ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 3 (478)

УДК 514.753.3

Н.Е. МАРЮКОВА

ПОВЕРХНОСТИ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ В КВАЗИПСЕВДОРИМАНОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ И УРАВНЕНИЕ КЛЕЙНА–ГОРДОНА

1. *Введение.* Данная работа продолжает исследования автора [1]–[3], где получена геометрическая интерпретация уравнения Клейна–Гордона в галилеевом пространстве, и исследование Чжэня [4], где получена геометрическая интерпретация уравнения sh-Гордона в псевдоримановом пространстве постоянной кривизны. В [4] показано, что для угла между асимптотическими линиями на пространственно- (соответственно времени-) подобной поверхности с постоянной отрицательной (соответственно положительной) кривизной в псевдоримановом пространстве постоянной кривизны выполняется уравнение sin-Гордона

$$u_{tt} - u_{xx} = \sin u$$

(соответственно уравнение sh-Гордона $u_{tt} - u_{xx} = \operatorname{sh} u$). По-существу результат [4] относится к *псевдоевклидову* и *псевдоримановым сферическому* и *гиперболическому* пространствам ([5], с. 86), которые являются псевдоримановыми пространствами с кривизной, равной 0, $1/r^2$ и $-1/r^2$ соответственно. Последние два пространства в соответствии с терминологией, принятой в [6], естественно назвать *псевдоэллиптическим* и *псевдогиперболическим* пространствами соответственно.

В данной работе рассматривается трехмерное *квазипсевдориманово* пространство постоянной кривизны, принадлежащее более широкому классу полуримановых пространств (*semi-Riemannian* spaces) (полуримановы пространства были определены в [7]; термин "полуримановы пространства" был введен в [8]). Эти пространства являются аналогами римановых и псевдоримановых пространств, но их метрический тензор вырожден. К этому классу принадлежит также и галилеево пространство. В ([6], с. 400) полуриманово пространство, метрический тензор g_{ij} $(i, j = 1, 2, \dots, n;\ g_{ij} = g_{ji})$ которого имеет ранг $m < n$ и в нулевой $(m - n)$ плоскости $g_{ij}x^j = 0$ этого тензора определен второй невырожденный метрический тензор, называется *квазиримановым* пространством. В данной работе рассматривается частный случай квазириманова пространства, для которого тензор g_{ij} не является положительно определенным.

В п. 2 сформулирован основной результат, в пп. 3–5 проводится его доказательство.

2. *Основной результат.*

Теорема. *Пусть в трехмерном квазипсевдоримановом пространстве постоянной кривизны задана пространственно-* (*соответственно времени-*) *подобная поверхность* Σ *общего положения с постоянной отрицательной* (*соответственно положительной*) *гауссовой кривизной. Тогда*

1) *на* Σ *имеется семейство плоских линий, радиус кривизны которых удовлетворяет уравнению Клейна–Гордона*

$$u_{tt} - u_{xx} = M^2 u \quad (u = u(t, x), \quad M = \mathrm{const}), \tag{1}$$

2) *асимптотические линии поверхности* Σ *действительны и различны, угол между ними также удовлетворяет уравнению* (1),

3) *в уравнении* (1) $M = 0$ *тогда и только тогда, когда гауссова кривизна поверхности* Σ *противоположна кривизне пространства, причем последняя отлична от нуля.*

3. *Проективная интерпретация квазипсевдориманова пространства постоянной кривизны.* Пусть размерность квазипсевдориманова пространства равна трем и его кривизна постоянна. В ([6], с. 403) показано, что это пространство может быть *квазипсевдоевклидовым* пространством $\overline{R}{}^1_3$ или *квазипсевдоэллиптическим* пространством $\overline{S}{}^1_3$, или *квазипсевдогиперболическим* пространством $\overline{H}{}^1_3$. Кривизна этих пространств равна соответственно 0, $1/r^2$, $-1/r^2$. Рассмотрим проективную интерпретацию этих пространств. Другими словами, будем рассматривать эти пространства как проективное пространство P_3 с заданным в нем абсолютом. В случае пространства $\overline{R}{}^1_3$ абсолют состоит из плоскости, прямой, лежащей в этой плоскости, и пары действительных точек на этой прямой. Абсолют пространства $\overline{S}{}^1_3$ (соответственно $\overline{H}{}^1_3$) состоит из пары мнимых (соответственно действительных) пересекающихся плоскостей и пары действительных точек на линии их пересечения.

