ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 4 (443)

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.987

И.Г. ГАНИЕВ

О ВЕКТОРНЫХ МЕРАХ СО ЗНАЧЕНИЯМИ В ПРОСТРАНСТВАХ БАНАХА-КАНТОРОВИЧА

Пусть $(\Omega, \Sigma, \lambda)$ — пространство с конечной мерой, $L_0(\Omega)$ — кольцо классов эквивалентности измеримых функций на $(\Omega, \Sigma, \lambda)$, X – измеримое банахово расслоение с лифтингом над Ω, $L_0(\Omega, X)$ — пространства Банаха-Канторовича [1], $\widetilde{\nabla}$ — булева алгебра, $\nu : \widetilde{\nabla} \to L_0(\Omega)$ — строго положительная $L_0(\Omega)$-значная счетно-аддитивная мера на $\widetilde{\nabla}$ [2]; $\rho(e, g) = \nu(e\Delta g)$ является метрикой на $\widetilde{\nabla}$ со значениями в $L_0(\Omega)$.

Основным результатом работы является разложение булевой алгебры с $L_0(\Omega, X)$-значной мерой с конечной вариацией в измеримое расслоение полных булевых алгебр с $X(w)$-значными мерами.

Рассмотрим отображение ∇, ставящее в соответствие каждой точке $w \in \Omega$ некоторую полную булеву алгебру ∇_w со строго положительной счетно-аддитивной числовой мерой ν_w. Тогда (∇_w, ρ_w), где $\rho_w(e, g) = \nu_w(e\Delta g)$, являются полными метрическими пространствами ([3], с. 206).

Сечением ∇ назовем функцию e, определенную почти всюду на Ω и принимающую значения $e(w) \in \nabla_w$ для $w \in \operatorname{dom} e$, где $\operatorname{dom} e$ — область определения e.

Пусть L — некоторое множество сечений.

Определение 1. Пару (∇, L) назовем измеримым расслоением (ИР) булевых алгебр над Ω, если

1) функция $w \in \operatorname{dom} e \cap \operatorname{dom} g \to \rho_w(e(w), g(w)) = \nu_w(e(w)\Delta g(w))$ измерима при $e, g \in L$;
2) если $e \in L$, то $Ce \in L$, где $Ce : w \in \operatorname{dom} e \to Ce(w)$;
3) если $e_1, e_2 \in L$, то $e_1 \vee e_2 \in L$, где $e_1 \vee e_2 : w \in \operatorname{dom} e_1 \cap \operatorname{dom} e_2 \to e_1(w) \vee e_2(w)$;
4) для каждой точки $w \in \Omega$ множество $\{e(w) \mid e \in L,\ w \in \operatorname{dom} e\}$ плотно в ∇_w.

Аналогично [1] вводим множество $M(\Omega, \nabla)$ всех измеримых сечений, а через $\widehat{\nabla}$ обозначим факторизацию $M(\Omega, \nabla)$ относительно равенства почти всюду.

Введем в $\widehat{\nabla}$ отношение частичного порядка, положив $\widehat{e} \le \widehat{g}$ тогда и только тогда, когда $e(w) \le g(w)$ для почти всех $w \in \Omega$, где e, g — какие-нибудь представители классов $\widehat{e}$, $\widehat{g}$.

Определим отображение $\widehat{\nu} : \widehat{\nabla} \to L_0(\Omega)$ по формуле $\widehat{\nu}(\widehat{e}) = \widehat{f}$, где $\widehat{f}$ — класс, содержащий функцию $f(w) = \nu_w(e(w))$.

Предложение. *Относительно введенного частичного порядка $\widehat{\nabla}$ является полной булевой алгеброй, а $\widehat{\nu}$ — $L_0(\Omega)$-значной строго положительной счетно-аддитивной мерой на $\widehat{\nabla}$.*

Теорема 1. *Если $\widetilde{\nabla}$ — булева алгебра со строго положительной счетно-аддитивной $L_0(\Omega)$-значной мерой $\widetilde{\nu}$, то существует такое ИР ∇ полных булевых алгебр ∇_w со строго положительными числовыми мерами $\widetilde{\nu}_w$, что $\widetilde{\nabla}$ изометрически изоморфно правильной булевой подалгебре в $\widehat{\nabla}$.*

Пусть X — измеримое банахово расслоение (ИБР), $M(\Omega, X)$ — множество измеримых сечений и $L_0(\Omega, X)$ — факторизация $M(\Omega, X)$ относительно равенства почти всюду [1].

