ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 7 (470)

УДК 517.977.5

Ю.Г. БУЛЫЧЕВ

ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

1. Введение

Характерная особенность жестких систем дифференциальных уравнений (СДУ) состоит в том [1]–[9], что даже незначительное увеличение шага интегрирования в используемых классических численных методах (типа Адамса, Рунге–Кутта и др.) может привести к резкому возрастанию ("взрыву") погрешности. В этом проявляется известное для таких СДУ противоречие между достаточно большим шагом интерполяции полученного решения и допустимым шагом интегрирования. В работах [3]–[8] предложены численные методы, допускающие увеличение шага интегрирования вне пограничного слоя. Однако в основном рассматриваются неявные методы, которые не находят широкого применения при интегрировании жестких СДУ. Более предпочтительным является метод [9], позволяющий на основе заранее найденных первых интегралов (так называемой усеченной СДУ) устранить явление жесткости и, как следствие, обеспечить требуемую устойчивость используемых численных методов. Основной недостаток указанного метода состоит в том, что априорно считается известным аналитическое выражение для первых интегралов усеченной СДУ. Очевидно, на практике такое выражение может быть построено лишь приближенно и возникающая при этом погрешность зачастую вносит существенные искажения в конечные результаты численного интегрирования жестких СДУ. В [4], [5] развит параметрический подход к устранению жесткости, основанный на идее продолжения решения СДУ по дополнительному параметру — длине дуги интегральной кривой. Основной недостаток данного подхода состоит в том, что результирующие вычислительные затраты резко возрастают, если указанная длина принимает достаточно большие значения.

В данной статье на основе указанной выше идеи продолжения решения по параметру (не обязательно по длине дуги интегральной кривой) развивается общий подход к интегрированию жестких СДУ, снимающий ряд ограничений, принятых в работах [1]–[9] и позволяющий повысить устойчивость используемых численных методов интегрирования.

2. Явление жесткости. Постановка задачи

Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \quad x(t_0) = x_0, \quad x \in X = X_1 \times \dots \times X_n \in R^n, \quad t \in [t_0, T] \subset R^1, \tag{2.1}$$

где $f(t,x)$ — n-мерная вектор-функция с компонентами $f_1(t,x), \dots, f_n(t,x)$, непрерывная по временной координате t и удовлетворяющая условию Липшица в ограниченной открытой области $G = (t_0, T) \times X$:

$$|f_i(t, x_1', x_2', \dots, x_n') - f_i(t, x_1'', x_2'', \dots, x_n'')| \le L\{|x_1' - x_1''| + |x_2' - x_2''| + \dots + |x_n' - x_n''|\}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$x_i', x_i'' \in X_i \subset R^1$, $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n = X$, L — константа Липшица.

Введем по переменной t равномерную сетку с шагом $\tau > 0$

$$\omega_\tau = \{t_j = t_0 + j \cdot \tau, \;\; j = 0, 1, \ldots, J_\tau, \;\; t_{J_\tau} \geq T\}. \tag{2.2}$$

Для решения задачи Коши (2.1) на сетке (2.2) в реальном времени наиболее подходят явные методы Адамса степени p [1], [2]

$$z_j = z_{j-1} + \tau \sum_{k=1}^{m} b_k f_{j-k}, \;\; j = m, m+1, \ldots, J_\tau, \;\; z_j \in R^n, \tag{2.3}$$

где $z_j = z(t_j)$, $f_{j-k} = f(t_{j-k}, z_{j-k})$, $t_{j-k} = t_0 + \tau(j-k)$, $\{b_k\}_{k=1}^m$ — числовые коэффициенты, не зависящие от j.

Из (2.3) видно, что для начала расчета необходимо знать m начальных значений $z_0, z_1, ..., z_{m-1}$, при этом z_0 определяется исходной задачей (2.1), а именно, полагают $z_0 = x_0$. Величины $z_1, z_2, \ldots, z_{m-1}$ можно вычислить, например, с помощью метода Рунге–Кутта. В дальнейшем будем предполагать, что начальные значения $z_0, z_1, \ldots, z_{m-1}$ заданы.