Будем рассматривать проективные реперы, адаптированные к структуре этих пространств. Пусть точка E_0 репера не принадлежит абсолюту; точка E_1 принадлежит абсолютной плоскости, но не принадлежит абсолютной прямой в случае пространства $\overline{R}{}^1_3$; в случае пространств $\overline{S}{}^1_3$ и $\overline{H}{}^1_3$ точка E_1 не принадлежит абсолюту, причем прямая E_0E_1 пересекает абсолютные плоскости в точках, гармонически разделяющих точки E_0 и E_1. Точки E_2 и E_3 во всех трех пространствах лежат на абсолютной прямой и гармонически разделяют абсолютные точки. При таком выборе реперов $g_{00} \neq 0$, $g_{IJ} = 0$ при $I \neq J$ $(I, J, K = 0, 1, 2, 3)$, $g_{33} = -g_{22}$. Будем полагать $g_{22} = \pm 1$.

Из условий выбора базисных точек E_0 и E_1 в пространстве $\overline{R}{}^1_3$ вытекает $g_{11} = 0$. Для этого пространства без ограничения общности можно положить $g_{00} = 1$.

В пространствах $\overline{S}{}^1_3$ и $\overline{H}{}^1_3$ нормируем координаты точек условием

$$g_{00}(x^0)^2 + g_{11}(x^1)^2 = \pm r^2.$$

Из этого условия и условий выбора базисных точек E_0 и E_1 получаем $g_{00} = \pm r^2$, $g_{11} = \varepsilon g_{00}$, где $\varepsilon = 1$ для пространства $\overline{S}{}^1_3$ и $\varepsilon = -1$ для пространства $\overline{H}{}^1_3$. Без нарушения общности можем полагать для этих пространств $g_{00} = r^2$, $g_{11} = \varepsilon r^2$. Тогда уравнения абсолютных плоскостей записываются в виде

$$(x^0)^2 + \varepsilon (x^1)^2 = 0,$$

где $\varepsilon = 0, 1, -1$ для пространств $\overline{R}{}^1_3$, $\overline{S}{}^1_3$ и $\overline{H}{}^1_3$ соответственно; уравнения абсолютной прямой —

$$x^0 = x^1 = 0,$$

а координаты абсолютных точек удовлетворяют уравнению

$$g_{22}(x^2)^2 + g_{33}(x^3)^2 = 0$$

на абсолютной прямой, где $g_{22}g_{33} = -1$, $g_{22} = \pm 1$. Тогда деривационные уравнения этих пространств имеют вид

$$de_a = \omega_a{}^I e_I, \quad de_\alpha = \omega_\alpha{}^\beta e_\beta, \tag{2}$$

где формы $\omega_I{}^J$ равны

$$\omega_I{}^I = 0, \quad \omega_1{}^0 = -\varepsilon \omega_0{}^1, \quad \omega_\alpha{}^0 = 0, \quad \omega_3{}^2 = -\omega_2{}^3, \tag{3}$$

а индексы пробегают значения $I, J = 0, 1, 2, 3$; $a, b = 0, 1$; $\alpha, \beta = 2, 3$; $i, j = 1, 2, 3$. Уравнения структуры этих пространств получаются из уравнений структуры проективного пространства P_3 с учетом (3). Они имеют вид

$$D\omega_0{}^1 = D\omega_2{}^3 = 0, \quad D\omega_0{}^\alpha = \omega_0{}^i \wedge \omega_i{}^\alpha, \quad D\omega_1{}^\alpha = -\varepsilon \omega_0{}^1 \wedge \omega_0{}^\alpha + \omega_1{}^\beta \wedge \omega_\beta{}^\alpha, \tag{4}$$

где D — символ внешнего дифференцирования.

