ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 2 (465)

УДК 512.548

А.М. ГАЛЬМАК

ПОЛИАДИЧЕСКИЕ АНАЛОГИ ТЕОРЕМ КЭЛИ И БИРКГОФА

Исторически n-арные группы возникли как обобщение понятия группы. Поэтому естественным выглядит то, что одной из важных задач теории n-арных групп является нахождение результатов-аналогов для соответствующих теорем теории групп. При этом один и тот же бинарный результат может иметь несколько различных n-арных аналогов. В этом можно убедиться на примере теоремы Кэли, n-арные аналоги для которой из [1] и [2] не совпадают, хотя оба подхода основаны на использовании обычных, т. е. бинарных подстановок. Между тем, при изучении n-арных групп наряду с бинарными подстановками рассматриваются [3], [4] и их n-арные аналоги — конечные последовательности обычных подстановок. Поэтому вполне естественной является следующая задача: получить n-арный аналог теоремы Кэли, в которой роль симметрической группы играла бы n-арная группа n-арных подстановок.

Доказанная в данной работе теорема решает поставленную задачу в самом общем виде. При этом аналог теоремы Кэли из [1] ввиду того, что при его получении неявно использовались n-арные подстановки, находится среди следствий этой теоремы, каждое из которых само является n-арным аналогом теоремы Кэли.

Пусть A — n-арная группа с n-арной операцией f. На множестве A^{n-1} определим n-арную операцию g аналогично n-арной операции, введенной Постом для n-арных подстановок,

$$g((a'_1,\ldots,a'_{n-1}),(a''_1,\ldots,a''_{n-1}),\ldots,(a^{(n)}_1,\ldots,a^{(n)}_{n-1})) =$$
$$= (f(a'_1,a''_2,\ldots,a^{(n)}_{n-1},a^{(n)}_1), f(a'_2,\ldots,a^{(n-2)}_{n-1},a^{(n-1)}_1,a^{(n)}_2),\ldots,f(a'_{n-1},a''_1,\ldots,a^{(n)}_{n-1})).$$

Ясно, что декартова степень A^{n-1} вместе с n-арной операцией g является n-арной группой. В n-арной группе A^{n-1} выделим подмножество $A_0 = \{(\underbrace{a,\ldots,a}_{n-1}) \mid a\in A\}$. Так как

$$g((\underbrace{a_1,\ldots,a_1}_{n-1}),\ldots,(\underbrace{a_n,\ldots,a_n}_{n-1})) = (f(a_1,\ldots,a_n),\ldots,f(a_1,\ldots,a_n)) \in A_0,$$

то множество A_0 замкнуто относительно операции g.

Предложение 1. *A_0 вместе с n-арной операцией g является n-арной группой, изоморфной n-арной группе A.*

Доказательство. Определим отображение $\alpha : A\to A_0$ по правилу $\alpha : a\mapsto (\underbrace{a,\ldots,a}_{n-1})$. Ясно, что α — биекция. Так как

$$\alpha(f(a_1,\ldots,a_n)) = (\underbrace{f(a_1,\ldots,a_n),\ldots,f(a_1,\ldots,a_n)}_{n-1}) =$$
$$= g((\underbrace{a_1,\ldots,a_1}_{n-1}),\ldots,(\underbrace{a_n,\ldots,a_n}_{n-1})) = g(\alpha(a_1),\ldots,\alpha(a_n)),$$

то α — изоморфизм n-арной группы A на n-арную группу A_0. □

Для n-арной группы A с n-арной операцией f на множестве A^i ($i = 1, \ldots, n-1$) определим отношение Θ_i по правилу $(a_1, ..., a_i)\Theta_i(b_1, ..., b_i)$ тогда и только тогда, когда $f(a_1, ..., a_i, x_{i+1}, ..., x_n) = f(b_1, \ldots, b_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ для любых $x_{i+1}, \ldots, x_n \in A$. Отношение Θ_i является эквивалентностью на A^i ([3], с. 17; [4], с. 216–218). Класс эквивалентности, определяемый элементом $(a_1, \ldots, a_i)$, обозначим через $\Theta_i[a_1, \ldots, a_i]$, положим также $A_i = A^i/\Theta_i$. Можно показать, что

$$A_i = \{\Theta_i[a_1, \ldots, a_{i-1}, c] \mid c \in A\} = \{\Theta_i[c, a_1, \ldots, a_{i-1}] \mid c \in A\}, \tag{1}$$

где $a_1, \ldots, a_{i-1}$ — фиксированные элементы из A.