Пусть $L^\infty(\Omega)$ — алгебра классов эквивалентности существенно ограниченных функций, $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$ — алгебра ограниченных измеримых функций на Ω. Введем обозначения $\mathcal{L}^\infty(\Omega, X) = \{u \in M(\Omega, X) : \|u(w)\|_{X(w)} \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)\}$, $L^\infty(\Omega, X) = \{\widehat{u} \in L_0(\Omega, X) : u \in \mathcal{L}^\infty(\Omega, X)$ при $u \in \widehat{u}\}$, где $\widehat{u}$ — класс эквивалентности, содержащий u.

Пусть $p : L^\infty(\Omega) \to \mathcal{L}^\infty(\Omega)$ — лифтинг [1].

Определение 2 ([1], с. 32). Модульный гомоморфизм $l : L^\infty(\Omega, X) \to \mathcal{L}^\infty(\Omega, X)$ называется векторнозначным лифтингом, ассоциированным с лифтингом p, если

а) $l(\widehat{u}) \in \widehat{u}$ и $|l(\widehat{u})| = p(|\widehat{u}|)$ для всех $\widehat{u} \in L^\infty(\Omega, X)$, где $|u|(w) = \|u(w)\|_{X(w)}$;
б) множество $\{l(\widehat{u})(w) \mid \widehat{u} \in L^\infty(\Omega, X)\}$ плотно в $X(w)$ для всех $w \in \Omega$.

Пусть U — пространство Банаха-Канторовича, нормированное посредством $L_0(\Omega)$ [4]. Известно [1], что для U существует единственное с точностью до изоморфизма ИБР X с векторнозначным лифтингом l, ассоциированным с лифтингом p, такое, что $L_0(\Omega, X)$ линейно изометрически изоморфно U.

Определение 3. Отображение $m : \widetilde{\nabla} \to U$ называется U-значной счетно-аддитивной мерой с конечной вариацией, если

1) $m(\vee e_i) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} m(e_i)$, $e_i \wedge e_j = 0$ при $i \neq j$ (сходимость ряда понимается в смысле (во)-сходимости ([4], с. 32));
2) для каждого $e \in \widetilde{\nabla}$ существует $|m|(e) = \sup\Big\{ \sum\limits_{i=1}^{n} |m(e_i)| : e = \bigvee\limits_{i=1}^{n} e_i,\ e_i \wedge e_j = 0,\ i \neq j,\ j = 1, \ldots, n,\ n \in N\Big\}$.

Примеры. 1. Пусть $T : L_1[0,1] \to U$ — линейный оператор с абстрактной нормой. Положим $m(A) = T(\chi_A)$ для любого борелевского $A \subset [0,1]$. Тогда m является U-значной мерой с конечной вариацией.

2. Пусть $\widetilde{\nabla}$ — булева алгебра борелевских подмножеств $[0,1]$, P — $L_0(\Omega)$-значная мера на $\widetilde{\nabla}$, $L_1(\widetilde{\nabla}, L_0)$ — множество L_0-значных функций, интегрируемых по мере P, $\nabla_0 \subset \widetilde{\nabla}$ — булева σ-подалгебра, P_1 — сужение P на ∇_0. Тогда существует такая $L_1(\nabla_0, L_0)$-значная мера с конечной вариацией P^{∇_0} на $\widetilde{\nabla}$, что $\int\limits_g P^{\nabla_0}(e) dP_1 = P(e \wedge g)$, $g \in \nabla_0$ ([5], [6]).

U-значная мера называется точной, если из $m(e) = 0$ следует $e = 0$. Для такой меры $|m|$ является строго положительной $L_0(\Omega)$-значной мерой.

