Известия вузов. Математика
2014, № 5, с. 3–11

http://old.kpfu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

С.Л. БЕРБЕРЯН

О НЕКОТОРЫХ ГРАНИЧНЫХ ТОЧКАХ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Аннотация. В данной работе исследуются точки Линделёфа, Фату для произвольных гармонических функций, определенных в единичном круге. Приводятся необходимые и достаточные условия для существования таких точек на единичной окружности.

Ключевые слова: гармонические функции, точки Линделёфа, точки Фату, неевклидовы круги, нормальные функции, P-последовательность, P'-последовательность.

УДК: 517.538

Исследованию граничных особенностей гармонических функций посвящены многочисленные статьи. В частности, отметим работы [1]–[6]. В данной работе будем придерживаться общепринятых обозначений. Пусть D — единичный круг $|z| < 1$, Γ — единичная окружность $|z| = 1$ и $h(\xi, \varphi)$ — хорда единичного круга D, оканчивающаяся в точке $\xi = e^{i\theta} \in \Gamma$ и образующая с радиус-вектором этой точки угол φ, $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$. Пусть $\Delta(\xi, \varphi_1, \varphi_2)$ обозначает подобласть круга D, ограниченную хордами $h(\xi, \varphi_1)$ и $h(\xi, \varphi_2)$. Область $\Delta(\xi, \varphi_1, \varphi_2)$ называют обычно углом Штольца с вершиной в точке $\xi = e^{i\theta} \in \Gamma$, и если нас не интересует размер угла Штольца, будем обозначать его кратко $\Delta(\xi)$. Через $\Lambda(\xi)$ обозначим диаметр круга D, соединяющий точки ξ и $-\xi$.

Интерпретируя круг D как модель плоскости в геометрии Лобачевского, через $\sigma(z_1, z_2)$ обозначим неевклидово расстояние между произвольными точками z_1 и z_2 из круга D:

$$\sigma(z_1, z_2) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+u}{1-u}, \quad \text{где} \quad u = \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - z_1 \overline{z}_2} \right|.$$

Рассмотрим произвольную действительнозначную функцию $f(z)$, определенную в D. Для произвольного подмножества S круга D, для которого точка $\xi \in \Gamma$ является предельной точкой, обозначим через $C(f, \xi, S)$ предельное множество функции $f(z)$ в точке ξ относительно множества S, т. е. $C(f, \xi, S) = \cap \overline{f(S \cap U(\xi))}$, где пересечение берется по всем окрестностям $U(\xi)$ точки ξ, а черта означает замыкание множества относительно двухточечной компактификации $\overline{R}$ множества $R = (-\infty, +\infty)$ в виде отрезка посредством добавления к точкам множества R символов $-\infty$ и $+\infty$. Точку $\xi \in \Gamma$ относят к множеству $K(f)$ для функции $f(z)$, определенной в D, если $C(f, \xi, \Delta_1(\xi)) = C(f, \xi, \Delta_2(\xi))$ для углов $\Delta_1(\xi)$ и $\Delta_2(\xi)$ с вершиной в точке ξ. Через $R(f, \xi, S)$ обозначим множество повторяющихся значений функций $f(z)$ на множестве S, т. е. совокупность всех таких действительных чисел $a \in R$, что $a = f(z_n^a)$, $n \in N$, для некоторой последовательности $\{z_n^a\}$ точек множества S, для которой $\lim\limits_{n\to\infty} z_n^a = \xi$. Точка $\xi \in \Gamma$ называется точкой Плеснера, если для любого угла $\Delta(\xi)$ справедливо равенство $C(f, \xi, \Delta(\xi)) = \overline{R}$. Множество точек Плеснера обозначают через $I(f)$.

