ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 2 (465)

УДК 517.977

В.А. ДЫХТА, О.Н. САМСОНЮК

ПРИНЦИП МАКСИМУМА В НЕГЛАДКИХ ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО ИМПУЛЬСНОГО УПРАВЛЕНИЯ С МНОГОТОЧЕЧНЫМИ ФАЗООГРАНИЧЕНИЯМИ

1. Введение

В работе получены необходимые условия оптимальности первого порядка в форме принципа максимума (ПМ) в задаче оптимального управления с траекториями ограниченной вариации при наличии общих многоточечных фазоограничений. Задача оптимального импульсного управления рассматривается без предположений о гладкости на входные данные — предполагается измеримая зависимость по времени и липшицевая по фазовым координатам. Кроме того, не предполагается выполнение условия корректности, что приводит к неоднозначности реакции динамической системы на импульсное управление (векторную меру); как следствие, импульсному управлению и начальному условию может соответствовать воронка обобщенных решений.

Приведем определение обобщенного (об.) решения, устоявшееся в теории оптимальных импульсных процессов [1], [2]. Рассмотрим управляемую систему

$$\dot{x} = f(t,x,V,u) + G(t,x,V)v, \quad \dot{V} = \|v\|, \tag{1}$$

$$u(t) \in U, \quad v(t) \in K, \quad t \in [t_0,t_1]. \tag{2}$$

Здесь $x(\cdot)$, $V(\cdot)$ — абсолютно непрерывные, $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ — измеримые ограниченные функции, U — компактное множество в $R^{d(u)}$, K — выпуклый замкнутый конус в $R^{d(v)}$, $\|v\| = \sum\limits_{j=1}^{d(v)} |v_j|$, $d(z)$ обозначает размерность вектора z. Если не оговорено противное, то термины "измеримость" и "ограниченность" применительно к функциям относятся к мере Лебега $\mathcal{L}$, а все соотношения, содержащие измеримые функции, считаются выполненными $\mathcal{L}$-почти всюду.

Определение ([1]). Пара функций $x(\cdot)$, $V(\cdot)$, непрерывных справа на $(t_0,t_1]$ и имеющих ограниченную вариацию, называется обобщенным решением системы (1), (2), если существует такая последовательность функций $\{x_n(\cdot),\, V_n(\cdot),\, u_n(\cdot),\, v_n(\cdot)\}$, удовлетворяющих системе (1), (2), что

$$\sup_n \|v_n(\cdot)\|_{L_1} < \infty, \quad (x_n,V_n) \to (x,V) \ \text{слабо}^* \text{ в } \ BV$$

(тогда $(x_n(t),V_n(t)) \to (x(t),V(t))$ в точках непрерывности (x,V) и в концах отрезка T).

Если положить $w_n(t) = \int\limits_{t_0}^{t} v_n(\tau)d\tau$, то из теоремы Хелли следует, что последовательность $\{w_n(\cdot)\}$ можно считать слабо* сходящейся к некоторой функции ограниченной вариации $w(\cdot)$. При этом порожденная ею мера Лебега–Стильтьеса dw оказывается K-значной вследствие выпуклости и замкнутости конуса K. Заметим также, что хотя $V_n(t) = \operatorname*{var}\limits_{[t_0,t]} w_n(\cdot)$, предельная функция $V(\cdot)$ не обязана совпадать с вариацией вектор-функции $w(\cdot)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 98-01-00837).

В [1] показано, что при стандартных предположениях непрерывности, липшицевости и не более чем линейного роста функций f, G по (x, V), а также выпуклости годографа, для любого обобщенного решения $(x(\cdot), V(\cdot))$ найдутся K-значная мера Лебега–Стильтьеса dw, $\mathcal{L}$- и dV-измеримая ограниченная функция $u(\cdot)$, $\mathcal{L}$-измеримые функции $\omega_s(\cdot)$, определенные для каждого момента $s \in S_d(V) = \{s \mid [V(s)] := V(s) - V(s-) > 0\}$ на отрезке $[0, d_s] = [0, [V(s)]]$, для которых выполняются условия

$$\omega_s(\tau) \in K_1 := \{v \in K \mid \|v\| \leq 1\}, \quad \int_0^{d_s} \omega_s(\tau) d\tau = [w(s)]; \tag{3}$$

функции $(x(\cdot), V(\cdot))$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений с мерой

$$dx(t) = f(t, x(t), V(t), u(t))dt + G(t, x(t), V(t))dw_c(t) + \sum_{\substack{s \in S_d(V) \\ s \leq t}} [x(s)]\delta(t - s), \tag{4}$$

$$V(t) = \operatorname*{var}_{[t_0, t]} w_c(\cdot) + \sum_{\substack{s \in S_d(V) \\ s \leq t}} [V(s)], \quad V(t_0-) = 0, \tag{5}$$

где w_c — непрерывная составляющая в разложении Лебега функции w; скачки об. решения в точках $s \in S_d(V)$ находятся из условий

$$[x(s)] = z_s(d_s) - x(s-), \quad [V(s)] = z_{Vs}(d_s) - V(s-), \tag{6}$$

где функции $z_s(\tau)$, $z_{Vs}(\tau)$ являются решениями предельной системы

$$\begin{aligned} &\frac{dz_s}{d\tau} = G(s, z_s, z_{Vs})\omega_s(\tau), \quad z_s(0) = x(s-), \\ &\frac{dz_{Vs}}{d\tau} = 1, \quad z_{Vs}(0) = V(s-), \quad \tau \in [0, d_s]. \end{aligned} \tag{7}$$

Таким образом, индивидуальная об. траектория является ветвью интегральной воронки об. решений, соответствующей $(x_0, u(\cdot), dw)$. Эта ветвь определяется вспомогательными предельными управлениями $\omega_s(\tau)$, которые отражают способ приближения последовательности $\{w_n\}$ к функции w и описывают скачок траектории в моменты разрыва функции V. Обобщенный, импульсный процесс системы (1), (2) представляет собой мультинабор

$$e = [x(\cdot), V(\cdot), u(\cdot), dw, \{z^i(\cdot), z^i_V(\cdot), \omega^i(\cdot)\}_{s_i \in S_d(V)}],$$

в котором $z^i(\cdot) = z_{s_i}$, $s_i \in S_d(V)$, и аналогично определены функции z^i_V, ω^i.

В данной работе мы используем приведенное описание множества об. решений при ослабленных предположениях относительно функций f и G, а множество U считаем переменным. Это естественно, поскольку при доказательстве необходимых условий оптимальности факт существования исследуемого решения постулируется, так что условия типа непрерывности по t и роста по (x, V) становятся излишними. Кроме того, ослабление требований касается в основном функции f, свойства которой при переходе к импульсному линейному управлению играют второстепенную роль и в действительности допускают ослабление ([2], сс. 173, 182). Заметим также, что доказательство представленного ПМ не использует условий аппроксимируемости.

Отметим, что наиболее общий ПМ для гладких задач оптимального импульсного управления при невыполнении условия корректности получен в [1] методом разрывной замены времени. Необходимые условия оптимальности при негладкой зависимости входных данных получены в [3], [4] для более частных вариантов задачи (при отсутствии многоточечных фазоограничений и выполнении условия корректности); в основу их доказательства положен вариационный принцип Экланда. В [5] доказан вариант ПМ для негладкой задачи оптимального управления с траекториями ограниченной вариации на фиксированном отрезке времени без промежуточных фазоограничений, техника его доказательства распространяется на более сложный класс задач данной статьи.