В [3] жесткость СДУ (2.1) понимается в широком смысле и связывается с наличием пограничного слоя τ_{ps}, характеризующегося тем, что значения производных вне его полагаются меньшими, чем значения производных внутри него, в N_{ps} раз, где $N_{ps} \gg 1$. При этом анализ матрицы Якоби $\frac{\partial f}{\partial x}\big|_{\substack{t=t_0\\x=x_0}}$ в задаче (2.1) позволяет убедиться в том, что для возникновения больших производных внутри пограничного слоя она должна иметь большие по модулю собственные числа.

По аналогии с [3] СДУ (2.1) будем называть жесткой на отрезке $[t_0', T']$, если при любом начальном условии (t_0, x_0) из ограниченной области $G' = [t_0', T'] \times X$ и на любом отрезке $[t_0, T] \subset [t_0', T']$ найдутся числа τ_{ps}, L_{ps} и N_{ps}, удовлетворяющие условиям

$$\begin{gathered}
\tau_{ps} \leq T - t_0;\\
0 < L_{ps} \leq \rho\{\partial f/\partial x\}\big|_{\substack{t=t_0\\x=x_0}} \leq \|\partial f/\partial x\|\big|_{\substack{t=t_0\\x=x_0}};\\
|dx_i/dt|_{t > t_0 + \tau_{ps}} \leq \frac{L_{ps}}{N_{ps}} \max_{t \in [t_0, T]} |x_i|, \quad i = 1, 2, \ldots, n; \quad N_{ps} \gg 1,
\end{gathered}$$

где $\rho\{\partial f/\partial x\}$ — спектральный радиус матрицы Якоби $\partial f/\partial x = [\partial f_i/\partial x_j, \; i, j = \overline{1, n}]$, $\|\partial f/\partial x\| = \max\limits_i \sum\limits_{k=1}^{n} |\partial f_i/\partial x_k|$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Для практических расчетов наиболее удобен следующий критерий проверки жесткости:

$$\begin{gathered}
|\lambda_i| \exp[(\operatorname{Re}\lambda_i)\tau_{ps}] \leq L_{ps} N_{ps}^{-1}, \quad \operatorname{Re}\lambda_i < 0, \;\; i = 1, 2, \ldots, n,\\
|\lambda_i| \leq L_{ps}/N_{ps}, \quad \operatorname{Re}\lambda_i \geq 0, \;\; i = 1, 2, \ldots, n,
\end{gathered} \tag{2.4}$$

где $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ — собственные числа матрицы $\partial f/\partial x\big|_{\substack{t=t_0\\x=x_0}}$, $L_{ps} = \max\limits_i |\lambda_i|$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $N_{ps} \gg 1$, $\tau_{ps} \leq T - t_0$.

Непосредственно из (2.4) следует, что в жесткой СДУ не может быть больших по модулю собственных чисел (порядка L_{ps}) с положительной действительной частью. Для собственных чисел, имеющих величину модуля порядка L_{ps}, должно иметь место неравенство

$$\exp[(\operatorname{Re}\lambda_i)\tau_{ps}] \leq N_{ps}^{-1}, \quad N_{ps} \gg 1,$$

т. е. они должны обладать большими по модулю отрицательными действительными частями.

Выявить жесткость СДУ (2.1) можно путем ее интегрирования на начальном участке, например, методом Эйлера. При этом решение с малым шагом дискретности ($\tau \leq \|\partial f/\partial x\|^{-1}\big|_{\substack{t=t_0\\x=x_0}}$) приводит к тому, что при попытке увеличения шага экспоненциально возрастает погрешность ("взрыв" погрешности).

Рассмотренное выше явление жесткости, как правило, является причиной нарушения устойчивости численных методов, привлекаемых для интегрирования СДУ (2.1). Очевидно, для обеспечения устойчивости необходимо выбирать достаточно мелкий шаг интегрирования. Это в свою очередь приводит к нерациональному использованию вычислительных средств при интегрировании жестких СДУ.

В данной статье развивается общий подход к интегрированию жестких СДУ, позволяющий существенно расширить границу области абсолютной устойчивости методов Адамса (2.3), а следовательно, значительно увеличить шаг численного интегрирования.