4. *Поверхности общего положения в квазипсевдоримановом пространстве постоянной кривизны.* Будем рассматривать поверхность, каждая касательная плоскость которой пересекает абсолютную прямую в точке. Будем предполагать также, что эта точка не является абсолютной. Такую поверхность будем называть *поверхностью общего положения.* Для нее в каждой точке однозначно определяется *нормаль* — прямая, проходящая через точку, четвертую гармоническую к абсолютным точкам и точке пересечения касательной плоскости к поверхности в заданной точке с абсолютной прямой.

Семейство плоскостей, содержащих абсолютную прямую, высекает из поверхности общего положения семейство линий, которые будем называть *специальными линиями* поверхности. Будем предполагать, что эти линии не являются прямыми.

Присоединим к поверхности подвижной репер так, чтобы точка E_0 совпадала с точкой поверхности, точки E_1 и E_2 лежали в касательной плоскости поверхности в этой точке, причем прямая E_0E_2 касалась бы специальной линии поверхности в точке E_0. Тогда из первой формулы (2) при $a = 0$ получаем $de_0 = {\omega_0}^1 e_1 + {\omega_0}^2 e_2$, т. е. на поверхности

$$ {\omega_0}^3 = 0, \tag{5}$$

а специальные линии на поверхности имеют уравнение ${\omega_0}^1$. Обозначим

$$ {\omega_0}^i = \omega^i. \tag{6}$$

В этих обозначениях специальные линии на поверхности имеют уравнение $\omega^1 = 0$.

Прямая E_0E_3 является нормалью поверхности в точке E_0 в смысле приведенного выше определения. Заметим, что нормали поверхности вдоль каждой специальной линии лежат в плоскости этой линии, поэтому специальные линии образуют одно семейство линий кривизны поверхности. Второе семейство линий кривизны поверхности образуют линии, вдоль которых нормали к поверхности образуют конусы с вершинами на абсолютной прямой. Из формул (2) и (3) имеем $de_3 = -{\omega_2}^3 e_2$, поэтому линии кривизны второго семейства на поверхности имеют уравнения ${\omega_2}^3 = 0$.

В соответствии с общей теорией квазиримановых пространств ([6], с. 405) расстояние s между точками $X(x^0, x^1, x^2, x^3)$ и $Y(y^0, y^1, y^2, y^3)$ пространств $\overline{S}{}^1_3$ ($\overline{H}{}^1_3$) в случае, когда прямая XY не пересекает абсолютную прямую, вычисляется по формуле

$$ \cos^2 \frac{s}{r} = \frac{(g_{00}x^0y^0 + g_{11}x^1y^1)^2}{(g_{00}(x^0)^2 + g_{11}(x^1)^2)(g_{00}(y^0)^2 + g_{11}(y^1)^2)}. $$

Положив в этой формуле $X = E_0$, $Y = E_0 + dE_0$, где $dE_0 = \omega^1 E_1 + \omega^2 E_2$, получаем, что для всех направлений на поверхности, кроме специальных, первая квадратичная форма поверхности равна

$$ I = (dE_0)^2 = g_{11}(\omega^1)^2 = \varepsilon r^2 (\omega^1)^2, \tag{a}$$

$$ I = (\omega^1)^2. \tag{b}$$

Здесь и всюду в дальнейшем формулы (a) относятся к пространствам $\overline{S}{}^1_3$ и $\overline{H}{}^1_3$, причем ε=1 для пространства $\overline{S}{}^1_3$ и $\varepsilon = -1$ для пространства $\overline{H}{}^1_3$, формулы (b) — к пространству $\overline{R}{}^1_3$. Для специальных направлений на поверхности во всех трех пространствах вводится первая квадратичная форма