2. Постановка задачи и предположения

Пусть $\theta = (\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_n)$ — вектор нефиксированных моментов времени таких, что $\theta_0 \le \theta_1 \le \cdots \le \theta_n$, $n < \infty$, $x(\theta)$, $V(\theta)$, $x(\theta-)$, $V(\theta-)$ — векторы, составленные из односторонних пределов в моменты θ_j непрерывных справа функций ограниченной вариации $x(\cdot)$, $V(\cdot)$, т. е.

$$x(\theta) = (x(\theta_0), \ldots, x(\theta_n)), \qquad x(\theta-) = (x(\theta_0-), \ldots, x(\theta_n-)),$$
$$V(\theta) = (V(\theta_0), \ldots, V(\theta_n)), \quad V(\theta-) = (V(\theta_0-), \ldots, V(\theta_n-)).$$

Рассматривается задача $\mathcal{P}(\theta)$ минимизации функционала

$$l(b), \quad b = (\theta, x(\theta-), x(\theta), V(\theta-), V(\theta)),$$

на множестве импульсных процессов $e = [\theta, x(\cdot), V(\cdot), u(\cdot), dw, \{z^i(\cdot), z_V^i(\cdot), \omega^i(\cdot)\}_{s_i \in S_d(V)}]$, удовлетворяющих следующим условиям допустимости:

1) $x(\cdot)$, $V(\cdot)$ — непрерывные справа на $(\theta_0, \theta_n]$ функции ограниченной вариации;
2) $u(\cdot)$ — измеримая функция, удовлетворяющая ограничению

$$u(t) \in U(t), \quad t \in [\theta_0, \theta_n],$$

где $U(t)$ — сечение множества $U \subset R \times R^{d(u)}$ при фиксированном t, т. е. $U(t) = \{u \mid (t, u) \in U\}$;
3) $dw(t)$ — K-значная мера Лебега–Стильтьеса на $[\theta_0, \theta_n]$, т. е. $dw(B) \in K$ для любого борелевского множества $B \subset [\theta_0, \theta_n]$;
4) компоненты набора e удовлетворяют ограничениям (3)–(7);
5) выполняется многоточечное фазоограничение

$$b \in C. \tag{8}$$

Через $\overline{e} = [\overline{\theta}, \overline{x}(\cdot), \overline{V}(\cdot), \overline{u}(\cdot), d\overline{w}, \{\overline{z}^i(\cdot), \overline{z}_V^i(\cdot), \overline{\omega}^i(\cdot)\}_{s_i \in S_d(\overline{V})}]$ будем обозначать допустимый импульсный процесс, исследуемый на оптимальность.

Поставленная задача рассматривается при следующих предположениях:

(B1) множество $S_d(\overline{V})$ конечно и мера $d\overline{w}$ не имеет непрерывной сингулярной составляющей, т. е.

$$d\overline{w}(t) = \overline{v}(t)dt + \sum_{\overline{s}_i \in S_d(\overline{V})} \overline{c}^i \delta(t - \overline{s}_i),$$

причем $\overline{v} \in L_\infty([\overline{\theta}_0, \overline{\theta}_n], R^{d(w)})$;
(B2) множество $U \subset R \times R^{d(u)}$ борелевское, $K \subset R^{d(v)}$ — замкнутый выпуклый конус, C — замкнутое множество;
(B3) при всех (x, V) функция $(t, u) \to f(t, x, V, u)$ $\mathcal{L} \times \mathcal{B}$-измерима;
(B4) существуют окрестность $\mathcal{Q}$ множества

$$\overline{\mathrm{graph}}\{\overline{x}(\cdot), \overline{V}(\cdot)\} = \{(t, x, V) \mid t \in \Delta,\ x \in [\overline{x}(t-), \overline{x}(t+)],\ V \in [\overline{V}(t-), \overline{V}(t+)]\},$$

где $\Delta \supset [\overline{\theta}_0, \overline{\theta}_n]$ и число $M > 0$ такие, что выполняются условие Липшица

$$|f(t, x, V, u) - f(t, x', V', u)| \le M(|x - x'| + |V - V'|) \ \ \forall (t, x, V, u), (t, x', V', u) \in \mathcal{Q} \times U(t)$$

и условие ограниченности

$$|f(t, x, V, u)| \le M \ \ \forall (t, x, V, u) \in \mathcal{Q} \times U(t);$$

(B5) матрица G непрерывно дифференцируема;
(B6) функция l локально липшицева;
(B7) если $\overline{\theta}_i \in S_d(\overline{V})$, то $\overline{\theta}_i \ne \overline{\theta}_j$ при $j \ne i$.

Замечания. 1) Предположение (B1) необходимо для используемого метода доказательства, оно позволяет охватить большинство приложений.

2) Предположение (B3) выполняется, если, например, функция f измерима по t и непрерывна по u.

3) Множество $\overline{\mathrm{graph}}\{\overline{x}(\cdot), \overline{V}(\cdot)\}$ получается из графика разрывной вектор-функции $(\overline{x}(\cdot), \overline{V}(\cdot))$ путем его дополнения вертикальными отрезками, соединяющими односторонние пределы в точках разрыва.

4) В задаче $\mathcal{P}(\theta)$ односторонние пределы об. траекторий в нефиксированные моменты θ_j стеснены общим ограничением (8) (для симметрии от условия $V(\theta_0-) = 0$ мы отказываемся). Моменты θ_j могут совпадать с действием импульсов, но предположение (B7) исключает в этом случае совпадение нескольких компонент вектора θ с моментом импульса.

Таким образом, $\mathcal{P}(\theta)$ — это некоторая задача оптимизации с разрывными траекториями при наличии фазоограничений в промежуточные и конечные моменты времени. Конечно, выполнение этих ограничений на об. решении не обеспечивает выдерживание их на аппроксимирующих обычных решениях: таких аппроксимаций может вовсе не существовать уже в случае более простых терминальных ограничений [4], [6] или же соблюдение ограничения (8) оказывается возможным лишь на некоторых аппроксимациях. Рассматриваемый ниже пример 1 иллюстрирует данное свойство. Он показывает также, что проекция ограничения (8) в чисто фазовое ограничение для предельных подпроцессов приводит к совершенно другой задаче оптимального импульсного управления.

3. Принцип максимума

Введем необходимые обозначения и понятия. Пусть

$$H(t, x, V, \psi, u, v) = \langle \psi, f(t, x, V, u) + G(t, x, V)v \rangle,$$
$$H_0(t, x, V, \psi, u) = \langle \psi, f(t, x, V, u) \rangle, \quad H_1(t, x, V, \psi, v) = \langle \psi, G(t, x, V)v \rangle,$$
$$\mathcal{H}_0(t, s) = \sup_{u \in U(t)} H_0(t, \overline{x}(s), \overline{V}(s), \psi(s), u).$$

Если $\varphi(t, x, V, \psi, v)$ — заданная функция, то через $\varphi|_{\Theta(s_i)}(s_i, z^i, z_V^i, p^i, \omega^i)$ будет обозначаться замена переменных $(t, x, V, \psi, v) \to (s_i, z^i, z_V^i, p^i, \omega^i)$ в функции φ. Запись типа $H_0(t)$ будет означать вычисление функции H_0 вдоль исследуемого процесса $\overline{e}$, а запись $H_0(t, u)$ — фиксирование всех опущенных аргументов функции H_0 вдоль процесса $\overline{e}$ (в данном случае $x = \overline{x}(t)$, $V = \overline{V}(t)$, $\psi = \psi(t)$, где $\psi(t)$ — траектория двойственных переменных). Точно так же следует понимать обозначение $\varphi|_{\Theta(s_i)}(\tau)$.

Поскольку моменты действия импульсов для допустимых процессов не фиксируются, а зависимость функции f по t лишь измеримая, то для корректной записи условий оптимальности моментов скачка траектории используем следующее понятие из теории функций [7].

Пусть I — интервал из R, $s \in I$ — заданная точка и $\varphi : I \to R^n$ — измеримая функция. Определим множество $\operatorname*{ess}_{t \to s} \varphi(t)$ существенных значений функции φ в точке s как совокупность всех векторов $\eta \in R^n$, для которых при любом $\varepsilon > 0$

$$\mathcal{L}\text{-}\operatorname{meas}\{t \mid s - \varepsilon < t < s + \varepsilon,\ |\eta - \varphi(t)| < \varepsilon\} > 0.$$

Легко проверить, что если s — точка непрерывности φ, то $\operatorname*{ess}_{t \to s} \varphi(t) = \{\varphi(s)\}$, а если s — точка разрыва 1-го рода, то $\operatorname*{ess}_{t \to s} \varphi(t) = \{\varphi(s-), \varphi(s+)\}$.

Если $g(x, y)$ — липшицева функция, то символ $\partial g(\overline{x}, \overline{y})$ обозначает обобщенный градиент Кларка по (x, y), вычисленный в точке $(\overline{x}, \overline{y})$ ([8], с. 17). Символ $\operatorname{co} C$ означает выпуклую оболочку множества C, а $N_C(b)$ — нормальный конус к C в точке b ([8], с. 54).