3. Параметрический подход к численному интегрированию с использованием регуляризирующего параметра

Суть развиваемого подхода состоит в том, что для СДУ (2.1) всегда можно указать такой скалярный параметр $y = y(t, x)$, который однозначно связан с точкой $(t, x(t))$ достаточно гладким оператором, строго монотонно возрастает с увеличением временно́й координаты $t \in [t_0, T]$ и имеет ясный физический или геометрический смысл. Например, в качестве такого параметра можно рассматривать высоту полета летательного аппарата при его подъеме, длину пройденного им пути и др. В дальнейшем параметр $y = y(t, x)$ будем называть регуляризирующим параметром (РП), поскольку именно с ним связан развиваемый ниже подход к преодолению жесткости СДУ (2.1).

Зададим РП соотношением

$$dy = \Xi^{-1}(t, F, \Psi)dt, \quad y(t_0, x_0) = y_0, \quad y_0 \in R^1, \quad F \in R^{n\times r}, \quad \Psi \in R^l, \tag{3.1}$$

где $\Xi : [t_0, T] \times R^{n\times r} \times R^l \to R^1$ — известная и достаточно гладкая функция от своих аргументов, не обращающаяся в нуль ни при каких значениях аргументов t, F и Ψ из области их определения,

$$F = F(t, x) = [f_i^{(k)}(t, x),\ i = 1, 2, \ldots, n,\ k = 0, 1, \ldots, r - 1],$$

$f_i^{(k)} = \partial^k f_i/\partial t^k$, $f_i^{(0)} = f_i$, Ψ — набор некоторых числовых параметров.

Задачу Коши (2.1) с учетом (3.1) можно свести к новой задаче Коши

$$\frac{dx}{dy} = f[t(y), x(y)]\Xi\{t(y), F[t(y), x(y)], \Psi\}, \quad x(y_0) = x_0, \tag{3.2}$$

$$\frac{dt}{dy} = \Xi\{t(y), F[t(y), x(y)], \Psi\}, \quad t(y_0) = t_0. \tag{3.3}$$

По аналогии с (2.3) для численного интегрирования СДУ (3.2), (3.3) используем m-шаговые методы Адамса степени p с постоянным шагом h и новую сетку

$$\omega_h = \{y_j = y_0 + j \cdot h,\ j = 0, 1, \ldots, J_h,\ t(y_{J_h}) \geq T\}.$$

В этом случае имеем

$$\widetilde{z}_j = \widetilde{z}_{j-1} + h\sum_{k=1}^{m} b_k \widetilde{f}_{j-k}\widetilde{\Xi}_{j-k}, \quad j = m, m+1, \ldots, J_h, \ \ \widetilde{z}_j \in R^n, \tag{3.4}$$

$$\widetilde{t}_j = \widetilde{t}_{j-1} + h\sum_{k=1}^{m} b_k \widetilde{\Xi}_{j-k}, \quad j = m, m+1, \ldots, J_h, \tag{3.5}$$

где $\widetilde{z}_j = z(y_j)$, $\widetilde{t}_j = t(y_j)$, $\widetilde{f}_{j-k} = f(\widetilde{t}_{j-k}, \widetilde{z}_{j-k})$, $\widetilde{\Xi}_{j-k} = \Xi(\widetilde{t}_{j-k}, \widetilde{F}_{j-k}, \Psi)$, $\widetilde{F}_{j-k} = F(\widetilde{t}_{j-k}, \widetilde{z}_{j-k})$.

Из (3.4) и (3.5) видно, что для начала расчета необходимо знать $2m$ начальных значений $\widetilde{z}_0, \widetilde{z}_1, \ldots, \widetilde{z}_{m-1}$ и $\widetilde{t}_0, \widetilde{t}_1, \ldots, \widetilde{t}_{m-1}$, при этом $\widetilde{z}_0 = x_0$ и $\widetilde{t}_0 = t_0$.

