ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 4 (467)

УДК 512.579

А.Г. ПИНУС

ОБ ОПРЕДЕЛИМОСТИ КОНЕЧНЫХ АЛГЕБР ПРОИЗВОДНЫМИ СТРУКТУРАМИ

К классическим вопросам универсальной алгебры, а также теорий конкретных классов алгебр: групп, решеток, колец и т. д., относится вопрос об определимости алгебр данного класса с помощью тех или иных производных структур (решетки подалгебр, группы автоморфизмов, полугруппы эндоморфизмов и т. д.). Пусть для универсальной алгебры $\mathcal{A}$ через $\mathcal{A}'$ обозначена некоторая производная от $\mathcal{A}$ алгебраическая система (к примеру, $\mathcal{A}' = \operatorname{Sub}\mathcal{A}$ — решетка подалгебр алгебры $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}' = \operatorname{Aut}\mathcal{A}$ — группа автоморфизмов алгебры $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}' = \operatorname{End}\mathcal{A}$ — полугруппа эндоморфизмов алгебры $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}' = \operatorname{Iso}\mathcal{A}$ — полугруппа внутренних изоморфизмов алгебры $\mathcal{A}$). Тогда указанный вопрос формулируется следующим образом: верно ли, что для данного класса K универсальных алгебр из изоморфизма алгебраических систем $\mathcal{A}'_1$ и $\mathcal{A}'_2$ ($\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ — произвольные K-алгебры) вытекает изоморфизм (или иная форма близости) самих K-алгебр $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$.

В качестве примера конкретизации подобной проблемы укажем лишь на проблему 1.4 из [1]: найти условия, при которых решетка $\operatorname{Sub}\mathcal{A}$ всех подрешеток определяет решетку $\mathcal{A}$ с точностью до изоморфизма (правильнее, конечно, — с точностью до двойственности, т. е. для каких решеток $\mathcal{A}$ из $\operatorname{Sub}\mathcal{A} \cong \operatorname{Sub}\mathcal{A}_1$ следует $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}_1$ или $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}_1^*$, где $\mathcal{A}_1$ — произвольная решетка, а $\mathcal{A}_1^*$ — решетка, двойственная решетке $\mathcal{A}_1$). Данная работа предлагает некоторый подход к этой проблематике с позиций результатов, полученных автором для введенных им понятий условного терма и условной рациональной эквивалентности алгебр.

Напомним некоторые определения и результаты. Под *условием сигнатуры* σ понимаем конечную систему

$$\mathcal{T}(\overline{x}) = \begin{cases} t_1^1(\overline{x}) =^{i_1} t_2^1(\overline{x}), \\ \dots\dots\dots\dots \\ t_1^n(\overline{x}) =^{i_n} t_2^n(\overline{x}) \end{cases}$$

равенств и неравенств между термами $t_j^i(\overline{x})$ сигнатуры σ. Здесь $i_j \in \{0,1\}$ и $=^0$ есть $\neq$, а $=^1$ означает $=$.

Под *полной системой условий сигнатуры* σ будем понимать конечное множество $\{\mathcal{T}_1(\overline{x}), \dots, \mathcal{T}_k(\overline{x})\}$ условий сигнатуры σ такое, что формула $\bigvee\limits_{i=1}^{k} \mathcal{T}_i(\overline{x})$ общезначима, а для $j \neq l$ формулы $\{\mathcal{T}_j(\overline{x}) \& \mathcal{T}_l(\overline{x})\}$ невыполнимы. Понятие *условного терма сигнатуры* σ определяется индукцией: любая переменная является условным термом; если $t_1(\overline{x}), \dots, t_n(\overline{x})$ — условные термы и f — n-местный функциональный символ из σ, то $f(t_1(\overline{x}), \dots, t_n(\overline{x}))$ — также условный терм сигнатуры σ; если $t_1(\overline{x}), \dots, t_n(\overline{x})$ — условные термы и $\{\mathcal{T}_1(\overline{x}), \dots, \mathcal{T}_n(\overline{x})\}$ — полная система условий сигнатуры σ, то

$$t(\overline{x}) = \begin{cases} \mathcal{T}_1(\overline{x}) \to t_1(\overline{x}), \\ \dots\dots\dots\dots \\ \mathcal{T}_n(\overline{x}) \to t_n(\overline{x}) \end{cases} \tag{1}$$