Сформулируем принцип максимума.

Теорема 1. *Пусть $\overline{e}$ — оптимальный процесс в задаче $\mathcal{P}(\theta)$. Тогда существуют число $\alpha_0 \in \{0,1\}$, числа h_s^-, h_s^+, определенные для каждого момента $s \in \{\overline{\theta}_0, \ldots, \overline{\theta}_n\}$, функции $(\psi, \psi_V) : [\overline{\theta}_0, \overline{\theta}_n] \to R^{d(x)} \times R$ и функции $(p^i, p_V^i) : [0, \overline{d}_i] \to R^{d(x)} \times R$, определенные для каждого момента $\overline{s}_i \in S_d(\overline{V})$, где $\overline{d}_i = [\overline{V}(\overline{s}_i)]$, такие, что выполнены следующие условия:*

1) *условие нетривиальности*

$$\alpha_0 + |\widetilde{\psi}(\overline{\theta}_n+)| + \sum_{j=0}^{n} |\widetilde{\psi}(\overline{\theta}_j-)| + \sum_{s_i \in S_d(\overline{V}) \cap \{\overline{\theta}_0, \ldots, \overline{\theta}_n\}} |\widetilde{p}^i([\overline{V}(s_i)])| > 0,$$

где $\widetilde{\psi} = (\psi, \psi_V)$, $\widetilde{p}^i = (p^i, p_V^i)$;

2) *функции $\psi(\cdot)$, $\psi_V(\cdot)$ кусочно абсолютно непрерывны, на интервалах абсолютной непрерывности удовлетворяют сопряженному дифференциальному включению*

$$(\dot{\psi}(t) + H_{1x}(t),\ \dot{\psi}_V(t) + H_{1V}(t)) \in -\partial_{(x,V)} H_0(t), \tag{9}$$

функции $p^i(\cdot)$, $p_V^i(\cdot)$ абсолютно непрерывны, удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\frac{dp^i(\tau)}{d\tau} = -H_{1x}\big|_{\Theta(\overline{s}_i)}(\tau), \quad \frac{dp_V^i(\tau)}{d\tau} = -H_{1V}\big|_{\Theta(\overline{s}_i)}(\tau) \tag{10}$$

и связаны с $\psi(\cdot)$, $\psi_V(\cdot)$ в моменты $\overline{s}_i \in S_d(\overline{V}) \setminus \{\overline{\theta}_0, \ldots, \overline{\theta}_n\}$ условиями допустимости скачка

$$\psi(\overline{s}_i+) = p^i(\overline{d}_i), \qquad \psi(\overline{s}_i-) = p^i(0),$$
$$\psi_V(\overline{s}_i+) = p_V^i(\overline{d}_i), \quad \psi_V(\overline{s}_i-) = p_V^i(0);$$

3) *условия максимума*

$$H_0(t) = \max_{u \in U(t)} H_0(t, \overline{x}(t), \overline{V}(t), \psi(t), u), \quad t \in [\overline{\theta}_0, \overline{\theta}_n],$$

$$\langle H_v(t), \overline{v}(t)\rangle + \psi_V(t)\|\overline{v}(t)\| = 0 = \max_{v \in K}(\langle H_v(t), v\rangle + \psi_V(t)\|v\|), \quad t \in [\overline{\theta}_0, \overline{\theta}_n], \tag{11}$$

$$\langle H_v\big|_{\Theta(\overline{s}_i)}(\tau), \overline{\omega}^i(\tau)\rangle + p_V^i(\tau) = 0 = \max_{\omega \in K_1}\langle H_v\big|_{\Theta(\overline{s}_i)}(\tau), \omega\rangle + p_V^i(\tau), \quad \tau \in [0, \overline{d}_i], \ \ \overline{s}_i \in S_d(\overline{V}); \tag{12}$$

4) *условия оптимальности моментов θ_j и s_i :*

$$h_s^+ \in \operatorname{co} \operatorname*{ess}_{t \to s} \mathcal{H}_0(t, s+), \quad h_s^- \in \operatorname{co} \operatorname*{ess}_{t \to s} \mathcal{H}_0(t, s-) \ \ \forall s \in \{\overline{\theta}_0, \ldots, \overline{\theta}_n\},$$

$$\int_0^{[\overline{V}(s)]} H_{1t}\big|_{\Theta(s)}(\tau) d\tau \in \operatorname{co} \operatorname*{ess}_{t \to s} \mathcal{H}_0(t, s+) - \operatorname{co} \operatorname*{ess}_{t \to s} \mathcal{H}_0(t, s-) \ \ \forall s \in S_d(\overline{V}) \setminus \{\overline{\theta}_0, \ldots, \overline{\theta}_n\};$$

5) *условие трансверсальности*

$$(\eta_\theta, \eta_{x(\theta-)}, \eta_{x(\theta)}, \eta_{V(\theta-)}, \eta_{V(\theta)}) \in \alpha_0 \partial l(\overline{b}) + N_C(\overline{b}),$$

где $\overline{b} = (\overline{\theta}, \overline{x}(\overline{\theta}-), \overline{x}(\overline{\theta}), \overline{V}(\overline{\theta}-), \overline{V}(\overline{\theta}))$,

$$\eta_\theta = ((-h_{\overline{\theta}_0}^+ + r(\overline{\theta}_0)),\ (h_{\overline{\theta}_j}^- - h_{\overline{\theta}_j}^+ + r(\overline{\theta}_j))_{j=\overline{1,n-1}}, (h_{\overline{\theta}_n}^- + r(\overline{\theta}_n))),$$
$$\eta_{x(\theta-)} = (\psi(\overline{\theta}_0-),\ (-\psi(\overline{\theta}_j-) + p_{\overline{\theta}_j}(0))_{j=\overline{1,n}}),$$
$$\eta_{x(\theta)} = ((\psi(\overline{\theta}_j+) - p_{\overline{\theta}_j}([\overline{V}(\theta_j)]))_{j=\overline{0,n-1}}, -\psi(\overline{\theta}_n+)),$$
$$\eta_{V(\theta-)} = (\psi_V(\overline{\theta}_0-), (-\psi_V(\overline{\theta}_j-) + p_{V\overline{\theta}_j}(0))_{j=\overline{1,n}}),$$
$$\eta_{V(\theta)} = ((\psi_V(\overline{\theta}_j+) - p_{V\overline{\theta}_j}([\overline{V}(\theta_j)]))_{j=\overline{0,n-1}}, -\psi_V(\overline{\theta}_n+)),$$

$$
\begin{aligned}
\psi(\overline{\theta}_0-) &= p_{\overline{\theta}_0}(0), \quad \psi(\overline{\theta}_n+) = p_{\overline{\theta}_n}([\overline{V}(\overline{\theta}_n)]),\\
\psi_V(\overline{\theta}_0-) &= p_{V\overline{\theta}_0}(0), \quad \psi_V(\overline{\theta}_n+) = p_{V\overline{\theta}_n}([\overline{V}(\overline{\theta}_n)]),\\
p_{\overline{\theta}_j}(\tau) &= \begin{cases} p^i(\tau), & \textit{если } \ \overline{\theta}_j = \overline{s}_i \in S_d(\overline{V});\\ \mathrm{const}, & \textit{если } \ \overline{\theta}_j \notin S_d(\overline{V}),\end{cases}\\
p_{V\overline{\theta}_j}(\tau) &= \begin{cases} p^i_V(\tau), & \textit{если } \ \overline{\theta}_j = \overline{s}_i \in S_d(\overline{V});\\ \mathrm{const}, & \textit{если } \ \overline{\theta}_j \notin S_d(\overline{V}),\end{cases}\\
r(\overline{\theta}_j) &= \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\overline{d}_i} H_{1t}\big|_{\Theta(\overline{s}_i)}(\tau)d\tau, & \overline{\theta}_j = \overline{s}_i \in S_d(\overline{V});\\ 0, & \overline{\theta}_j \notin S_d(\overline{V}).\end{cases}
\end{aligned}
$$

Замечания. 1) Если в задаче $\mathcal{P}(\theta)$ функционал l и множество C, задающее многоточечные фазоограничения, не зависят от значений $x(\theta_0)$, $V(\theta_0)$, $x(\theta_n-)$, $V(\theta_n-)$, то дополнительно к условиям теоремы 1 выполняются условия

$$h^-_{\overline{\theta}_0} - h^+_{\overline{\theta}_0} + r(\overline{\theta}_0) = -a_0, \quad h^-_{\overline{\theta}_n} - h^+_{\overline{\theta}_n} + r(\overline{\theta}_n) = a_1$$

при некоторых a_0, $a_1 \geq 0$.