Пусть $\sigma = (1, 2, \ldots, n-1)$ — циклическая подстановка. Для произвольного элемента $c \in A$ и любого $i = 1, \ldots, n-1$ определим отображения $r_{ci} : A_i \to A_{\sigma(i)}$, $l_{ci} : A_i \to A_{\sigma(i)}$ по формулам

$$\begin{gathered}
r_{ci}(\Theta_i[a_1, \ldots, a_i]) = \Theta_{i+1}[a_1, \ldots, a_i, c], \quad i = 1, \ldots, n-2, \\
r_{c(n-1)}(\Theta_{n-1}[a_1, \ldots, a_{n-1}]) = \Theta_1[f(a_1, \ldots, a_{n-1}, c)], \\
l_{ci}(\Theta_i[a_1, \ldots, a_i]) = \Theta_{i+1}[c, a_1, \ldots, a_i], \quad i = 1, \ldots, n-2, \\
l_{c(n-1)}(\Theta_{n-1}[a_1, \ldots, a_{n-1}]) = \Theta_1[f(c, a_1, \ldots, a_{n-1})].
\end{gathered}$$

Используя (1), можно показать, что r_{ci} и l_{ci} — биекции.

Положим

$$\begin{gathered}
r_{c_1,\ldots,c_{n-1}} = (r_{c_1 1}, \ldots, r_{c_{n-1}(n-1)}), \quad R(A) = \{r_{c_1,\ldots,c_{n-1}} \mid c_1, \ldots, c_{n-1} \in A\}, \\
l_{c_1,\ldots,c_{n-1}} = (l_{c_1 1}, \ldots, l_{c_{n-1}(n-1)}), \quad L(A) = \{l_{c_1,\ldots,c_{n-1}} \mid c_1, \ldots, c_{n-1} \in A\}.
\end{gathered}$$

Ясно, что $r_{c_1,\ldots,c_{n-1}}$ и $l_{c_1,\ldots,c_{n-1}}$ для любых $c_1, \ldots, c_{n-1} \in A$ являются n-арными подстановками. Поэтому $R(A)$ и $L(A)$ являются подмножествами множества $S_{A_1,\ldots,A_{n-1}}$ всех n-арных подстановок последовательности $(A_1, \ldots, A_{n-1})$.

На множестве $R(A)$ определим n-арную операцию h по правилу

$$h(r_{c'_1,\ldots,c'_{n-1}}, r_{c''_1,\ldots,c''_{n-1}}, \ldots, r_{c_1^{(n)},\ldots,c_{n-1}^{(n)}}) = r_{f(c'_1, c''_2, \ldots, c_{n-1}^{(n-1)}, c_1^{(n)}), f(c'_2, \ldots, c_{n-1}^{(n-2)}, c_1^{(n-1)}, c_2^{(n)}), \ldots, f(c'_{n-1}, c''_1, \ldots, c_{n-1}^{(n)})},$$

где

$$r_{c_1^{(j)},\ldots,c_{n-1}^{(j)}} = (r_{c_1^{(j)}1}, \ldots, r_{c_{n-1}^{(j)}(n-1)}), \quad j = 1, \ldots, n.$$

Предложение 2. *Множество $R(A)$ вместе с n-арной операцией h является n-арной группой.*

Доказательство. Легко заметить, что n-арная операция h совпадает с ассоциативной n-арной операцией, определенной Постом на множестве $S_{A_1,\ldots,A_{n-1}}$ всех n-арных подстановок последовательности $(A_1, \ldots, A_{n-1})$ произвольных множеств одинаковой мощности.