— также условный терм сигнатуры σ; любой условный терм получается за конечное число шагов согласно приведенным правилам. Для любой универсальной алгебры $\mathcal{A}$ сигнатуры σ любой условный терм $t(\overline{x})$ этой сигнатуры определяет на $\mathcal{A}$ *условно термальную функцию.* Определение при этом естественным образом соответствует индуктивному определению условного терма. Заметим лишь, что если условный терм $t(\overline{x})$ определяется согласно правилу (1), то для любых $\overline{a}, b \in \mathcal{A} \models t(\overline{a}) = b$ тогда и только тогда, когда для некоторого $i \leq n$ $\mathcal{A} \models \mathcal{T}_i(\overline{a})$ и $t_i(\overline{a}) = b$. Для любого класса K универсальных алгебр сигнатуры $\sigma = \langle f_1^{n_1}, \ldots, f_k^{n_k}, \ldots\rangle$ и любой последовательности $\overline{t} = \langle t_1(\overline{x}_1), \ldots, t_k(\overline{x}_k), \ldots\rangle$ условных термов сигнатуры σ таких, что $t_i(\overline{x}_i)$ зависит от переменных $x_1, \ldots, x_{n_k}$, для любой K-алгебры $\mathcal{A} = \langle A; \sigma\rangle$ через $\mathcal{A}^{\overline{t}}$ обозначим алгебру $\mathcal{A} = \langle A; t_1, \ldots, t_k, \ldots\rangle$, где функции f_i сигнатуры σ алгебры $\mathcal{A}^{\overline{t}}$ определяются как соответствующие условно-термальные функции t_i алгебры $\mathcal{A}$.

Пусть π — некоторое взаимно однозначное отображение основного множества алгебры $\mathcal{A} = \langle A; \sigma_1\rangle$ на множество B. Через $\pi(\mathcal{A})$ обозначим алгебру $\langle B; \sigma_1\rangle$, где сигнатурные функции на B индуцируются сигнатурными функциями алгебры $\mathcal{A}$ и отображением π. Согласно [2] две универсальные алгебры $\mathcal{A} = \langle A; \sigma_1\rangle$ и $\mathcal{B} = \langle B; \sigma_2\rangle$ называются *условно рационально эквивалентными*, если существует взаимно однозначное отображение π множества A на B и последовательности условных термов $\overline{t}^1$ ($\overline{t}^2$) сигнатуры σ_1 (σ_2), соответствующие (по арности) сигнатуре σ_2 (σ_1) и такие, что $(\pi(\mathcal{A}))^{\overline{t}^1} = \mathcal{B}$ и $((\pi(\mathcal{A}))^{\overline{t}^1})^{\overline{t}^2} = \pi(\mathcal{A})$.

Напомним понятия *матричной степени* $\mathcal{A}^{[n]}$ (при $n \in \omega$) универсальной алгебры и η-редукта $\mathcal{A}(\eta)$ алгебры $\mathcal{A}$, где $\eta(x)$ — идемпотентный терм, т. е. некоторый терм, удовлетворяющий на $\mathcal{A}$ тождеству $\eta(\eta(x)) = \eta(x)$ (более подробно об этих понятиях см., напр., в [3], [4]). Алгебра $\mathcal{A}^{[n]}$ получается из декартовой степени $\mathcal{A}^n$ алгебры $\mathcal{A}$ обогащением путем введения в сигнатуру двух дополнительных операций d (n-местной) и p (1-местной), определенных следующим образом:

$$d(\overline{x}^0, \ldots, \overline{x}^{n-1}) = \langle x_0^0, x_1^1, \ldots, x_{n-1}^{n-1}\rangle,$$
$$\text{где } \overline{x}^i = \langle x_0^i, \ldots, x_{n-1}^i\rangle, \text{ и } p(\langle x_0, \ldots, x_{n-1}\rangle) = \langle x_1, \ldots, x_{n-1}, x_0\rangle.$$

Основным множеством алгебры $\mathcal{A}(\eta)$ является множество $\{a \in A \mid \eta(a) = a\}$, а значения сигнатурных функций $f(x_1, \ldots, x_n)$ для алгебры $\mathcal{A}(\eta)$ определены как термальные функции $\eta(f(x_1, \ldots, x_n))$ алгебры $\mathcal{A}$. Понятие обратимого терма $\eta(x)$ дано в [3], [4]. Понятие схожести универсальных алгебр введено в [2]: алгебры $\mathcal{A} = \langle A; \sigma_1\rangle$ и $\mathcal{B} = \langle B; \sigma_2\rangle$ называются *схожими*, если существует $n \in w$ и обратимый терм $\eta(x)$ сигнатуры матричной степени алгебры $\mathcal{A}^{[n]}$ такой, что $\mathcal{A}^{[n]} \models \eta(\eta(x)) = \eta(x)$ и при этом алгебры $\mathcal{A}^{[n]}(\eta)$ и $\mathcal{B}$ условно рационально эквивалентны. В [2] доказана