2) Если процесс $\overline{e}$ имеет совпадающие моменты

$$\overline{\theta}_j = \overline{\theta}_{j+1} = \cdots = \overline{\theta}_{j+k},$$

то $h^+_{\overline{\theta}_i} = h^-_{\overline{\theta}_{i+1}}$, $i = \overline{j, j+k-1}$.

4. Обсуждение принципа максимума и частные случаи

Условия трансверсальности и оптимальности промежуточных моментов теоремы 1 выглядят громоздко, что связано с наличием общего ограничения типа включения на промежуточные моменты времени и значения траектории. Ниже мы приведем более компактную формулировку ПМ для задачи, в которой промежуточные и терминальные фазоограничения заданы функционально.

4.1. Случай функционального задания многоточечных фазоограничений

Рассмотрим задачу $\mathcal{P}_1(\theta)$, в которой множество C задано функционально в виде

$$\varphi(b) \leq 0, \quad k(b) = 0, \quad V(\theta_0-) = 0,$$

где вектор-функции φ, k имеют размерности $d(\varphi)$, $d(k)$ соответственно и удовлетворяют предположению

(B8) функции l, φ_j, $j = \overline{1, d(\varphi)}$, локально липшицевы и регулярны ([8], с. 44); вектор-функция k непрерывно дифференцируема.

Функциональное задание множества C и локальная липшицевость функций l, φ, k позволяет сформулировать ПМ в терминах множителей Лагранжа. Введем функцию Лагранжа

$$L(b) = \alpha_0 l(b) + \langle \alpha, \varphi(b) \rangle + \langle \beta, k(b) \rangle.$$

Предположение (B8) обеспечивает регулярность функции Лагранжа, что позволяет представить ПМ в более компактной формулировке, т.к. в этом случае обобщенный градиент $\partial L(b)$ содержится в прямом произведении частных обобщенных градиентов.

ПМ для задачи $\mathcal{P}_1(\theta)$ дает

Теорема 2. *Пусть $\overline{e}$ — оптимальный процесс в задаче $\mathcal{P}_1(\theta)$. Тогда существуют число α_0, векторы $\alpha \in R^{d(\varphi)}$, $\beta \in R^{d(k)}$, функции $(\psi, \psi_V) : [\overline{\theta}_0, \overline{\theta}_n] \to R^{d(x)} \times R$ и функции $(p^i, p^i_V) : [0, \overline{d}_i] \to R^{d(x)} \times R$, $\overline{d}_i = [\overline{V}(\overline{s}_i)]$, определенные для каждого момента $\overline{s}_i \in S_d(\overline{V})$, такие, что выполнены следующие условия*:

1) *условие нетривиальности теоремы* 1, $\alpha_0 \geq 0$, $\alpha \geq 0$, $\langle \alpha, \varphi(\overline{b}) \rangle = 0$;

2) *функции* $\psi(\cdot)$, $\psi_V(\cdot)$ *кусочно абсолютно непрерывны, на интервалах абсолютной непрерывности удовлетворяют дифференциальному включению* (9), *функции* $p^i(\cdot)$, $p^i_V(\cdot)$ *абсолютно непрерывны, удовлетворяют дифференциальным уравнениям* (10);

3) *условия максимума теоремы* 1;

4) *условия скачка и трансверсальности:*

а) *для всех* $s \in \{\overline{\theta}_1, \ldots, \overline{\theta}_{n-1}\} \setminus S_d(\overline{V})$

$$\psi(s+) - \psi(s-) \in \sum_{\overline{\theta}_j = s} (\partial_{x(\theta_j -)} L(\overline{b}) + \partial_{x(\theta_j)} L(\overline{b})),$$

$$\psi_V(s+) - \psi_V(s-) \in \sum_{\overline{\theta}_j = s} (\partial_{V(\theta_j -)} L(\overline{b}) + \partial_{V(\theta_j)} L(\overline{b}));$$

б) *для всех* $\overline{s}_i \in S_d(\overline{V}) \setminus \{\overline{\theta}_0, \ldots, \overline{\theta}_n\}$

$$\psi(\overline{s}_i+) - p^i(\overline{d}_i) = 0, \qquad p^i(0) - \psi(\overline{s}_i-) = 0,$$
$$\psi_V(\overline{s}_i+) - p^i_V(\overline{d}_i) = 0, \quad p^i_V(0) - \psi_V(\overline{s}_i-) = 0;$$

в) *для всех* $\overline{s}_i \in S_d(\overline{V}) \cap \{\overline{\theta}_1, \ldots, \overline{\theta}_{n-1}\}$

$$\psi(\overline{s}_i+) - p^i(\overline{d}_i) \in \partial_{x(\overline{s}_i)} L(\overline{b}), \qquad p^i(0) - \psi(\overline{s}_i-) \in \partial_{x(\overline{s}_i-)} L(\overline{b}),$$
$$\psi_V(\overline{s}_i+) - p^i_V(\overline{d}_i) \in \partial_{V(\overline{s}_i)} L(\overline{b}), \quad p^i_V(0) - \psi_V(\overline{s}_i-) \in \partial_{V(\overline{s}_i-)} L(\overline{b});$$

г)
$$\psi(\overline{\theta}_0+) - p_{\overline{\theta}_0}([\overline{V}(\theta_0)]) \in L_{x(\theta_0)}(\overline{b}), \quad -\psi(\overline{\theta}_n-) + p_{\overline{\theta}_n}(0) \in L_{x(\theta_n-)}(\overline{b}),$$
$$-\psi_V(\overline{\theta}_n-) + p_{V\overline{\theta}_n}(0) \in L_{V(\theta_n-)}(\overline{b}),$$
$$(\psi(\overline{\theta}_0-), -\psi(\overline{\theta}_n+), -\psi_V(\overline{\theta}_n+)) \in \partial_{(x(\theta_0-), x(\theta_n), V(\theta_n))} L(\overline{b});$$

5) *условия оптимальности моментов* $\forall s \in \{\overline{\theta}_1, \ldots, \overline{\theta}_{n-1}\} \cup S_d(\overline{V})$, $s \neq \overline{\theta}_0, \overline{\theta}_n$,

$$\int_0^{[\overline{V}(s)]} H_{1t}\big|_{\Theta(s)}(\tau) d\tau \in \operatorname{co} \operatorname*{ess}_{t \to s} \mathcal{H}_0(t, s+) - \operatorname{co} \operatorname*{ess}_{t \to s} \mathcal{H}_0(t, s-) + \sum_{\overline{\theta}_j = s} \partial_{\theta_j} L(\overline{b}),$$

$$\int_0^{[\overline{V}(\overline{\theta}_0)]} H_{1t}\big|_{\Theta(\overline{\theta}_0)}(\tau) d\tau \in \operatorname{co} \operatorname*{ess}_{t \to \overline{\theta}_0} \mathcal{H}_0(t, \overline{\theta}_0+) + \sum_{\overline{\theta}_j = \overline{\theta}_0} \partial_{\theta_j} L(\overline{b}),$$

$$\int_0^{[\overline{V}(\overline{\theta}_n)]} H_{1t}\big|_{\Theta(\overline{\theta}_n)}(\tau) d\tau \in -\operatorname{co} \operatorname*{ess}_{t \to \overline{\theta}_n} \mathcal{H}_0(t, \overline{\theta}_n-) + \sum_{\overline{\theta}_j = \overline{\theta}_n} \partial_{\theta_j} L(\overline{b}).$$

Теорема 2 следует из теоремы 1 с учетом свойств обобщенных градиентов и нормалей.

Выделим случай гладкой задачи $\mathcal{P}_s$, предположив дополнительно, что функция $f(t, x, V, u)$ непрерывно дифференцируема по переменным t, x, V и непрерывна по u, функции l, φ и k непрерывно дифференцируемые. Предположим также, что функции l, φ и k не зависят от $x(\theta_0)$, $V(\theta_0)$, $x(\theta_n-)$, $V(\theta_n-)$.