Введем $K(t,u)$ — матрицу Коши (матрицант) матрицы Якоби $\partial f/\partial x\big|_{\substack{t=t_0\\x=x_0}}$. Предполагая известной матрицу $K(t,u)$ с учетом [2] получаем асимптотическое разложение накопленной погрешности схемы (3.4), (3.5)

$$\begin{aligned}\widetilde{x}_j - \widetilde{z}_j = \sum_{i=p}^{\infty} h^i \int_{t_0}^{\tilde{t}_j} K(\widetilde{t}_j, t)\Xi^{-1}(t,F,\Psi)\{c_i[f^{(i)}(t,x)\Xi(t,F,\Psi) - \\ - f(t,x)\Xi^{(i)}(t,F,\Psi)] + c_{i+1}h[f^{(i+1)}(t,x)\Xi(t,F,\Psi) - \\ - f(t,x)\Xi^{(i+1)}(t,F,\Psi)]\}dt, \quad j = m, m+1, \dots, J_h, \quad (3.6)\end{aligned}$$

где $\widetilde{x}_j = x(\widetilde{t}_j)$, $\{c_i\}_{i=p}^{\infty}$ — коэффициенты, которые не зависят от h для любых достаточно малых h.

Из формулы (3.6) видно, что выбором функции $\Xi(t,F,\Psi)$ и набора числовых параметров Ψ можно влиять на погрешность вычислительной схемы (3.4), (3.5) с РП $y = y(t,x)$.

4. Рекомендации по выбору регуляризирующего параметра

Соотношение (3.1) допускает следующую конкретизацию:

$$dy = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{D_i} \sum_{j=0}^{Q} \sum_{l=0}^{L} \sum_{p=0}^{P} \psi_{ikjlp} t^l x^{2j} [f_i^{(k)}(t,x)]^{2p} \right\}^q dt, \quad (4.1)$$

где $q > 0$.

Если в качестве РП выбирается длина дуги интегральной кривой, то с учетом (4.1) имеем

$$dy = \left\{ 1 + \sum_{i=1}^{n} f_i^2(t,x) \right\}^{1/2} dt. \quad (4.2)$$

Полагая $y_0 = 0$, с учетом (3.2), (3.3) и (4.2) приходим к новой задаче Коши

$$\frac{dx}{dy} = f(t,x)\left[1 + \sum_{i=1}^{n} f_i^2(t,x)\right]^{-1/2}, \quad x(0) = x_0, \quad (4.3)$$

$$\frac{dt}{dy} = \left[1 + \sum_{i=1}^{n} f_i^2(t,x)\right]^{-1/2}, \quad t(0) = t_0. \quad (4.4)$$

Несложно убедиться, что евклидова норма правой части системы СДУ (4.3), (4.4) равна единице, что во многом благоприятствует численному интегрированию дифференциальных уравнений с особенностями в правых частях.

В ряде случаев более предпочтительным оказывается РП $y = y(t,x)$, для которого справедливо соотношение

$$dy = \left\{ 1 + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + (t^2+1) \sum_{i=1}^{n} f_i^2(t,x) \right\}^{1/2} dt.$$

Применение такого РП позволяет во многих случаях расширить область абсолютной устойчивости используемого численного метода (напр., метода Эйлера).

В следующем параграфе изучается вопрос, связанный с устранением жесткости на простом, но достаточно характерном тестовом примере.

5. Влияние регуляризирующего параметра на область устойчивости численных методов

Рассмотрим в качестве тестового примера скалярную задачу Коши

$$\frac{dx}{dt} = ax^2, \quad x(0) = x_0, \quad x_0 > 0, \quad a \in R^1, \quad a < 0, \quad t \in [0, T], \tag{5.1}$$

где $|a|$ принимает большие значения.

Если в (2.3) положить $m = 1$ и $b_k = 1$, то применительно к (5.1) получим явную разностную схему метода Эйлера

$$z_j = z_{j-1} + \tau a z_{j-1}^2 = (1 + \tau a z_{j-1}) z_{j-1}, \quad z_0 = x_0, \quad j = 1, 2, \ldots, J_\tau.$$