Теорема А. *Для конечных универсальных алгебр $\mathcal{A} = \langle A; \sigma_1\rangle$ и $\mathcal{B} = \langle B; \sigma_2\rangle$ следующие условия эквивалентны*:

1) *$\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ схожи,*
2) *полугруппы $\operatorname{Iso}\mathcal{A}$ и $\operatorname{Iso}\mathcal{B}$ изоморфны, и при этом изоморфизме идемпотенты, соответствующие одноэлементным подалгебрам алгебры $\mathcal{A}$, переходят в подобные идемпотенты полугруппы $\operatorname{Iso}\mathcal{B}$.*

Рассматривая $\operatorname{Iso}\mathcal{A}$, $\operatorname{Sub}\mathcal{A}$, $\operatorname{Aut}\mathcal{A}$ как производные алгебраические системы от универсальных алгебр $\mathcal{A}$, заметим, что $\operatorname{Iso}\mathcal{A}$ является более сильной производной, чем $\operatorname{Sub}\mathcal{A}$ и $\operatorname{Aut}\mathcal{A}$. Действительно, решетка $\operatorname{Sub}\mathcal{A}$ стандартным образом определяется как частично упорядоченная совокупность идемпотентов инверсной полугруппы $\operatorname{Iso}\mathcal{A}$, а группа $\operatorname{Aut}\mathcal{A}$ — подгруппа элементов полугруппы $\operatorname{Iso}\mathcal{A}$ обратимых в $\operatorname{Iso}\mathcal{A}$ до наибольшего идемпотента полугруппы $\operatorname{Iso}\mathcal{A}$. Таким образом, для любых алгебр $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ из $\operatorname{Iso}\mathcal{A}_1 \cong \operatorname{Iso}\mathcal{A}_2$ вытекают изоморфизмы $\operatorname{Sub}\mathcal{A}_1 \cong \operatorname{Sub}\mathcal{A}_2$ и $\operatorname{Aut}\mathcal{A}_1 \cong \operatorname{Aut}\mathcal{A}_2$.

Нетрудно заметить, что для идемпотентных алгебр, алгебраическая структура которых однозначно определяется отношением порядка на основном множестве алгебры, а сам этот порядок также однозначно определим через сигнатурные функции алгебры (к примеру: решетки, полурешетки), изоморфизм полугрупп $\operatorname{Iso}\mathcal{A}_1$ и $\operatorname{Iso}\mathcal{A}_2$ подобных алгебр влечет наличие существенной связи между алгебрами $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$. В частности, для любых решеток (полурешеток) $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ из изоморфизма полугрупп $\operatorname{Iso}\mathcal{A}_1$, $\operatorname{Iso}\mathcal{A}_2$ вытекает либо изоморфизм $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$, либо изоморфизм $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2^*$. Таким образом, приведенный выше вопрос Г. Гретцера может быть переформулирован так: охарактеризовать решетки L такие, что для любой решетки L_1 из изоморфизма $\operatorname{Sub} L_1 \cong \operatorname{Sub} L$ вытекает изоморфизм $\operatorname{Iso} L_1 \cong \operatorname{Iso} L$. Представляет интерес вопрос, насколько необходимой для подобного результата является взаимосвязь между алгебраической структурой алгебры и некоторым отношением порядка. Приведенные далее результаты демонстрируют, что такой необходимости не существует.

Для любого класса K универсальных алгебр через K_{fin} обозначим класс конечных K-алгебр. Пусть сигнатура σ класса K конечна: $\sigma = \langle f_1^{n_1}, \dots, f_m^{n_m}\rangle$. Для произвольного кортежа $\overline{t} = \langle t_1(\overline{x}_1), \dots, t_m(\overline{x}_m)\rangle$ термов сигнатуры σ таких, что $t_i(x_i)$ зависит от переменных $x_1, \dots, x_{n_i}$, алгебру $\mathcal{A}^{\overline{t}}$ назовем $\overline{t}$-сопряженной к алгебре $\mathcal{A}$.