ПМ для задачи $\mathcal{P}_s$ содержит условия 1)–4) теоремы 2 с заменой включений на равенства и обобщенных градиентов на обычные частные производные. Дополнительно в нем утверждается существование функций $\psi_t : [\overline{\theta}_0, \overline{\theta}_n] \to R$, $p_t^i : [\overline{\theta}_0, \overline{\theta}_n] \to R$, $s_i \in S_d(\overline{V})$, где $\psi_t(\cdot)$ кусочно абсолютно непрерывна, удовлетворяет на интервалах абсолютной непрерывности дифференциальному уравнению

$$\dot{\psi}_t(t) = -H_t(t),$$

а функции $p_t^i(\cdot)$ абсолютно непрерывны на $[0, \overline{d}_i]$ и удовлетворяют соответствующим предельным сопряженным уравнениям

$$\frac{dp_t^i(\tau)}{d\tau} = -H_{1t}\big|_{\Theta(\overline{s}_i)}(\tau).$$

При этом выполняются следующие условия скачка и трансверсальности:

$$\psi_t(s+) - \psi_t(s-) = \sum_{\overline{\theta}_j = s} L_{\theta_j}(\overline{b}) \ \ \forall s \in \{\overline{\theta}_1, \ldots, \overline{\theta}_{n-1}\} \setminus S_d(\overline{V}),$$

$$\psi_t(\overline{s}_i+) - p_t^i(\overline{d}_i) = 0, \quad p_t^i(0) - \psi_t(\overline{s}_i-) = 0 \ \ \forall\, \overline{s}_i \in S_d(\overline{V}) \setminus \{\overline{\theta}_1, \ldots, \overline{\theta}_{n-1}\},$$

$$\psi_t(\overline{s}_i+) - p_t^i(\overline{d}_i) = L_{\overline{s}_i}(\overline{b}), \quad p_t^i(0) - \psi_t(\overline{s}_i-) = 0 \ \ \forall\, \overline{s}_i \in S_d(\overline{V}) \cap \{\overline{\theta}_1, \ldots, \overline{\theta}_{n-1}\},$$

$$\psi_t(\overline{\theta}_0-) = L_{\theta_0}(\overline{b}), \quad \psi_t(\overline{\theta}_n+) = -L_{\theta_n}(\overline{b}).$$

Условие 5) теоремы 2 с учетом замечания 1) к теореме 1 примет вид

$$H_0(t) + \psi_t(t) \quad \begin{cases} \le 0, & t = \overline{\theta}_0; \\ = 0, & t \in (\overline{\theta}_0, \overline{\theta}_n); \\ \ge 0, & t = \overline{\theta}_n. \end{cases}$$

4.2. Частные случаи условий максимума

а) Рассмотрим типичный для приложений случай $K = R_+^{d(v)}$. Тогда $S_d(\overline{V}) = S_d(\overline{w})$; условие максимума (11) примет вид

$$H_{v_j}(t) + \psi_V(t) \begin{cases} \le 0 & \forall\, t \in [\overline{\theta}_0, \overline{\theta}_n]; \\ = 0, & t \in S_{ac}(\overline{w_j}), \end{cases} \qquad j = \overline{1, d(v)},$$

где $S_{ac}(\overline{w})$ — множество моментов времени, на котором сосредоточена абсолютно непрерывная составляющая меры $\overline{w}$; условие максимума (12) преобразуется к следующему:

$$H_{v_j}\big|_{\Theta(\overline{s}_i)}(\tau) + p_V^i(\tau) \begin{cases} \le 0 & \forall\, \tau \in [0, \overline{d}_i]; \\ = 0, & \overline{\omega}_j^i(\tau) > 0, \end{cases} \qquad j = \overline{1, d(v)}.$$

При этом, если $p_V^i(\tau) < 0$, то для таких τ $\overline{\omega}^i(\tau) = 1$; при строгом неравенстве на $[0, \overline{d}_i]$ это равносильно равенству $\overline{d}_i = |\overline{c^i}|$.

б) В случае $K = R^{d(v)}$ условия максимума также расписываются покомпонентно: условие (11) примет вид

$$\big|H_{v_j}(t)\big| + \psi_V(t) \begin{cases} \le 0 & \forall\, t \in [\overline{\theta}_0, \overline{\theta}_n]; \\ = 0, & t \in S_{ac}(\overline{w_j}), \end{cases} \qquad j = \overline{1, d(v)};$$

в моменты $t \in S_{ac}(\overline{w_j})$ знак $H_{v_j}(t)$ совпадает со знаком абсолютно непрерывной составляющей $\overline{v}_j(t)$; условие (12) преобразуется к следующему:

$$\big|H_{v_j}|_{\Theta(\overline{s}_i)}(\tau)\big| + p_V^i(\tau) \begin{cases} \le 0 & \forall\, \tau \in [0, \overline{d}_i]; \\ = 0, & \overline{\omega}_j^i(\tau) \ne 0, \end{cases} \qquad j = \overline{1, d(v)};$$

знак $H_{v_j}\big|_{\Theta(\overline{s}_i)}(\tau)$ совпадает со знаком предельного управления $\overline{\omega}_j^i(\tau)$ на множестве, где последнее отлично от нуля.

5. Иллюстрирующие примеры

Следующий модифицированный пример из [9] не только иллюстрирует ПМ, но и показывает, что при аппроксимации обобщенной траектории обычными траекториями промежуточные фазоограничения и их аналоги в предельных подсистемах могут не выдерживаться.

Пример 1. Пусть управляемая система описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t)v(t), \quad & x_1(0) = 0, \\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t)v(t), \quad & x_2(0) = 1. \end{aligned} \tag{13}$$

Ставится задача минимизации функционала $J = (x_2(\theta)+1)^2$ на множестве об. решений системы (13) при ограничениях

$$\begin{gathered} v(t) \geq 0, \quad \int_0^1 v(t)dt \leq \pi, \\ \theta \in [0,1], \quad x_1(\theta-) \leq 0, \quad x_1(\theta) \leq 0. \end{gathered} \tag{14}$$

(В [9] рассмотрен этот пример с фазовым ограничением $x_1(t) \leq 0$.) Если не учитывать ограничение $z_1(\tau) \leq 0$ в предельной системе (как в постановке задачи $\mathcal{P}(\theta)$), то оптимальным будет решение

$$\overline{V}(t) = \begin{cases} 0, & t < \overline{\theta}; \\ \pi, & t \geq \overline{\theta}, \end{cases} \quad \overline{x}_1(t) \equiv 0, \quad \overline{x}_2(t) = \begin{cases} 1, & t < \overline{\theta}; \\ -1, & t \geq \overline{\theta}, \end{cases} \quad d\overline{w} = \pi\delta(t-\theta),$$

где момент $\overline{\theta}$ — любая точка из $(0,1)$, и $\min J = 0$.

Рассмотрим предельную систему, соответствующую моменту $\overline{\theta}$,

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(\tau) &= z_2(\tau)\overline{\omega}(\tau), \quad & z_1(0) = 0, \quad & z_1([\overline{V}(\overline{\theta})]) = 0, \\ \dot{z}_2(\tau) &= -z_1(\tau)\overline{\omega}(\tau), \quad & z_2(0) = 1, \quad & z_2([\overline{V}(\overline{\theta})]) = -1. \end{aligned}$$

Поскольку $\overline{\omega}(\tau) \equiv 1$, то $z_1(\tau) = \sin\tau$, $z_2(\tau) = \cos\tau$. Очевидно, при $\tau \in (0,\pi/2)$ $z_1(\tau) > 0$. Таким образом, хотя ограничение (14) выполняется на оптимальном решении, соответствующее предельное решение, определяющее скачок из $x(\overline{\theta}-)$ в $x(\overline{\theta})$, не удовлетворяет неравенству $z_1(\tau) \leq 0$. Если оптимальную разрывную функцию $\overline{V}(t) = \pi\chi_{[\theta,1]}(t)$ аппроксимировать последовательностью $\{V_n(t)\}$ такой, что $\pi/2 \leq V_n(\theta) \leq \pi$, то соответствующая последовательность обычных траекторий $\{x_n\}$ будет удовлетворять ограничению (14); при $0 < V_n(\theta) < \pi/2$ ограничение (14) будет нарушаться.