Полагая $c'_1 = x_1$ — решение уравнения $f(x_1, c''_2, \ldots, c_{n-1}^{(n-1)}, c_1^{(n)}) = c_1, \ldots, c'_{n-1} = x_{n-1}$ — решение уравнения $f(x_{n-1}, c''_1, \ldots, c_{n-1}^{(n)}) = c_{n-1}$, убеждаемся, что $u = r_{c'_1,\ldots,c'_{n-1}}$ является решением уравнения

$$h(u, r_{c''_1,\ldots,c''_{n-1}}, \ldots, r_{c_1^{(n)},\ldots,c_{n-1}^{(n)}}) = r_{c_1,\ldots,c_{n-1}}.$$

Полагая $c_1^{(n)} = y_1$ — решение уравнения $f(c'_1, c''_2, \ldots, c_{n-1}^{(n-1)}, y_1) = c_1, \ldots, c_{n-1}^{(n)} = y_{n-1}$ — решение уравнения $f(c'_{n-1}, c''_1, \ldots, c_{n-2}^{(n-1)}, y_{n-1}) = c_{n-1}$, убеждаемся, что $v = r_{c_1^{(n)},\ldots,c_{n-1}^{(n)}}$ является решением уравнения

$$h(r_{c'_1,\ldots,c'_{n-1}}, \ldots, r_{c_1^{(n-1)},\ldots,c_{n-1}^{(n-1)}}, v) = r_{c_1,\ldots,c_{n-1}}. \quad \square$$

На $L(A)$ n-арная операция h определяется так же, как на $R(A)$, и аналогично доказывается, что множество $L(A)$ вместе с n-арной операцией h является n-арной группой.

Определение. Элементы множества $R(A)$ назовем правыми n-арными сдвигами n-арной группы A. Элементы множества $L(A)$ назовем левыми n-арными сдвигами n-арной группы A.

Среди всех n-арных сдвигов выделим правые n-арные сдвиги вида $(r_{c1}, \dots, r_{c(n-1)}) = r_{\underbrace{c,\dots,c}_{n-1}} = r_c$ и левые n-арные сдвиги вида $(l_{c1}, \dots, l_{c(n-1)}) = l_{\underbrace{c,\dots,c}_{n-1}} = l_c$. Положим $R_0(A) = \{r_c \mid c \in A\}$, $L_0(A) = \{l_c \in c \in A\}$.

Предложение 3. *Множества $R_0(A)$ и $L_0(A)$ являются n-арными подгруппами соответственно n-арных групп $R(A)$ и $L(A)$.*

Доказательство. Согласно определению n-арной операции h для любых $r_{c_1}, \dots, r_{c_n} \in R_0(A)$ будем иметь

$$h(r_{c_1}, \dots, r_{c_n}) = h(r_{\underbrace{c_1,\dots,c_1}_{n-1}}, \dots, r_{\underbrace{c_n,\dots,c_n}_{n-1}}) = r_{\underbrace{f(c_1,\dots,c_n),\dots,f(c_1,\dots,c_n)}_{n-1}} = r_{f(c_1,\dots,c_n)},$$

т. е. $h(r_{c_1}, \dots, r_{c_n}) = r_{f(c_1,\dots,c_n)}$. Следовательно, множество $R_0(A)$ замкнуто относительно ассоциативной n-арной операции h.

Разрешимость уравнений

$$h(u, r_{c_2}, \dots, r_{c_n}) = r_c, \quad h(r_{c_1}, \dots, r_{c_{n-1}}, v) = r_c$$

является следствием разрешимости в n-арной группе A уравнений

$$f(x, c_2, \dots, c_n) = c, \quad f(c_1, \dots, c_{n-1}, y) = c.$$

Мы показали, что $R_0(A)$ — n-арная подгруппа n-арной группы $R(A)$. Для $L_0(A)$ доказательство проводится аналогично. $\square$

Замечание. Ясно, что при $n = 2$ группы $R(A)$ и $R_0(A)$, соответственно группы $L(A)$ и $L_0(A)$, совпадают.