Пусть $\mathcal{A}'$ — некоторая (вполне определенная) производная алгебраическая система, соответствующая K-алгебре $\mathcal{A}$. Будем говорить, что *производная $'$ определяет K-алгебру $\mathcal{A}$ в классе K с точностью до финитарного сопряжения*, если существует конечное число кортежей $\overline{t}^1, \dots, \overline{t}^p$ термов сигнатуры σ такое, что для любой алгебры $\mathcal{A}_1 \in K$ изоморфизм систем $\mathcal{A}' \cong \mathcal{A}_1'$ влечет существование одного из следующих изоморфизмов: $\mathcal{A}_1 \cong \mathcal{A}^{\overline{t^1}}, \mathcal{A}_1 \cong \mathcal{A}^{\overline{t^2}}, \dots, \mathcal{A}_1 \cong \mathcal{A}^{\overline{t^p}}$. Будем говорить также в этом случае, что *производная $'$ определяет K-алгебру $\mathcal{A}$ в классе K с точностью до сопряженностей $\overline{t}^1, \dots, \overline{t}^p$*. Скажем, что *производная $'$ определяет K-алгебру $\mathcal{A}$ в классе K с точностью до изоморфизма*, если для любой K-алгебры $\mathcal{A}_1$ изоморфизм систем $\mathcal{A}' \cong \mathcal{A}_1'$ влечет изоморфизм алгебр $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}_1$.

Таким образом, определимость алгебр класса K производной $'$ с точностью до финитарной сопряженности является обобщением понятия определимости алгебр класса K производной $'$ с точностью до изоморфизма. В качестве примера понятия определимости с точностью до финитарной сопряженности укажем стандартную ситуацию об определимости решеток с точностью до двойственных: *производная $'$ определяет решетки класса K с точностью до двойственных*, если для любых решеток $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \in K$ изоморфизм систем $\mathcal{A}_1' \cong \mathcal{A}_2'$ влечет существование одного из изоморфизмов $\mathcal{A}_1 \cong \mathcal{A}_2$ или $\mathcal{A}_1 \cong \mathcal{A}_2^*$ ($\mathcal{A}_2^*$ — решетка, двойственная решетке $\mathcal{A}_2$).

Напомним, что алгебра $\mathcal{A}$ называется *идемпотентной*, если для любой ее сигнатурной функции $f(x_1, \dots, x_n)$ имеет место

$$\mathcal{A} \vDash \forall x(f(x, \dots, x) = x).$$

Напомним также, что подкласс K_1 класса K универсальных алгебр называется *аксиоматизируемым* (*конечно аксиоматизируемым*) *внутри класса K*, если существует совокупность (конечная совокупность) T формул узкого исчисления предикатов такая, что $K_1 = \{\mathcal{A} \in K \mid \mathcal{A} \vDash T\}$.

Для произвольного класса алгебр K рассмотрим следующее условие на K_{fin}-алгебры:

в любой нетривиальной K_{fin}-алгебре $\mathcal{A}$ найдется элемент $a \in A$ такой, что для любого $b \in \mathcal{A}$ подалгебра $\langle a, b\rangle$ алгебры $\mathcal{A}$, порожденная множеством $\{a, b\}$, не более чем двуэлементна. (2)

К примеру, для любого класса решеток K в качестве элемента a может быть выбрана единица конечной решетки $\mathcal{A}$.

Теорема 1. *Пусть K — некоторый конечно аксиоматизируемый класс идемпотентных универсальных алгебр конечной сигнатуры σ, удовлетворяющий условию* (2). *Пусть $\overline{t}^1, \dots, \overline{t}^p$ — некоторая совокупность кортежей термов сигнатуры σ. Тогда класс конечных K-алгебр, определимых в K производной* Iso *с точностью до сопряженностей $\overline{t}^1, \dots, \overline{t}^p$, аксиоматизируем внутри класса K_{fin}.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что определимость K_{fin}-алгебры в K производной Iso с точностью до сопряженностей $\overline{t}^1,\ldots,\overline{t}^p$ эквивалентна определимости алгебры $\mathcal{A}$ производной Iso с точностью до сопряженностей $\overline{t}^1,\ldots,\overline{t}^p$ в классе K_{fin}. Действительно, в силу идемпотентности K-алгебр следующие условия на K-алгебру эквивалентны:

$$|\mathcal{A}| < \aleph_0, \quad |\operatorname{Sub}\mathcal{A}| < \aleph_0, \quad |\operatorname{Iso}\mathcal{A}| < \aleph_0.$$