Очевидно, данная схема абсолютна устойчива, если $0 < 1 + \tau a z_{j-1} < 1$, при этом области абсолютной устойчивости явной схемы Эйлера соответствует неравенство $a < 0$, и, кроме того,

$$0 < \tau < \frac{1}{|a| z_{j-1}}. \tag{5.2}$$

Воспользовавшись РП вида (3.1), с учетом (4.1) примем

$$dy = \{(x \cdot dt)^2 + (dt)^2 + (dx)^2\}^{1/2}, \tag{5.3}$$

где слагаемые $(x \cdot dt)^2$ и $(dt)^2 + (dx)^2$ имеют вполне очевидный геометрический смысл. В частности, под $(dt)^2 + (dx)^2$ понимается квадрат длины элемента дуги интегральной кривой $x(t)$. Полагая $t_0 = 0$ и $y_0 = 0$, с учетом (3.2), (3.3) и (5.1), (5.3) приходим к новой задаче Коши

$$\frac{dx}{dy} = ax^2[x^2(a^2x^2 + 1) + 1]^{-1/2}, \quad x(0) = x_0, \tag{5.4}$$

$$\frac{dt}{dy} = [x^2(a^2x^2 + 1) + 1]^{-1/2}, \quad t(0) = 0. \tag{5.5}$$

В данной СДУ решение уравнения (5.5) определяется решением уравнения (5.4), поэтому анализ жесткости проведем на базе (5.4). Линеаризуя правую часть уравнения (5.4) в окрестности $x = z_{j-1}$ по аналогии с [5], получим линеаризованное уравнение

$$\frac{d\overset{*}{x}}{dy} = \frac{a z_{j-1}(z_{j-1}^2 + 2)\overset{*}{x}}{[z_{j-1}^2(a^2 z_{j-1}^2 + 1) + 1]^{3/2}}, \quad j \in 0, 1, \ldots, J_h.$$

Область устойчивости явной схемы Эйлера для этого уравнения определяется неравенством

$$0 < 1 + \frac{a h z_{j-1}(z_{j-1}^2 + 2)}{[z_{j-1}^2(a^2 z_{j-1}^2 + 1) + 1]^{3/2}} < 1,$$

где h — шаг интегрирования по РП $y = y(t, x)$. Отсюда получаем

$$0 < h < \frac{[z_{j-1}^2(a^2 z_{j-1}^2 + 1) + 1]^{3/2}}{|a| z_{j-1}(z_{j-1}^2 + 2)}. \tag{5.6}$$

Из анализа формул (5.2) и (5.6) видно, что применение РП вида (5.3) расширяет область абсолютной устойчивости явной схемы Эйлера.

Если в качестве РП рассматривать лишь длину дуги интегральной кривой

$$dy = \{(dx)^2 + (dt)^2\}^{1/2}, \tag{5.7}$$

то по аналогии с вышеизложенным несложно получить оценку

$$0 < h < \frac{(a^2 z_{j-1}^4 + 1)^{3/2}}{2|a| z_{j-1}}. \tag{5.8}$$

Анализ формул (5.6) и (5.8) показывает, что РП вида (5.3) обеспечивает максимальный эффект при больших значениях z_{j-1}, $j \in 0, 1, \ldots, J_h$, и более предпочтителен по сравнению с РП вида (5.7).

Несложно убедиться, что еще более широкие возможности в плане преодоления жесткости СДУ (2.1) открывает РП $y = y(t)$, определяемый равенством

$$dy = \{\psi_1 (x \cdot dt)^2 + \psi_2 (t dx)^2 + \psi_3 (dt)^2 + \psi_4 (dx)^2\}^{1/2},$$

где ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4 — произвольные положительные постоянные, выбираемые с учетом (3.6) из условия достижения требуемой точности вычислений.

Вернемся теперь к рассмотрению РП вида (5.3). Очевидно , что его применение эффективно лишь в том случае, если, двигаясь по параметру y, можно прийти из начальной точки $(0, x_0)$ интегральной кривой $x(t)$ в конечную точку $(T, x(T))$ за меньшее число шагов, чем при движении по параметру t. Поскольку при больших значениях $|a|$ имеет место неравенство

$$\int_0^T x(t) dt \ll \int_0^T \left[1 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right]^{1/2} dt,$$

при этом величина $\int\limits_0^T x(t) dt$ близка к нулю, то для обоснования необходимости применения РП вида (5.3) достаточно доказать неравенство $h_{\min} \cos\varphi_j > \tau_{\min}$, где φ_j — угол между касательной к кривой $x(t)$ и осью t в точке t_j, а $h_{\min}$ и $\tau_{\min}$ — наименьшие шаги интегрирования по переменным y и t соответственно, при которых итерационный процесс, описываемый явной формулой Эйлера, перестает сходиться.