Если же ввести в предельную систему фазовое ограничение $z_1(\tau) \leq 0 \ \forall \tau$, наследуемое от (14), то единственной допустимой (и поэтому оптимальной) окажется траектория $\widetilde{x}_1 \equiv 0$, $\widetilde{x}_2 \equiv 1$, $\widetilde{V} \equiv 0$, для которой $\widetilde{J} = 4 > \min J$.

Пример 2. Требуется минимизировать функционал $J(dw) = x_3(20) - \nu x_2(20)$ на множестве обобщенных процессов $(x(\cdot), dw)$ нелинейной управляемой системы

$$\begin{gathered} \dot{x}_1 = |x_2|, \quad \dot{x}_2 = 1 - v, \quad \dot{x}_3 = x_1, \\ x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 5, \quad x_3(0) = 0, \\ \theta = 10, \quad x_1(\theta) \geq 19, \quad v(t) \geq 0. \end{gathered}$$

В зависимости от значения параметра ν ПМ выделяет следующие экстремали:
1) $\nu \geq 200 \Rightarrow d\overline{w} \equiv 0$;
2) $\nu \in [128, 200) \Rightarrow d\overline{w}(t) = -5\delta(t) + \chi_{[0,\tau]}dt$, где $\tau = 20 - \sqrt{2\nu}$;
3) $\nu \in [50, 128) \Rightarrow d\overline{w}(t) = -5\delta(t) + \chi_{[0,4]}dt$;
4) $\nu \in (0, 50) \Rightarrow d\overline{w}(t) = -5\delta(t) - 6\delta(t-10) + \chi_{[0,4]}dt + \chi_{[10,\tau]}dt$, где $\tau = 20 - \sqrt{2\nu}$.

6. Доказательство принципа максимума

Доказательство теоремы 1 отличается от доказательства ПМ работы [5] в деталях расшифровки условий трансверсальности и оптимальности моментов, а также — в переходе к составной задаче. Последнее отличие состоит в том, что начальной и конечной точкам θ_0, θ_n сопоставляется импульс (возможно, фиктивный). Это связано с наличием ограничений на односторонние пределы $x(\theta_0)$, $V(\theta_0)$, $x(\theta_n-)$, $V(\theta_n-)$.

Зафиксируем упорядоченное множество моментов времени $\overline{S}$, включив в него точки разрыва функции $\overline{V}$, промежуточные и граничные моменты, т. е.

$$\overline{S} = \{\overline{s}_0, \dots, \overline{s}_N\} \supseteq S_d(\overline{V}) \cup \{\overline{\theta}_0, \dots, \overline{\theta}_n\},$$

где $\overline{\theta}_0 = \overline{s}_0 \le \overline{s}_1 \le \dots \le \overline{s}_N = \overline{\theta}_n$. При этом, если вектор $\overline{\theta}$ имеет совпадающие компоненты, то им соответствуют столько же совпадающих точек множества $\overline{S}$, и других совпадающих точек в $\overline{S}$ нет.

Пусть $\overline{\omega}^i \in L_\infty([0,\overline{d}_i], K_1)$ произвольно, $\overline{d}_i = [\overline{V}(s_i)] = 0\ \forall \overline{s}_i \notin S_d(\overline{V})$. Таким образом, все точки из $\overline{S}$ делятся на три типа: 1) $\overline{s}_i \in S_d(\overline{V})$, но $\overline{s}_i \ne \overline{\theta}_j\ \forall j \in \{0,\dots,n\}$; 2) $\overline{s}_i \in S_d(\overline{V})$ и $\overline{s}_i = \overline{\theta}_j$ при некотором $j \in \{0,\dots,n\}$ (см. предположение (B7)); 3) $\overline{s}_i \notin S_d(\overline{V})$, но может совпадать с некоторыми точками этого же типа, если им соответствуют совпадающие точки из $\{\overline{\theta}_0,\dots,\overline{\theta}_n\}$.

Обозначим через $\overline{x}^i(\cdot)$, $\overline{V}^i(\cdot)$, $\overline{u}^i(\cdot)$, $\overline{v}^i(\cdot)$ сужения функций $\overline{x}$, $\overline{V}$, $\overline{u}$, $\overline{v}$ на отрезки $[\overline{s}_{i-1}, \overline{s}_i]$, $i = \overline{1,N}$ (в правых концах отрезков траекторные компоненты доопределяются по непрерывности, так что $\overline{x}^i$, $\overline{V}^i \in AC$).

Перейдем к вспомогательной составной задаче $\mathcal{P}_N(\theta)$ аналогично доказательству ПМ работы [5]. В задаче $\mathcal{P}_N(\theta)$ имеются следующие ограничения:

уравнения динамики по t

$$\dot{x}^i = f(t,x^i,V^i,u^i) + G(t,x^i,V^i)v^i, \quad \dot{V}^i = \|v^i\|,$$
$$u^i(t) \in U(t), \quad v^i(t) \in K, \quad t \in [s_{i-1}, s_i], \quad i = \overline{1,N};$$

уравнения динамики по τ

$$\frac{dz^i}{d\tau} = G(s_i, z^i, z_V^i)\omega^i, \quad \frac{dz_V^i}{d\tau} = 1,$$
$$\omega^i(\tau) \in K_1, \quad \tau \in [0, d_i], \quad i = \overline{0,N}$$

(следовательно, в каждый момент s_i имитируется импульс), и дополнительные уравнения, позволяющие избавиться от параметров в предельных подсистемах,

$$\frac{ds_i}{d\tau} = 0, \quad i = \overline{0,N};$$

уравнения, связывающие концевые значения фазовых траекторий этапов,

$$x^{i+1}(s_i) - z^i(d_i) = 0, \quad V^{i+1}(s_i) - z_V^i(d_i) = 0,$$
$$x^{i+1}(s_{i+1}) - z^{i+1}(0) = 0, \quad V^{i+1}(s_{i+1}) - z_V^{i+1}(0) = 0, \quad i = \overline{0, N-1}; \tag{15}$$
$$s_0 \le s_1 \le \dots \le s_N, \quad d_i \ge 0, \quad i = \overline{0,N}; \tag{16}$$

ограничение, связывающее граничные значения моментов времени и концы траекторий этапов,

$$\rho \in C, \tag{17}$$

где ρ — концевой вектор, который будет определен ниже.

Требуется минимизировать функционал $l(\rho)$.

Переход концевого вектора b в концевой вектор ρ осуществляется по следующей схеме (с переобозначением $t_0^i = s_{i-1}$, $t_1^i = s_i$ для $i = \overline{1,N}$):

$$\theta \to (t_0^1, (t_1^{i_k})_{i_k \in I}, t_1^N),$$

$$x(\theta-) \to (z^0(0), (x^{i_k}(t_1^{i_k}))_{i_k\in I}, x^N(t_1^N)), \qquad x(\theta) \to (x^1(t_0^1), (x^{i_k+1}(t_0^{i_k+1}))_{i_k\in I}, z^N(d_N)),$$
$$V(\theta-) \to (z_V^0(0), (V^{i_k}(t_1^{i_k}))_{i_k\in I}, V^N(t_1^N)), \quad V(\theta) \to (V^1(t_0^1), (V^{i_k+1}(t_0^{i_k+1}))_{i_k\in I}, z_V^N(d_N)),$$

где I — множество индексов (свое для каждого допустимого процесса задачи $\mathcal{P}_N(\theta)$)

$$I = \{1 \le i_k \le N-1,\ k = \overline{1, n-1} \mid i_k < i_{k+1}\}.$$

Множество I в совокупности с номерами $i = 0, N$ определяет $n+1$ номеров этапов, граничные моменты времени которых и значения концов траекторий входят в функционал и ограничение (17).