Теорема 2. *Пусть $m : \widetilde{\nabla} \to U$ — точная U-значная счетно-аддитивная мера с конечной вариацией. Тогда существует ИР ∇ полных булевых алгебр ∇_w с $X(w)$-значными счетно-аддитивными мерами μ_w такое, что $\widetilde{\nabla}$ изометрически изоморфно правильной булевой подалгебре в $\widehat{\nabla}$ и $m(e)(w) = \mu_w(e(w))$ почти всюду для любого $e \in \widetilde{\nabla}$.*

Доказательство. Рассмотрим $L^\infty(\Omega, X)$-значную меру, определенную равенством $m^0(e) = \frac{m(e)}{1+|m|(1)}$ с вариацией $|m^0|(e) \leq \frac{|m|(e)}{1+|m|(1)}$.

Пусть l — векторнозначный лифтинг в $L^\infty(\Omega, X)$, ассоциированный с лифтингом p в $L^\infty(\Omega)$. Отображение $m_w^0 : \widetilde{\nabla} \to X(w)$, определенное равенством $m_w^0(e) = l(m^0(e))(w)$ для любого $e \in \widetilde{\nabla}$, является $X(w)$-значной конечно-аддитивной функцией на $\widetilde{\nabla}$ для всех $w \in \Omega$. Из свойств лифтингов l и p следует $|m_w^0|(e) \leq \left\| \frac{|m|(e)}{1+|m|(1)} \right\|_{L^\infty(\Omega)}$ для всех $w \in \Omega$, т. е. m_w^0 имеет конечную вариацию. Рассмотрим идеал $I_0^w = \{e \mid e \in \widetilde{\nabla},\ |m_w^0|(e) = 0\}$ в $\widetilde{\nabla}$ и фактор-алгебру $\nabla_0^w = \widetilde{\nabla}/I_0^w$. Определим равенством $\overline{m}_w^0(\overline{e}) = m_w^0(e)$ конечно-аддитивную $X(w)$-значную меру на ∇_0^w, где $\overline{e}$ — класс из

∇_0^w, содержащий e. Ясно, что определение корректно и $|\overline{m}_w^0|$ — строго положительная числовая мера на ∇_0^w. Пополним метрическое пространство (∇_0^w, ρ_w^0), где $\rho_w^0(e_w^0, g_w^0) = |\overline{m}_w^0|(e_w^0 \Delta g_w^0)$, и пополнение обозначим через ∇_w. Тогда ∇_w — полная булева алгебра с $X(w)$-значной счетно-аддитивной мерой m_w с конечной вариацией, которая является продолжением $\overline{m}_w^0$ ([7], с. 62, теорема 1).

Положим $\mu_w = (1 + |m|(1))m_w$. Тогда $(\nabla_w, |\mu_w|)$ есть ИР ∇ полных булевых алгебр и $\widetilde{\nabla}$ изометрически изоморфно правильной булевой подалгебре в $\widehat{\nabla}$ (теорема 1). Из равенства $m^0(e)(w) = l(m^0(e))(w) = m_w^0(e) = \overline{m}_w^0(\overline{e}) = m_w(e(w))$ получим, что $m(e)(w) = \mu_w(e(w))$ почти всюду для любого $e \in \widetilde{\nabla}$. $\square$

Автор благодарен профессору В.И. Чилину за полезное обсуждение результатов настоящей работы.

Литература

1. Гутман А.Е. *Измеримые банаховы расслоения и весовые операторы* // Тр. 5-й зимн. школы по матем. программир. и смежн. вопросам. – Новосибирск, 1990. – С. 30–32.
2. Сарымсаков Т.А., Рубштейн Б. А., Чилин В.И. *Полные тензорные произведения топологических полуполей* // ДАН СССР. – 1974. – Т. 216. – № 6. – С. 1226–1228.
3. Владимиров Д.А. *Булевы алгебры.* – М.: Наука, 1969. – 320 с.
4. Кусраев А.Г. *Векторная двойственность и ее приложения.* – Новосибирск: Наука, 1985. – 256 с.
5. Ганиев И.Г., Сайдалиев З. *Теорема Радона-Никодима для векторных мер со значениями в K-пространствах измеримых функций* // УМН. – 1995. – Т. 50. – Вып. 2. – С. 209–210.
6. Ганиев И.Г. *Сходимость мартингалов со значениями в пространстве $L_0(\Omega, \Sigma, \lambda)$* // ДАН УзбССР. – 1988. – № 1. – С. 9–10.
7. Dinculeanu N. *Vector measures.* – Berlin, 1966. – 432 p.

Ташкентский государственный университет

Поступила 05.08.1997