Пост заметил ([4], с. 248), что если равномощные множества $A_1, \dots, A_{n-1}$ попарно не пересекаются, то всякой n-арной подстановке $t = (t_1, \dots, t_{n-1})$ последовательности $(A_1, \dots, A_{n-1})$ можно поставить в соответствие бинарную подстановку τ множества $\bigcup\limits_{i=1}^{n-1} A_i$, которая действует на A_i так же, как t_i. Обозначив через $\widetilde{S}_{A_1,\dots,A_{n-1}}$ множество всех таких подстановок и определив n-арную операцию $\widetilde{h}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) = \tau_1\tau_2\dots\tau_n$ для любых $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n \in \widetilde{S}_{A_1,\dots,A_{n-1}}$, можно показать, что $\widetilde{S}_{A_1,\dots,A_{n-1}}$ вместе с n-арной операцией $\widetilde{h}$ является n-арной группой, изоморфной n-арной группе $S_{A_1,\dots,A_{n-1}}$.

В n-арной группе $\widetilde{S}_{A_1,\dots,A_{n-1}}$ естественно выделяются n-арные подгруппы $\widetilde{R}(A)$, $\widetilde{L}(A)$, $\widetilde{R}_0(A)$ и $\widetilde{L}_0(A)$, которые изоморфны соответственно n-арным группам $R(A)$, $L(A)$, $R_0(A)$ и $L_0(A)$.

Теорема 1. *Для всякой n-арной группы $\langle A, f\rangle$ существует изоморфизм n-арной группы $\langle A^{n-1}, g\rangle$ на n-арную группу $\langle R(A), h\rangle$.*

Доказательство. Определим отображение $\beta : A^{n-1} \to R(A)$ по правилу

$$\beta : (c_1, \dots, c_{n-1}) \mapsto r_{c_1,\dots,c_{n-1}}.$$

Ясно, что β — сюръекция. Предположим, что $r_{c_1,\dots,c_{n-1}} = r_{b_1,\dots,b_{n-1}}$. Это означает, что $r_{c_i i} = r_{b_i i}$ для любого $i = 1, \dots, n-1$, т. е.

$$r_{c_i i}(\Theta_i[a_1, \dots, a_i]) = r_{b_i i}(\Theta_i[a_1, \dots, a_i])$$

для любого класса эквивалентности $\Theta_i[a_1, \dots, a_i] \in A_i$. Из последнего равенства имеем

$$\begin{aligned} \Theta_{i+1}[a_1, \dots, a_i, c_i] &= \Theta_{i+1}[a_1, \dots, a_i, b_i] && \text{при } i = 1, \dots, n-2; \\ \Theta_1[f(a_1, \dots, a_{n-1}, c_{n-1})] &= \Theta_1[f(a_1, \dots, a_{n-1}, b_{n-1})] && \text{при } i = n-1, \end{aligned}$$

откуда вытекает

$$(a_1, \ldots, a_i, c_i)\Theta_{i+1}(a_1, \ldots, a_i, b_i) \quad \text{при} \ \ i = 1, \ldots, n-2;$$
$$f(a_1, \ldots, a_{n-1}, c_{n-1}) = f(a_1, \ldots, a_{n-1}, b_{n-1}) \quad \text{при} \ \ i = n-1.$$

Учитывая определение отношения Θ_i, окончательно получаем $c_i = b_i$ для любого $i = 1, \ldots, n-1$, т. е. $(c_1, \ldots, c_{n-1}) = (b_1, \ldots, b_{n-1})$. Мы показали, что β — инъекция, а значит, и биекция.

Так как

$$\beta(g((c'_1, \ldots, c'_{n-1}), \ldots, (c_1^{(n)}, \ldots, c_{n-1}^{(n)}))) = \beta(f(c'_1, \ldots, c_{n-1}^{(n-1)}, c_1^{(n)}), \ldots, f(c'_{n-1}, c''_1, \ldots, c_{n-1}^{(n)})) =$$
$$= r_{f(c'_1, \ldots, c_{n-1}^{(n-1)}, c_1^{(n)}), \ldots, f(c'_{n-1}, c''_1, \ldots, c_{n-1}^{(n)})} = h(r_{c'_1, \ldots, c'_{n-1}}, \ldots, r_{c_1^{(n)}, \ldots, c_{n-1}^{(n)}}) =$$
$$= h(\beta(c'_1, \ldots, c'_{n-1}), \ldots, \beta(c_1^{(n)}, \ldots, c_{n-1}^{(n)})),$$

то β — изоморфизм. $\square$

Замечание. Теорема 1, как и другие n-арные аналоги групповых результатов, может быть доказана при помощи теоремы Поста о смежных классах [4] с использованием соответствующего бинарного прототипа, в данном случае — теоремы Кэли для групп.