Ясно, что процесс $\overline{e}$ естественным образом порождает мультипроцесс $\overline{\xi}$, допустимый в задаче $\mathcal{P}_N(\theta)$ и являющийся в ней оптимальным. При этом вектор $\overline{b}$ переходит в концевой вектор $\overline{\rho}$ (условная запись $\overline{b} \to \overline{\rho}$) по следующей схеме:

$$\overline{\theta} \to (\overline{s}_0, (\overline{s}_i)_{i\in\overline{I}}, \overline{s}_N),$$

$$\overline{x}(\overline{\theta}-) \to (\overline{z}^0(0), (\overline{x}^i(\overline{s}_i))_{i\in\overline{I}}, \overline{x}^N(\overline{s}_N)), \qquad \overline{x}(\overline{\theta}) \to (\overline{x}^1(\overline{s}_0), (\overline{x}^{i+1}(\overline{s}_i))_{i\in\overline{I}}, \overline{z}^N(\overline{d}_N)),$$
$$\overline{V}(\overline{\theta}-) \to (\overline{z}_V^0(0), (\overline{V}^i(\overline{s}_i))_{i\in\overline{I}}, \overline{V}^N(\overline{s}_N)), \quad \overline{V}(\overline{\theta}) \to (\overline{V}^1(\overline{s}_0), (\overline{V}^{i+1}(\overline{s}_i))_{i\in\overline{I}}, \overline{z}_V^N(\overline{d}_N)),$$

где

$$\overline{I} = \{1 \le i_k \le N-1,\ i_k < i_{k+1} \mid \exists\, \overline{\theta}_j = \overline{s}_{i_k}\}.$$

(Множество $\overline{I}$ в объединении с $\{0, N\}$ — это множество номеров точек из $\overline{S}$, соответствующих моментам $\overline{\theta}_j$, $j = \overline{0,n}$.)

Заменим ограничение $v^i(t) \in K$ на $v^i(t) \in K_j = K \cap B_j$, где $j > \|\overline{v}(\cdot)\|_\infty$. В результате получим семейство (по j) многоэтапных задач $\mathcal{P}_{Nj}(\theta)$, в допустимые множества которых исследуемый мультипроцесс $\overline{\xi}$ вкладывается очевидным образом и является в этих задачах оптимальным. К каждой задаче $\mathcal{P}_{Nj}(\theta)$ применим ПМ работы [7] и для доказательства теоремы 1 остается расшифровать его условия. Специфичной по сравнению с доказательством ПМ из [5] будет только расшифровка условия трансверсальности ПМ для задачи $\mathcal{P}_{Nj}(\theta)$, на которой мы и остановимся в данной работе.

В иной форме ограничения (15)–(17) на граничные значения моментов времени и концы траекторий этапов в задаче $\mathcal{P}_{Nj}(\theta)$ можно записать в виде

$$\Big(\rho, (z^{i_k}(0), z^{i_k}(d_{i_k}), z_V^{i_k}(0), z_V^{i_k}(d_{i_k}), s_{i_k}(0), t_0^{i_k+1})_{i_k\in I}, (z^0(d_0), z_V^0(d_0), s_0(0)), (z^N(0), z_V^N(0), s_N(0))\Big) \in Q;$$
$$x^{i+1}(t_0^{i+1}) - z^i(d_i) = 0, \quad x^i(t_1^i) - z^i(0) = 0,$$
$$V^{i+1}(t_0^{i+1}) - z_V^i(d_i) = 0, \quad V^i(t_1^i) - z_V^i(0) = 0,$$
$$(s_i(0), t_0^{i+1}, t_1^i) \in \{(a,a,a) \mid a \in R\}, \quad i \in \{1, \dots, N-1\} \setminus I;$$
$$\tau_0^i = 0, \quad d_i \ge 0, \quad i = \overline{0,N}.$$

Здесь множество Q определяется условиями

$$\rho \in C;$$
$$x^{i_k+1}(t_0^{i_k+1}) - z^{i_k}(d_{i_k}) = 0, \quad V^{i_k+1}(t_0^{i_k+1}) - z_V^{i_k}(d_{i_k}) = 0, \quad i_k \in I \cup \{0\};$$
$$x^{i_k}(t_1^{i_k}) - z^{i_k}(0) = 0, \quad V^{i_k}(t_1^{i_k}) - z_V^{i_k}(0) = 0, \quad i_k \in I \cup \{N\};$$
$$t_1^{i_k} = t_0^{i_k+1} = s_{i_k}(0), \quad i_k \in I, \quad t_0^1 = s_0(0), \quad s_N(0) = t_1^N.$$

Расшифровка условий трансверсальности для этапов, номера которых не входят в множество $\overline{I}\cup\{0,N\}$ (и, следовательно, граничные значения моментов времени и концы траекторий, соответствующие этим этапам, не входят в функционал l и не связаны множеством C, задающим многоточечные фазоограничения), проводится так же, как в доказательстве ПМ в работе [5]. Если $i\notin\overline{I}\cup\{0,N\}$, то

$$\psi^{i+1}(\overline{s}_i)-p^i(\overline{d}_i)=0,\quad -\psi^i(\overline{s}_i)+p^i(0)=0,$$
$$\psi_V^{i+1}(\overline{s}_i)-p_V^i(\overline{d}_i)=0,\quad -\psi_V^i(\overline{s}_i)+p_V^i(0)=0,$$
$$p_s^i(0)-h_0^{i+1}+h_1^i=0,$$

причем $p_s^i(\overline{d}_i)=0$, $i=\overline{0,N}$. При этом $\forall\, i=\overline{1,N}$ числа h_0^i, h_1^i удовлетворяют включениям

$$h_0^{i+1}\in \operatorname{co}\operatorname*{ess}_{t\to\overline{s}_i}\mathcal{H}_0(t,\overline{s}_i+),\quad h_1^i\in \operatorname{co}\operatorname*{ess}_{t\to\overline{s}_i}\mathcal{H}_0(t,\overline{s}_i-).$$

Условия трансверсальности относительно вектора $\overline{\rho}$ с учетом структуры множества Q имеют вид

$$\begin{gathered}\Bigg(\Big((-h_0^1+p_s^0(0)),\ (p_s^i(0)+h_1^i-h_0^{i+1})_{i\in\overline{I}},\ (h_1^N+p_s^N(0))\Big),\\ \Big(p^0(0),\ (-\psi^i(\overline{s}_i)+p^i(0))_{i\in\overline{I}},\ (-\psi^N(\overline{s}_N)+p^N(0))\Big),\\ \Big((\psi^1(\overline{s}_0)-p^0(\overline{d}_0)),\ (\psi^{i+1}(\overline{s}_i)-p^i(\overline{d}_i))_{i\in\overline{I}},\ -p^N(\overline{d}_N)\Big),\\ \Big(p_V^0(0),\ (-\psi_V^i(\overline{s}_i)+p_V^i(0))_{i\in\overline{I}},\ (-\psi_V^N(\overline{s}_N)+p_V^N(0))\Big),\\ \Big((\psi_V^1(\overline{s}_0)-p_V^0(\overline{d}_0)),\ (\psi_V^{i+1}(\overline{s}_i)-p_V^i(\overline{d}_i))_{i\in\overline{I}},\ -p_V^N(\overline{d}_N)\Big)\Bigg)\in\alpha_0\partial l(\overline{\rho})+N_C(\overline{\rho}).\end{gathered}\tag{18}$$

Введем обозначения

$$h_{s_0}^+=h_0^1,\quad h_{s_N}^-=h_1^N,\quad h_{s_i}^+=h_0^{i+1},\quad h_{s_i}^-=h_1^i,\quad i=\overline{1,N-1},$$

и положим $\psi(\overline{s}_{i-1}+)=\psi^i(t_0^i)$, $\psi(\overline{s}_i-)=\psi^i(t_1^i)$, $\psi_V(\overline{s}_{i-1}+)=\psi_V^i(t_0^i)$, $\psi_V(\overline{s}_i-)=\psi_V^i(t_1^i)$, $i=\overline{1,N}$. Тогда из (18) с учетом интегрального представления $p_s^i(0)=\int\limits_0^{\overline{d}_i}H_{1t}\big|_{\Theta(\overline{s}_i)}(\tau)d\tau$ и переобозначения $\overline{b}\to\overline{\rho}$ получаем условия трансверсальности и оптимальности моментов теоремы 1. $\square$

Докажем замечания, следующие за теоремой 1.