$$ I_1 = g_{22}(\omega^2)^2. $$

Будем называть поверхность в пространствах $\overline{S}{}^1_3$ и $\overline{H}{}^1_3$ (соответственно в пространстве $\overline{R}{}^1_3$) *пространственноподобной*, если $g_{22} = \varepsilon$ (соответственно $g_{22} = 1$). В случае, если $g_{22} = -\varepsilon$ (соответственно $g_{22} = -1$), будем называть поверхность *временниподобной.*

Дифференцируя (5) с учетом (3) и (6) и применяя лемму Картана, получаем

$$\omega_1{}^3 = a\omega^1 + b\omega^2, \quad \omega_2{}^3 = b\omega^1 + c\omega^2. \tag{7}$$

Для второй квадратичной формы имеем выражение

$$II = (d^2E_0, E_3) = g_{33}(\omega^1\omega_1{}^3 + \omega^2\omega_2{}^3) = g_{33}[a(\omega^1)^2 + 2b\omega^1\omega^2 + c(\omega^2)^2].$$

Примем линии кривизны $\omega^1 = 0$ и $\omega_2{}^3 = 0$ поверхности за координатные линии, тогда в формулах (7)

$$b = 0. \tag{8}$$

Из первых двух формул (4) вытекает, что мы можем ввести на поверхности локальные координаты u, v, полагая

$$\omega^1 = du, \quad \omega_2{}^3 = dv. \tag{9}$$

Координатные линии $u = \mathrm{const}$ и $v = \mathrm{const}$ этой системы являются линиями кривизны поверхности.

Главные кривизны поверхности равны

$$k_1 = \frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}_1} = -c \tag{10}$$

для специальных линий $\omega^1 = 0$ ($u = \mathrm{const}$),

$$k_2 = \varepsilon g_{33}a/r^2 \ \ (\mathrm{a}), \quad k_2 = g_{33}a \ \ (\mathrm{b})$$

для линий $\omega_2{}^3 = 0$ ($v = \mathrm{const}$). Поэтому гауссова кривизна поверхности равна

$$K = k_1k_2 = -\varepsilon g_{33}ac/r^2 = \varepsilon g_{22}ac/r^2 \ \ (\mathrm{a}), \quad K = -g_{33}ac = g_{22}ac \ \ (\mathrm{b}). \tag{11}$$

Обозначим через

$$\gamma = 1/k_1 \tag{12}$$

радиус кривизны специальных линий. Тогда в силу (7)–(9) и (12) получаем

$$\omega^2 = -\gamma dv. \tag{13}$$

Запишем уравнения (4) для поверхности, подставляя в них значения форм $\omega_I{}^J$ из соотношений (5)–(13) и учитывая то, что форма $\omega_1{}^2$ тоже является главной формой. Тогда уравнения (4) сводятся к одному уравнению

$$-a_{vv} + \gamma_{uu} = -\varepsilon(1 + g_{22}r^2K)\gamma \ \ (\mathrm{a}), \quad -a_{vv} + \gamma_{uu} = a \ \ (\mathrm{b}). \tag{14}$$

5. Доказательство теоремы. Будем полагать гауссову кривизну (11) поверхности постоянной, т. е.

$$K = \delta m^2, \quad m = \mathrm{const} \neq 0, \quad \delta = \pm 1. \tag{15}$$

Сравнивая выражения (11) и (15) с учетом обозначений (10) и (12), находим

$$a = -\delta\varepsilon g_{22}m^2r^2\gamma \ \ (\mathrm{a}), \quad a = -\delta g_{22}m^2\gamma \ \ (\mathrm{b}). \tag{16}$$