Ясно, что $\beta(A_0) = R_0(A)$, т. е. сужение β на A_0 является изоморфизмом n-арных групп $\langle A_0, g\rangle$ и $\langle R_0(A), h\rangle$.

Следствие 1. Всякая n-арная группа $\langle A, f\rangle$ изоморфна n-арной группе $\langle R_0(A), h\rangle$.

Искомый изоморфизм определяется произведением $\alpha\beta$, где α — изоморфизм предложения 1, β — изоморфизм из теоремы 1.

Следствие 2. Для всякой n-арной группы $\langle A, f\rangle$ существует изоморфизм n-арной группы $\langle A^{n-1}, g\rangle$ на n-арную группу $\langle \widetilde{R}(A), \widetilde{h}\rangle$.

Искомый изоморфизм равен произведению $\beta\gamma$, где γ — изоморфизм n-арной группы $\langle R(A), h\rangle$ на n-арную группу $\langle \widetilde{R}(A), \widetilde{h}\rangle$.

Следствие 3 ([1]). Всякая n-арная группа $\langle A, f\rangle$ изоморфна n-арной группе $\langle \widetilde{R}_0(A), \widetilde{h}\rangle$.

Искомый изоморфизм равен произведению $\alpha\beta\gamma$.

Теорема 1 и каждое из следствий 1–3 являются аналогами теоремы Кэли для полиадических групп. Нетрудно заметить, что при $n = 2$ эта теорема и все ее следствия совпадают с теоремой Кэли.

Напомним, что n-арным автоморфизмом последовательности $\{A_1, \ldots, A_{n-1}\}$ однотипных универсальных алгебр называется [5] последовательность $f = \{f_1, \ldots, f_{n-1}\}$ изоморфизмов

$$A_1 \xrightarrow{f_1} A_2 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{n-2}} A_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} A_1.$$

Множество всех n-арных автоморфизмов последовательности $\{A_1, \ldots, A_{n-1}\}$ обозначим через $\mathrm{Aut}(A_1, \ldots, A_{n-1})$.

Следующая теорема и следствия из нее являются n-арными аналогами известной теоремы Биркгофа для групп.

Теорема 2. *Для всякой n-арной группы $\langle A, f\rangle$ существует изоморфизм n-арной группы $\langle A^{n-1}, g\rangle$ на n-арную группу всех n-арных автоморфизмов некоторой последовательности универсальных алгебр.*

Доказательство. Для любого $b \in A$ определим преобразование $\varphi_b : \bigcup\limits_{i=1}^{n-1} A_i \to \bigcup\limits_{i=1}^{n-1} A_i$ по правилу

$$\varphi_b : \Theta_i[a_1, \ldots, a_i] \mapsto \Theta_i[f(b, b_1, \ldots, b_{n-2}, a_1), a_2, \ldots, a_i],$$

где $b_1, \ldots, b_{n-2}$ — фиксированные элементы из A. Положим $\Omega = \{\varphi_b \mid b \in A\}$ и рассмотрим последовательность универсальных алгебр

$$\langle A_1, \Omega\rangle, \ldots, \langle A_{n-1}, \Omega\rangle. \tag{2}$$

Так как

$$r_{c_i i}(\varphi_b(\Theta_i[a_1, \ldots, a_i])) = r_{c_i i}(\Theta_i[f(b, b_1, \ldots, b_{n-2}, a_1), a_2, \ldots, a_i]) =$$
$$= \Theta_{i+1}[f(b, b_1, \ldots, b_{n-2}, a_1), a_2, \ldots, a_i, c_i] = \varphi_b(\Theta_{i+1}[a_1, \ldots, a_i, c_i]) = \varphi_b(r_{c_i i}(\Theta_i[a_1, \ldots, a_i]))$$

для любой операции $\varphi_b \in \Omega$, то $r_{c_i i}$ — изоморфизм алгебры $\langle A_i, \Omega\rangle$ на алгебру $\langle A_{i+1}, \Omega\rangle$ ($i = 1, \ldots, n-2$).