Заметив, что

$$\tau_{\min} = 2\frac{1}{|a| z_{j-1}}, \quad h_{\min} = \frac{(a^2 z_{j-1}^4 + 1)^{3/2}}{2|a| z_{j-1}},$$
$$\cos\varphi_j = \left[1 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2_{t=t_j}\right]^{-1/2} = [1 + a^2 \cdot z_{j-1}^4]^{-1/2},$$

получим

$$\tau_{\min}^{-1} h_{\min} \cos\varphi_j = \frac{a^2 z_{j-1}^4 + 1}{2} > 1.$$

Последнее неравенство доказывает вычислительную эффективность развиваемого подхода.

6. Влияние регуляризирующего параметра на спектральные характеристики

Исследуем теперь, как влияет применение РП на спектральные характеристики тестовой задачи Коши

$$\frac{dx_1}{dt} = a_1 x_1, \quad x_{10} = x_1(t_0), \tag{6.1}$$
$$\frac{dx_2}{dt} = a_2 x_2, \quad x_{20} = x_2(t_0). \tag{6.2}$$

По аналогии с (5.3) для СДУ (6.1), (6.2) используем следующий РП:

$$dy = \{(x_1 \cdot dt)^2 + (x_2 \cdot dt)^2 + (dt)^2 + (dx_1)^2 + (dx_2)^2\}^{1/2}.$$

В этом случае вместо (6.1), (6.2) получаем новую задачу Коши

$$\frac{dx_1}{dy} = a_1x_1[1 + (a_1^2 + 1)x_1^2 + (a_2^2 + 1)x_2^2]^{-1/2}, \quad x_1(y_0) = x_{10}, \tag{6.3}$$

$$\frac{dx_2}{dy} = a_2x_2[1 + (a_1^2 + 1)x_1^2 + (a_2^2 + 1)x_2^2]^{-1/2}, \quad x_2(y_0) = x_{20}, \tag{6.4}$$

$$\frac{dt}{dy} = [1 + (a_1^2 + 1)x_1^2 + (a_2^2 + 1)x_2^2]^{-1/2}, \quad t(y_0) = t_0. \tag{6.5}$$

Определяющими в (6.3), (6.4) и (6.5) являются уравнения (6.3), (6.4), поскольку правая часть уравнения (6.5) является следствием первых двух.

По аналогии с [5] для анализа спектральных характеристик СДУ (6.3), (6.4) воспользуемся линеаризованной СДУ

$$\frac{d\overset{*}{x}_1}{dy} = \gamma(a_{11}\overset{*}{x}_1 + a_{12}\overset{*}{x}_2), \tag{6.6}$$

$$\frac{d\overset{*}{x}_2}{dy} = \gamma(a_{21}\overset{*}{x}_1 + a_{22}\overset{*}{x}_2), \tag{6.7}$$

где $a_{11} = a_1[1+(a_2^2+1)x_{2j}^2]$, $a_{12} = -a_1(a_2^2+1)x_{1j}x_{2j}$, $a_{21} = -(a_1^2+1)a_2x_{1j}x_{2j}$, $a_{22} = a_2[1+(a_1^2+1)x_{1j}^2]$, $\gamma = [1 + (a_1^2 + 1)x_{1j}^2 + (a_2^2 + 1)x_{2j}^2]^{-3/2}$.

В последних формулах под $(x_{1j}, x_{2j}) \in R^2$ понимается такая точка, в малой окрестности которой линеаризована СДУ (6.3), (6.4).

Если $|a_1| \gg |a_2|$, то для корней ρ_1 и ρ_2 соответствующего характеристического уравнения СДУ (6.6), (6.7) справедливо асимптотическое представление

$$\rho_{1(2)} = 2^{-1}\gamma\{a_{11} + a_{22} \pm [(a_{11} - a_{22})^2 + 4\varphi a_{21}^2]^{1/2}\} = \\ = 2^{-1}\gamma\{a_{11} + a_{22} \pm (a_{11} - a_{22})[1 + 2\varphi a_{21}^2(a_{11} - a_{22})^{-1}]\} + O(\varphi^2),$$

где $\varphi = a_2/a_1$.