Подставив значения (16) в (14), получим

$$\begin{aligned} \delta\varepsilon g_{22}m^2r^2\gamma_{vv} + \gamma_{uu} &= -\varepsilon(1 + g_{22}\delta r^2m^2)\gamma, \ \ (\mathrm{a}) \\ \delta g_{22}m^2\gamma_{vv} + \gamma_{uu} &= -\delta g_{22}m^2\gamma. \ \ (\mathrm{b}) \end{aligned} \tag{17}$$

Для доказательства первого утверждения теоремы покажем, что формулы (17) при указанных в теореме условиях принимают вид (1), где в роли функции u выступает функция γ

— радиус кривизны специальных линий поверхности. Из п. 3 вытекает, что для g_{22} возможны только два значения: 1 или -1. Рассмотрим оба этих случая.

1) Пусть $g_{22} = 1$. Тогда уравнение (17(a)) сводится к виду (1) при $\varepsilon = 1$, $\delta = -1$, что соответствует пространственноподобной поверхности (т. к. $g_{22} = \varepsilon$) с постоянной отрицательной гауссовой кривизной (15) в пространстве $\overset{1}{\overline{S}}_3$, и при $\varepsilon = -1$, $\delta = 1$, что соответствует случаю времениподобной поверхности (т. к. $g_{22} = -\varepsilon$) с постоянной положительной гауссовой кривизной (15) в пространстве $\overset{1}{\overline{H}}_3$. Сравнивая правые части уравнений (17(a)) и (1), находим, что коэффициент M^2 в уравнении (1) равен

$$M^2 = -\varepsilon + r^2 m^2. \tag{18}$$

Уравнение (17(b)) при указанном условии $g_{22} = 1$ сводится к виду (1) при $\delta = -1$, что соответствует случаю поверхности постоянной отрицательной кривизны (15) в квазипсевдоевклидовом пространстве $\overset{1}{\overline{R}}_3$. Сравнивая правые части уравнений (17(b)) и (1), находим, что коэффициент M^2 в уравнении (1) равен

$$M^2 = m^2. \tag{19}$$

2) Пусть $g_{22} = -1$. Тогда уравнение (17(a)) сводится к виду (1) при $\varepsilon = \delta = \pm 1$, что соответствует случаю времениподобной поверхности при $\varepsilon = 1$ с постоянной положительной кривизной (15) в пространстве $\overset{1}{\overline{S}}_3$ и случаю пространственноподобной поверхности при $\varepsilon = -1$ с постоянной отрицательной кривизной (15) в пространстве $\overset{1}{\overline{H}}_3$. Сравнивая правые части уравнений (17(a)) и (1) в этом случае, получаем для коэффициента M^2 те же значения (18), что и в случае 1).

Уравнение (17(b)) в рассматриваемом случае сводится к виду (1) при $\delta = 1$, что соответствует времениподобной поверхности с постоянной положительной кривизной (15) в квазипсевдоевклидовом пространстве $\overset{1}{\overline{R}}_3$, причем для коэффициента M^2 выполняется равенство (19). Эти два случая доказывают первое утверждение теоремы.

Для доказательства второго утверждения теоремы из выражения для второй квадратичной формы и условия (8) находим дифференциальные уравнения асимптотических линий в виде

$$a(\omega^1)^2 + c(\omega^2)^2 = 0,$$

откуда с учетом (16), (10), (11), (12) и (15) получаем уравнения

$$-\delta\varepsilon g_{22} m^2 r^2 \gamma^2 (\omega^1)^2 - (\omega^2)^2 = 0 \ \ \text{(a)}, \quad -\delta g_{22} m^2 \gamma^2 (\omega^1)^2 - (\omega^2)^2 = 0 \ \ \text{(b)} \tag{20}$$