1) Приведем схему перехода к вспомогательной многоэтапной задаче и расшифровку условий трансверсальности, если в задаче $\mathcal{P}(\theta)$ отсутствуют ограничения на значения $x(\theta_0)$, $V(\theta_0)$, $x(\theta_n-)$, $V(\theta_n-)$ и эти значения не входят в функционал l. Теперь начальному и конечному моментам времени не сопоставляется обязательно импульс, как и при доказательстве ПМ в [5] ($\overline{\theta}_0\le\overline{s}_0$, $\overline{s}_N\le\overline{\theta}_n$), и вектор $\overline{b}$ переходит в концевой вектор $\overline{\rho}$ следующим образом:

$$\overline{\theta}\to(\overline{\theta}_0,(\overline{s}_i)_{i\in\overline{I}},\overline{\theta}_n),$$

$$\overline{x}(\overline{\theta}-)\to(\overline{x}^0(\overline{\theta}_0),(\overline{x}^i(\overline{s}_i))_{i\in\overline{I}}),\qquad \overline{x}(\overline{\theta})\to((\overline{x}^{i+1}(\overline{s}_i))_{i\in\overline{I}},\overline{x}^{N+1}(\overline{\theta}_n)),$$
$$\overline{V}(\overline{\theta}-)\to(\overline{V}^0(\overline{\theta}_0),(\overline{V}^i(\overline{s}_i))_{i\in\overline{I}}),\quad \overline{V}(\overline{\theta})\to((\overline{V}^{i+1}(\overline{s}_i))_{i\in\overline{I}},\overline{V}^{N+1}(\overline{\theta}_n)).$$

Для допустимого процесса задачи $\mathcal{P}_N(\theta)$ переход вектора b в концевой вектор ρ происходит по следующей схеме (с переобозначением $t_0^i=s_{i-1}$, $t_1^i=s_i$ для $i=\overline{0,N+1}$):

$$\theta\to(t_0^0,(t_1^{i_k})_{i_k\in I},t_1^{N+1}),$$

$$x(\theta-)\to(x^0(t_0^0),(x^{i_k}(t_1^{i_k}))_{i_k\in I}),\qquad x(\theta)\to((x^{i_k+1}(t_0^{i_k+1}))_{i_k\in I},x^{N+1}(t_1^{N+1})),$$
$$V(\theta-)\to(V^0(t_0^0),(V^{i_k}(t_1^{i_k}))_{i_k\in I}),\quad V(\theta)\to((V^{i_k+1}(t_0^{i_k+1}))_{i_k\in I},V^{N+1}(t_1^{N+1})).$$

Ограничения на граничные значения моментов времени и концы траекторий этапов в задаче $\mathcal{P}_N(\theta)$ задаются условиями

$$\Big(\rho,(z^{i_k}(0),z^{i_k}(d_{i_k}),z_V^{i_k}(0),z_V^{i_k}(d_{i_k}),s_{i_k}(0),t_0^{i_k+1})_{i_k\in I},s_0(0),s_N(d_N)\Big)\in Q;$$
$$x^{i+1}(t_0^{i+1})-z^i(d_i)=0,\quad x^i(t_1^i)-z^i(0)=0,$$
$$V^{i+1}(t_0^{i+1})-z_V^i(d_i)=0,\quad V^i(t_1^i)-z_V^i(0)=0,\quad i\in\{0,\dots,N\}\setminus I;$$
$$(s_i(0),t_0^{i+1},t_1^i)\in\{(a,a,a)\mid a\in R\},\quad i\in\{1,\dots,N-1\}\setminus I;$$
$$\tau_0^i=0,\quad d_i\ge 0,\quad i=\overline{0,N}.$$

Здесь множество Q определяется условиями

$$\rho\in C;\quad x^{i_k+1}(t_0^{i_k+1})=z^{i_k}(d_{i_k}),\quad V^{i_k+1}(t_0^{i_k+1})=z_V^{i_k}(d_{i_k}),$$
$$x^{i_k}(t_1^{i_k})=z^{i_k}(0),\quad V^{i_k}(t_1^{i_k})=z_V^{i_k}(0),\quad i_k\in I;$$
$$t_1^{i_k}=t_0^{i_k+1}=s_{i_k}(0),\quad i_k\in I\cup\{0,N\},$$
$$t_0^0\le s_0(0),\quad s_N(0)\le t_1^{N+1}.$$

Условия трансверсальности относительно вектора $\overline{\rho}$ с учетом структуры множества Q принимают вид

$$\Bigg(\Big((-h_0^0-a_0),\ (p_s^i(0)+h_1^i-h_0^{i+1})_{i\in\overline{I}},\ (h_1^{N+1}+a_1)\Big),\ \Big(\psi^0(\overline{\theta}_0),\ (-\psi^i(\overline{s}_i)+p^i(0))_{i\in\overline{I}}\Big),$$
$$\Big((\psi^{i+1}(\overline{s}_i)-p^i(\overline{d}_i))_{i\in\overline{I}},\ -\psi^{N+1}(\overline{\theta}_n)\Big),\ \Big(\psi_V^0(\overline{\theta}_0),(-\psi_V^i(\overline{s}_i)+p_V^i(0))_{i\in\overline{I}}\Big),$$
$$\Big((\psi_V^{i+1}(\overline{s}_i)-p_V^i(\overline{d}_i))_{i\in\overline{I}},-\psi_V^{N+1}(\overline{\theta}_n)\Big)\Bigg)\in\alpha_0\partial l(\overline{\rho})+N_C(\overline{\rho}),$$

где a_0, $a_1\ge 0$. При этом

$$p_s^0(0)+h_1^0-h_0^1=-a_0,\quad p_s^N(0)+h_1^N-h_0^{N+1}=a_1.$$

Так как $\overline{\theta}_0=\overline{s}_0$, $\overline{\theta}_n=\overline{s}_N$, то согласно замечанию 2) к теореме 2 из [5] $h_0^0=h_1^0$, $h_0^{N+1}=h_1^{N+1}$. Следовательно,

$$-h_0^0-a_0=p_s^0(0)-h_0^1,\quad h_1^{N+1}+a_1=p_s^N(0)+h_1^N.$$

Тем самым доказано замечание 1), следующее после теоремы 1.

2) Рассмотрим случай совпадения промежуточных моментов. По предположению (B7), если промежуточные моменты совпадают, то эта точка не является точкой импульса. Пусть

$$\overline{\theta}_j=\overline{\theta}_{j+1}=\dots=\overline{\theta}_{j+k},$$

и этим точкам соответствуют совпадающие моменты $\overline{s}_m,\overline{s}_{m+1},\dots,\overline{s}_{m+k}$. Тогда

$$h_0^i=h_1^i,\quad i=\overline{m+1,m+k},\quad \overline{d}_i=0,\quad p_s^i(0)=0,\quad p^i(0)=p^i(\overline{d}_i),\quad i=\overline{m,m+k}.$$

Литература

1. Миллер Б.М. *Оптимизация динамических систем с обобщенным управлением* // Автоматика и телемеханика. – 1989. – № 6. – С. 23–34.
2. Завалищин С.Т., Сесекин А.Н. *Импульсные процессы: модели и приложения.* – М.: Наука, 1991. – 256 с.
3. Vinter R.B., Pereira F.M. *A maximum principle for optimal processes with discontinuous trajectories* // SIAM J. Contr. and Optim. – 1988. – V. 26. – № 1. – P. 205–229.
4. Дыхта В.А. *Необходимые условия оптимальности импульсных процессов при ограничениях на образ управляющей меры* // Изв. вузов. Математика. – 1996. – № 12. – С. 1–9.
5. Дыхта В.А., Самсонюк О.Н. *Принцип максимума в негладких задачах оптимального управления с разрывными траекториями* // Изв. вузов. Математика. – 1999. – № 12. – С. 26–37.
6. Dykhta V. *Optimality conditions for impulsive processes and its applications* // Prepr. of 13th World Congress IFAC, 1996. – V. D. – P. 345–350.
7. Clarke F.H., Vinter R.B. *Optimal multiprocesses* // SIAM J. Contr. and Optim. – 1989. – V. 27. – № 5. – P. 1072–1091.
8. Кларк Ф. *Оптимизация и негладкий анализ.* – М.: Наука, 1988. – 280 с.
9. Миллер Б.М. *Условия оптимальности в задачах обобщенного управления* // Автоматика и телемеханика. – 1992. – № 5. – С. 50–58.

Иркутская государственная
экономическая академия

Поступила
31.07.2000