Пусть T — конечная система аксиом класса K. Для любой формулы Φ сигнатуры $\sigma = \langle f_1^{n_1},\ldots,f_m^{n_m}\rangle$ и любого кортежа условных термов этой сигнатуры $\overline{g} = \langle g_1(\overline{x}_1),\ldots,g_m(\overline{x}_m)\rangle$ ($g_i(\overline{x}_i)$ — условный терм от переменных $x_1,\ldots,x_{n_i}$) через $\Phi^{\overline{g}}$ обозначим формулу сигнатуры σ, получаемую из Φ подстановкой вместо сигнатурных функций f_i условных термов g_i. Пусть $T^{\overline{g}} = \{\Phi^{\overline{g}} \mid \Phi \in T\}$. Через $A_{\overline{t}^1,\ldots,\overline{t}^p}$ обозначим следующее множество формул сигнатуры σ:

$$\Big\{R(\overline{g},\overline{g}') = T\&T^{\overline{g}}\&(\&_{i=1}^m\forall\overline{x}_i(f(\overline{x}_i) = g_i'^{\overline{g}})) \Rightarrow \forall\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_m$$

$$\bigvee_{j=1}^p(g_1(\overline{x}_1) = t_1^j(\overline{x}_1)\&\ldots\&g_m(\overline{x}_m) = t_m^j(\overline{x}_m))\,\Big|\,\overline{g} = \langle g_1,\ldots,g_m\rangle \text{ и } g' = \langle g_1',\ldots,g_m'\rangle$$

$$\text{независимо пробегают все множество кортежей длины } m$$

$$\text{условных термов сигнатуры } \sigma \text{ от соответствующих переменных}\Big\},$$

где $g_i'^{\overline{g}}$ — результат подстановки в условный терм g_i' вместо сигнатурной функции f_j условного терма g_j $(1 \le j \le m)$.

Покажем теперь, что произвольная K_{fin}-алгебра $\mathcal{A}$ определяется производной Iso в классе K_{fin} с точностью до сопряженностей $\overline{t}^1,\ldots,\overline{t}^p$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{A} \vDash A_{\overline{t}^1,\ldots,\overline{t}^p}$. Пусть $\mathcal{A},\mathcal{A}_1 \in K_{\mathrm{fin}}$ и $\operatorname{Iso}\mathcal{A} \cong \operatorname{Iso}\mathcal{A}_1$. По теореме А найдутся натуральное число n, идемпотентный терм $\eta(x)$ сигнатуры матричной степени $\mathcal{A}^{[n]}$ такие, что алгебры $\mathcal{A}^{[n]}(\eta)$ и $\mathcal{A}_1$ условно рационально эквивалентны. Так как $\eta(x)$ — идемпотентный терм (т. е. удовлетворяет тождеству $\eta(\eta(x)) = \eta(x)$ на алгебре $\mathcal{A}^{[n]}$), то, очевидно, существует запись терма $\eta(x)$ в сигнатуре алгебры $\mathcal{A}^{[n]}$, не включающая в себя функцию $p(x)$. Но тогда в силу идемпотентности алгебры $\mathcal{A}$ на $\mathcal{A}^{[n]}$ истинно тождество $\eta(x) = x$, т. е. $\mathcal{A}^{[n]}(\eta) \cong \mathcal{A}^{[n]}$. С другой стороны, для любых $\langle a,\ldots,a\rangle, \langle b,\ldots,b\rangle \in \mathcal{A}^{[n]}$ мощность подалгебр алгебры $\mathcal{A}^{[n]}$, порожденной элементами $\langle a,\ldots,a\rangle$, $\langle b,\ldots,b\rangle$, не меньше чем 2^n, если $a \ne b$. Таким образом, условие (2), имеющее место для K_{fin}, влечет равенство $n = 1$. Итак, изоморфизм $\operatorname{Iso}\mathcal{A} \cong \operatorname{Iso}\mathcal{A}_1$ влечет условно рациональную эквивалентность алгебр $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}_1$. Совокупность же $A_{\overline{t}^1,\ldots,\overline{t}^p}$ формул выделяет в классе K те алгебры $\mathcal{A}$, для которых условно рациональная эквивалентность с какой-либо K-алгеброй $\mathcal{A}_1$ влечет изоморфизм $\mathcal{A}_1$ одной из алгебр $\mathcal{A}^{\overline{t}^1},\ldots,\mathcal{A}^{\overline{t}^p}$. $\square$

Пусть $\mathcal{M}(K)$ — многообразие, порожденное классом K.