для нахождения асимптотических линий. Снова необходимо рассмотреть два случая: $g_{22} = 1$ и $g_{22} = -1$. В первом случае при доказательстве первого утверждения теоремы было получено, что для рассматриваемых поверхностей $\varepsilon\delta = -1$, поэтому уравнение (20(a)) принимает вид

$$r^2 m^2 \gamma^2 (\omega^1)^2 - (\omega^2)^2 = 0. \tag{21}$$

Из уравнения (21) следует, что асимптотические линии на рассматриваемых поверхностях действительны, различны и имеют направления $\omega^2 : \omega^1 = \pm m r \gamma$, откуда вытекает, что угол между этими линиями равен

$$\varphi = 2 m r \gamma, \quad m = \mathrm{const} \neq 0. \tag{22}$$

Так как функция γ удовлетворяет уравнению (1), то и угол (22) между асимптотическими линиями удовлетворяет этому уравнению.

При доказательстве первого утверждения теоремы было получено, что $\delta = -1$, поэтому уравнение (20(b)) в этом случае имеет вид

$$m^2 \gamma^2 (\omega^1)^2 - (\omega^2)^2 = 0. \tag{23}$$

Из последнего следует, что асимптотические линии действительны, различны и имеют направления $\omega^2 : \omega^1 = \pm m\gamma$, поэтому угол φ между асимптотическими линиями поверхности равен

$$\varphi = 2m\gamma, \tag{24}$$

следовательно, этот угол также удовлетворяет уравнению (1).

В случае $g_{22} = -1$ при доказательстве первого утверждения теоремы показано, что выполняется условие $\varepsilon = \delta = \pm 1$. При этом условии уравнение (20(a)) имеет вид (21), откуда следует, что угол (22) между асимптотическими линиями этих поверхностей также удовлетворяет уравнению (1). Уравнение (20(b)) принимает вид (23), т. к. в этом случае $\delta = 1$. Отсюда следует, что угол между асимптотическими линиями поверхности вычисляется по формуле (24) и для него также выполняется уравнение (1).

Доказательство третьего утверждения теоремы основано на формулах (18) и (19). Формула (19) показывает, что $M \neq 0$, т. к. $m \neq 0$. Следовательно, имеется единственная возможность равенства $M = 0$, если в формуле (18) положить $m^2 = \varepsilon/r^2$. Это условие означает, что гауссова кривизна поверхности, равная $-\varepsilon m^2$, противоположна кривизне пространства, равной ε/r^2 ($\varepsilon = \pm 1$).

Литература

1. Розенфельд Б.А., Марюкова Н.Е. *Геометрическая интерпретация уравнения Клейна–Гордона.* – Ред. журн. “Изв. вузов. Математика”. – Казань, 1989. – 11 с. – Деп. в ВИНИТИ 07.02.89, № 801-В89.
2. Марюкова Н.Е. *Поверхности постоянной отрицательной кривизны в галилеевом пространстве и уравнение Клейна–Гордона* // УМН. – 1995. – Т. 50. – Вып. 1. – С. 203–204.
3. Марюкова Н.Е. *Поверхности постоянной отрицательной кривизны в галилеевом пространстве* // Изв. вузов. Математика. – 1996. – № 9. – С. 33–36.
4. Chern S.S. *Geometrical interpretation of Sinh-Gordon equation* // Selected Papers, V. 1–4. – Springer-Verlag, Berlin–New York, 1987–1989. – V. 4. – P. 63–69.
5. Вольф Дж. *Пространства постоянной кривизны.* – М.: Наука, 1982. – 480 с.
6. Розенфельд Б.А. *Неевклидовы пространства.* – М.: Наука, 1969. – 547 с.
7. Парнасский И.В. *О вырожденных римановых геометриях* // Тр. II научн. конф. матем. кафедр пед. ин-тов Поволжья. Вып. 1. – Куйбышев, 1962. – С. 176–181.
8. Розенфельд Б.А., Карпова Л.М. *Симметрические полуримановы пространства* // Изв. вузов. Математика. – 1964. - № 1. – С. 100–116.

Брянский государственный
педагогический университет

Поступили
первый вариант 20.07.1998
окончательный вариант 25.07.2000