Аналогично доказывается, что $r_{c_{(n-1)}(n-1)}$ — изоморфизм алгебры $\langle A_{n-1}, \Omega\rangle$ на алгебру $\langle A_1, \Omega\rangle$. Следовательно, $r_{c_1, \ldots, c_{n-1}}$ — n-арный автоморфизм последовательности (2). Мы доказали включение

$$R(A) \subseteq \mathrm{Aut}(A_1, \ldots, A_{n-1}). \tag{3}$$

Пусть теперь $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_{n-1}) \in \mathrm{Aut}(A_1, \ldots, A_{n-1})$, т. е. все δ_i — биекции и верно

$$\delta_i(\varphi_b(\Theta_i[a_1, \ldots, a_i])) = \varphi_b(\delta_i(\Theta_i[a_1, \ldots, a_i])), \quad i = 1, \ldots, n-1, \tag{4}$$

для любой операции $\varphi_b \in \Omega$ и любого класса $\Theta_i[a_1, \ldots, a_i] \in A_i$. Последнее равенство можно переписать следующим образом:

$$\delta_i(\Theta_i[f(b, b_1, \ldots, b_{n-2}, a_1), a_2, \ldots, a_i]) = \Theta_{i+1}[f(b, b_1, \ldots, b_{n-2}, d_1), d_2, \ldots, d_{i+1}] \tag{5}$$

при $i = 1, \ldots, n-2$, где $\delta_i(\Theta_i[a_1, \ldots, a_i]) = \Theta_{i+1}[d_1, \ldots, d_{i+1}]$;

$$\delta_{n-1}(\Theta_{n-1}[f(b, b_1, \ldots, b_{n-2}, a_1), a_2, \ldots, a_{n-1}]) = \Theta_1[f(b, b_1, \ldots, b_{n-2}, d)] \tag{6}$$

при $i = n-1$, где $\delta_{n-1}(\Theta_{n-1}[a_1, \ldots, a_{n-1}]) = \Theta_1[d]$.

Так как (4) справедливо для любого класса $\Theta_i[a_1, \ldots, a_i] \in A_i$, то элемент a_1 можно выбрать так, что $(b_1, \ldots, b_{n-2}, a_1)$ — нейтральная последовательность. С учетом этого (5) и (6) примут соответственно вид

$$\delta_i(\Theta_i[b, a_2, \ldots, a_i]) = \Theta_{i+1}[f(b, b_1, \ldots, b_{n-2}, d_1), d_2, \ldots, d_{i+1}], \tag{7}$$
$$\delta_{n-1}(\Theta_{n-1}[b, a_2, \ldots, a_{n-1}]) = \Theta_1[f(b, b_1, \ldots, b_{n-2}, d)]. \tag{8}$$

В n-арной группе всегда существуют элементы c_i такие, что

$$(d_1, \ldots, d_{i+1})\Theta_i(a_1, \ldots, a_i, c_i),$$

и элемент c_{n-1} такой, что $d = f(a_1, \ldots, a_{n-1}, c_{n-1})$. Теперь (7) и (8) перепишутся в виде

$$\delta_i(\Theta_i[b, a_2, \ldots, a_i]) = \Theta_{i+1}[f(b, b_1, \ldots, b_{n-2}, a_1), a_2, \ldots, a_i, c_i],$$
$$\delta_{n-1}(\Theta_{n-1}[b, a_2, \ldots, a_{n-1}]) = \Theta_1[f(b, b_1, \ldots, b_{n-2}, a_1), a_2, \ldots, a_{n-1}, c_{n-1}].$$

Учитывая нейтральность последовательности $(b_1, \ldots, b_{n-2}, a_1)$, из полученных равенств имеем

$$\delta_i(\Theta_i[b, a_2, \ldots, a_i]) = \Theta_{i+1}[b, a_2, \ldots, a_i, c_i], \quad i = 1, \ldots, n-2,$$
$$\delta_{n-1}(\Theta_{n-1}[b, a_2, \ldots, a_{n-1}]) = \Theta_1[f(b, a_2, \ldots, a_{n-1}, c_{n-1})].$$