Следствие 1. Пусть K — некоторый конечно аксиоматизируемый класс идемпотентных алгебр конечной сигнатуры σ, удовлетворяющих условию (2). Пусть $\overline{t}^1,\ldots,\overline{t}^p$ — некоторая совокупность кортежей термов сигнатуры σ. Пусть n — максимальная арность функций из σ и $\mathcal{M}(K)$-свободная n-порожденная алгебра конечна. Тогда класс конечных K-алгебр, определенных производной Iso с точностью до сопряженностей $\overline{t}^1,\ldots,\overline{t}^p$, конечно аксиоматизируем внутри класса K_{fin}.

Утверждение следствия непосредственно вытекает из утверждения теоремы 1, т. к. в силу условий следствия число не эквивалентных над K условных термов от переменных $x_1,\ldots,x_n$ будет конечно, а значит, конечным будет и множество $A_{\overline{t}^1,\ldots,\overline{t}^p}$.

Выше с использованием взаимоопределимости решеток (полурешеток) решеточным (полурешеточным) порядком было замечено, что имеет место определимость любой решетки (полурешетки) производной Iso в классе всех решеток (полурешеток) с точностью до двойственности.

Частично (для конечных решеток, полурешеток) этот результат получает альтернативное доказательство (без использования порядка) с помощью теоремы 1.

Следствие 2. Любая конечная решетка определима производной Iso в классе всех решеток с точностью до двойственности.

Доказательство. Так как для класса L всех решеток условия теоремы 1 выполнены, то для доказательства утверждения следствия остается заметить лишь то, что совокупность формул $A_{\overline{t}^1,\ldots,\overline{t}^p}$, где $\overline{t}^1 = \langle x \wedge y,\ x \vee y\rangle$ и $\overline{t}^2 = \langle x \vee y,\ x \wedge y\rangle$, истинна на любой конечной решетке $\mathcal{A}$. Пусть T — совокупность аксиом теории решеток. Заметим, что (с точностью до эквивалентности на L) совокупность термов от переменных x, y сигнатуры $\langle \wedge, \vee\rangle$ исчерпывается набором: x, y, $x \vee y$, $x \wedge y$. Легко перечисляются возможные (с точностью до эквивалентности на L) типы условий от переменных x и y. Тем самым получаем конкретный конечный список (с точностью до эквивалентности над L) условных термов сигнатуры $\langle \wedge, \vee\rangle$ от переменных x, y. Непосредственно замечается, что для условных термов $g_1(x,y)$, $g_2(x,y)$ из этого списка на нетривиальной решетке $\mathcal{A} = \langle A; \wedge, \vee\rangle$ условные термы g_1, g_2 определяют решетку $\langle A; g_1(x,y), g_2(x,y)\rangle$ тогда и только тогда, когда либо $L \vDash g_1(x,y) = x \vee y \& g_2(x,y) = x \wedge y$, либо $L \vDash g_1(x,y) = x \wedge y \& g_2(x,y) = x \vee y$. Таким образом, посылки формул, входящих во множество $A_{\overline{g},\overline{g}'}$, будут при $\overline{g}, \overline{g}' \notin \{\langle \wedge, \vee\rangle,\ \langle \vee, \wedge\rangle\}$ ложными на любой нетривиальной решетке. При $\overline{g}, \overline{g}' \in \{\langle \wedge, \vee\rangle,\ \langle \vee, \wedge\rangle\}$ будут истинными заключения формул $A_{\overline{g},\overline{g}'}$. Тем самым, действительно, $L \vDash A_{\langle\langle \wedge,\vee\rangle,\ \langle \vee \wedge\rangle\rangle}$. $\square$

Аналогично доказывается

Следствие 3. Любая конечная полурешетка определима производной Iso в классе L_1 всех полурешеток с точностью до изоморфизма.

Литература

1. Гретцер Г. *Общая теория решеток.* – М.: Мир, 1982. – 452 с.
2. Пинус А.Г. *Исчисление условных тождеств и условно рациональная эквивалентность* // Алгебра и логика. – 1998. – Т. 37. – № 4. – С. 432–459.
3. Хобби Д., МакКензи Р. *Строение конечных алгебр.* – М.: Мир, 1993. – 286 с.
4. McKenzie R. *An algebraic version of categorical equivalence for varieties and more general algebraic categories* // Logic and algebra, Proc. of the Int. Conf. dedicated to the memory of R. Magari. – Marcel Dekker Lect. Notes Pure Appl. Math., 1996. – V. 180. – S. 211–243.

Новосибирский государственный технический университет

Поступили
первый вариант 12.11.1998
окончательный вариант 29.05.2000