{\Psi(\xi)}{\alpha(\xi)}} = 2\Psi(\xi)\xi,$$

откуда следует, что либо $\Psi(\xi) = 0$, либо $\alpha^\sharp = -\Psi(\xi)\xi$. В первом случае в виду (11) $\Psi(X) = \Psi(\xi) = \eta(X) = 0 \quad \forall X \in \mathrm{X}(M)$, т. е. $\Psi = 0$, а значит, регулярные $lcQS$-структуры не допускают нетривиальных c-геодезических преобразований метрики. Во втором случае вектор $\alpha^\sharp$ коллинеарен вектору ξ. Как известно ([5], с. 859), это соотношение является характеристическим свойством нормальных $lcQS$-структур. Таким образом, регулярная $lcQS$-структура или не допускает нетривиальных c-геодезических преобразований метрики или, если допускает, то является нормальной. В частности, справедлива

Теорема 3. *Регулярные $lcQS$-структуры, допускающие нетривиальные c-геодезические преобразования метрики, нормальны.*

Замечание. Обратное, вообще говоря, не верно. Например, в ([1], с. 119) доказано, что структуры Кенмоцу, будучи нормальными, не допускают нетривиальных c-геодезических преобразований метрики.

Литература

1. Кириченко В.Ф., Дондукова Н.Н. *Контактно-геодезические преобразования почти контактных метрических структур* // Матем. заметки. – 2006. – Т. 80. – № 2. – С. 209–220.
2. Кириченко В.Ф. *Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях.* – М.: МПГУ, 2003. – 495 с.
3. Синюков Н.С. *Геодезические отображения римановых пространств.* – М: Наука, 1979. – 256 с.
4. Баклашова Н.С. *Некоторые свойства кривизны $lcQS$-многообразий* // Научн. тр. МПГУ. Серия: Естественные науки. Сб. статей. – М.: ГНО Изд-во "Прометей" МПГУ, 2006. – С. 25–30.
5. Кириченко В.Ф., Левковец В.А. *О геометрии L-многообразий* // Матем. заметки. – 2006. – Т. 79. – № 6. – С. 854–869.

Московский педагогический государственный университет

Поступила 29.01.2007