Первое из этих равенств справедливо для всех элементов множества A_i ($i = 1, \ldots, n-2$), а второе справедливо для всех элементов множества A_{n-1}. Следовательно, отображение δ_i совпадает с отображением $r_{c_i i}$ $(i = 1, \dots, n-1)$, а $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_{n-1})$ является правым n-арным сдвигом. В силу произвольного выбора $\delta \in \mathrm{Aut}(A_1, \dots, A_{n-1})$ доказано включение

$$\mathrm{Aut}(A_1, \dots, A_{n-1}) \subseteq R(A).$$

Отсюда и из (3) получаем

$$R(A) = \mathrm{Aut}(A_1, \dots, A_{n-1}).$$

Применяя теорему 1, получаем изоморфизм β n-арной группы $\langle A^{n-1}, g\rangle$ на n-арную группу $\langle \mathrm{Aut}(A_1, \dots, A_{n-1}), h\rangle$. $\square$

Так как $R_0(A) \subseteq R(A) = \mathrm{Aut}(A_1, \dots, A_{n-1})$ и согласно следствию 1 существует изоморфизм n-арных групп $\langle A, f\rangle$ и $\langle R_0, h\rangle$, то справедливо

Следствие 4. Всякая n-арная группа изоморфна n-арной группе n-арных автоморфизмов некоторой последовательности универсальных алгебр.

Следствие 5. Для всякой n-арной группы $\langle A, f\rangle$ существует изоморфизм n-арной группы $\langle A^{n-1}, g\rangle$ на n-арную группу автоморфизмов некоторой универсальной алгебры.

Доказательство. Согласно следствию 2 существует изоморфизм $\mu = \beta\gamma$ n-арной группы $\langle A^{n-1}, g\rangle$ на n-арную группу $\langle \widetilde{R}(A), \widetilde{h}\rangle$, где

$$\beta : A^{n-1} \to R(A), \quad \beta : (c_1, \dots, c_{n-1}) \mapsto r_{c_1, \dots, c_{n-1}};$$
$$\gamma : R(A) \to \widetilde{R}(A), \qquad \gamma : r_{c_1, \dots, c_{n-1}} \mapsto r,$$

причем r — биекция множества $\bigcup\limits_{i=1}^{n-1} A_i$, которая действует на A_i так же, как $r_{c_i i}$ $(i = 1, \dots, n-1)$.

Рассмотрим универсальную алгебру $\Big\langle \bigcup\limits_{i=1}^{n-1} A_i, \Omega \Big\rangle$. При доказательстве теоремы 2 было установлено, что все $r_{c_i i}$ — изоморфизмы. Поэтому

$$r(\varphi_b(\Theta_i[a_1, \dots, a_i])) = r_{c_i i}(\varphi_b(\Theta_i[a_1, \dots, a_i])) = \varphi_b(r_{c_i i}(\Theta_i[a_1, \dots, a_i])) = \varphi_b(r(\Theta_i[a_1, \dots, a_i]))$$

для любого $\Theta_i[a_1, \dots, a_i] \in \bigcup\limits_{i=1}^{n-1} A_i$ и любой операции $\varphi_b \in \Omega$, т. е. r — автоморфизм алгебры $\Big\langle \bigcup\limits_{i=1}^{n-1} A_i, \Omega \Big\rangle$. $\square$

Следствию 3 из теоремы 1 соответствует

Следствие 6. Всякая n-арная группа изоморфна n-арной группе автоморфизмов некоторой универсальной алгебры.

Литература

1. Sioson F.M. *On free Abelian m-groups.* I // Proc. Japan Acad. – 1967. – V. 43. – P. 876–879.
2. Гальмак А.М. *Трансляции n-арных групп* // ДАН БССР. – 1986. – Т. 30. – № 8. – С. 677–680.
3. Русаков С.А. *Алгебраические n-арные системы.* – Минск: Навука і тэхніка, 1992. – 264 с.
4. Post E.L. *Polyadic groups* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – V. 48. – № 2. – P. 208–350.
5. Гальмак А.М. *n-арные морфизмы алгебраических систем* // Тез. докл. Международн. матем. конф. – Минск, 1993. – С. 11–12.

Могилевский технологический институт

Поступили
первый вариант 21.07.1997
окончательный вариант 19.04.2000