Для исходной СДУ (6.1), (6.2) спектральное число обусловленности $K_t = |a_1| \cdot |a_2|^{-1} = |\varphi|^{-1}$, в то время как для СДУ (6.6), (6.7) при $|\varphi| \ll 1$ оно равно $K_y = |\rho_1| \cdot |\rho_2|^{-1} = |a_{11} + \varphi a_{21}^2(a_{11} - a_{22})^{-1}|\,|a_{22} - \varphi a_{21}^2(a_{11} - a_{22})^{-1}|^{-1}$.

По аналогии с [5] несложно показать, что $K_y < K_t$.

Теперь оценим разброс спектра исходной СДУ (6.1), (6.2) и новой СДУ (6.6), (6.7). Для СДУ (6.1), (6.2) разброс равен $S_t = |a_1 - a_2|$, а для СДУ (6.6), (6.7) имеем

$$S_y = |\rho_1 - \rho_2| = |\gamma(a_{11} - a_{22})[1 - 2\varphi a_{21}^2(a_{11} - a_{22})^{-2}]| + O(\varphi^2).$$

Пренебрегая членами высшего порядка малости, воспользуемся более грубыми оценками числа обусловленности и разброса

$$\rho_1 = \gamma a_{11}, \quad \rho_2 = \gamma a_{22},$$

$$K_y = K_t|1 + (a_2^2 + 1)x_{2j}^2|\,|1 + (a_1^2 + 1)x_{1j}^2|^{-1},$$

$$S_y = S_t|1 + (a_2^2 + 1)x_{2j}^2 - a_1a_2x_{1j}^2|\,|1 + (a_1^2 + 1)x_{1j}^2 + (a_2^2 + 1)x_{2j}^2|^{-3/2}.$$

Из последнего выражения следует асимптотическая оценка $S_y < S_t$.

Несложно, по аналогии с [5], получить соответствующие оценки для спектральных характеристик СДУ (6.6), (6.7) в случае, когда $|a_1| > |a_2|$, но не обязательно $|a_1| \gg |a_2|$. Анализ показывает, что и в этом случае уменьшаются собственные значения, число обусловленности и разброс матрицы СДУ.

7. Заключение

Полученные в статье результаты могут найти применение при решении широкого класса жестких СДУ в рамках опорно-проективной теории [10], позволяющей получать приближенные аналитические решения в заданной ограниченной области в параметрической форме. Поскольку данная теория базируется на применении конечного семейства опорных решений исходной СДУ, то построение последних с помощью развитых нежестких алгоритмов обеспечит в конечном итоге высокую устойчивость вычислительных процедур, возникающих при решении жестких СДУ.

Литература

1. Самарский А.А., Гулин А.В. *Численные методы.* – М.: Наука, 1989. – 432 с.
2. Иванов В.В. *Методы вычислений на ЭВМ. Справочное пособие.* – Киев: Наук. думка, 1986. – 583 с.
3. Ракитский Ю.В., Устинов С.М., Черноруцкий Н.Г. *Численные методы решения жестких систем.* – М.: Наука, 1979. – 208 с.
4. Григолюк Э.И., Шалашилин В.И. *Проблемы нелинейного деформирования.* – М.: Наука, 1988. – 230 с.
5. Кузнецов Е.Б., Шалашилин В.И. *Задача Коши как задача продолжения решения по параметру* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1993. – Т. 33. – № 12. – С. 1792–1805.
6. Артемьев С.С. *Устойчивость в среднем квадратичном численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений* // Докл. РАН. – 1993. – Т. 333. – № 4. – С. 421–422.
7. Curtiss C.F., Hirschfelder J.O. *Integration of stiff equation* // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. – 1952. – V.38. – № 3. – P. 235–242.
8. Федоренко Р.П. *Введение в вычислительную физику.* – М.: МФТИ, 1994. – 526 с.
9. Булычев Ю.Г., Елисеев А.В. *Использование метода опорных интегральных кривых для преодоления жесткости уравнений нелинейной фильтрации* // Теория и системы управления. – 1998. – № 3. – С. 8–14.
10. Булычев Ю.Г. *Общая теория приближенных методов построения параметризованных решений линейных дифференциальных уравнений* // Дифференц. уравнения. – 1998. – Т. 34. – № 3. – С. 395–402.

Ростовский военный институт ракетных войск

Поступила
02.12.1998