Поступила 06.11.2012

В работе [3] через $B(f)$ обозначено множество всех точек $\xi \in K(f)$, в которых для любого угла $\Delta(\xi)$ выполнены свойства $C(f,\xi,\Delta(\xi)) \neq \overline{R}$, $C(f,\xi,\Delta(\xi))$ содержит более одного элемента. Придерживаясь определения, введенного в работе [7], назовем точку $\xi \in \Gamma$ точкой Линделёфа для действительнозначной функции $f(z)$, определенной в D, если для любых углов $\Delta_1(\xi)$ и $\Delta_2(\xi)$ справедливо соотношение $C(f,\xi,\Delta_1(\xi)) = C(f,\xi,\Delta_2(\xi)) \neq \overline{R}$. Множество точек Линделёфа обозначают через $L(f)$. Точка $\xi \in \Gamma$ в работе [3] названа уточненной точкой Линделёфа действительнозначной функции $f(z)$, если

а) $C(f,\xi,\Delta_1(\xi)) = C(f,\xi,\Delta_2(\xi)) \neq \overline{R}$ для любых углов $\Delta_1(\xi)$ и $\Delta_2(\xi)$,

б) $C(f,\xi,\Delta(\xi))$ содержит более одной точки для любого угла $\Delta(\xi)$,

в) множество $C(f,\xi,\Delta(\xi)) \setminus R(f,\xi,h(\xi,\varphi))$ состоит самое бóльшее из двух элементов для любых $\Delta(\xi)$ и $h(\xi,\varphi)$).

Множество уточненных точек Линделёфа функции $f(z)$ обозначим через $L^*(f)$. Обычно точку $\xi \in \Gamma$ называют точкой Фату для действительнозначной функции $f(z)$, если объединение множеств $C(f,\xi,\Delta(\xi))$ по всем углам $\Delta(\xi)$ состоит из единственного действительного конечного или бесконечного элемента. Множество всех точек Фату обозначают через $F(f)$.

Понятия P-последовательностей, P-хорд и нормальных хорд, введенных для мероморфных функций В.И. Гавриловым в [8], а также понятия P'-последовательностей, P'-хорд и нормальных хорд, введенных для гармонических функций автором, подробно описаны в [4]. Кроме того, в этой же работе рассмотрено известное определение нормальности для действительнозначных функций, определенных в D.

Говорят, что некоторое множество E — множество типа G_δ, если E есть пересечение счетного множества открытых множеств, и что E — множество типа F_σ, если E является объединением счетного множества замкнутых множеств.

Для доказательства основных результатов предварительно приведем некоторые известные теоремы.

Теорема A ([6]). *Пусть $f(z)$ — произвольная гармоническая функция, определенная в D. Если $\xi \in K(f)$ и предельное множество $C(f,\xi,\Delta(\xi)) \neq R$ для любого угла $\Delta(\xi)$, то для любой последовательности $\{z_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \xi$, лежащей внутри некоторого угла $\Delta_1(\xi)$ и удовлетворяющей условию $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma(z_n, z_{n+1}) = 0$, справедливо соотношение $C(f,\xi,\Delta(\xi)) = C(f,\xi,z_n)$ для любого угла $\Delta(\xi)$.*

Теорема B ([9]). *Пусть $f(z)$ — нормальная непрерывная действительнозначная функция, определенная в D, и для некоторой последовательности $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = 1$, существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = c$. Тогда для любой последовательности $\{z'_n\}$ такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma(z_n, z'_n) = 0$, справедливо соотношение $\lim\limits_{n\to\infty} f(z'_n) = c$.*

Теорема C ([10]). *Если гармоническая в D функция $f(z)$ нормальная и предельные множества $C(f,\xi,h(\xi,\varphi_1))$ и $C(f,\xi,h(\xi,\varphi_2))$ ограничены сверху (снизу) числом α при фиксированных $\varphi_1, \varphi_2 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, то предельное множество $C\left(f,\xi,\overline{\Delta(\xi,\varphi_1,\varphi_2)}\right)$ также ограничено сверху (снизу) числом α.*

Сформулируем один из основных результатов работы.

Теорема 1. *Точка $\xi \in \Gamma$ является точкой Линделёфа для произвольной гармонической функции $f(z)$, определенной в D, в том и только том случае, если*

1) произвольная хорда $h(\xi,\varphi)$ является нормальной хордой для функции $f(z)$,

2) имеет место совпадение предельных множеств $C(f,\xi,h(\xi,\varphi)) \neq \overline{R}$ для множества значений φ, всюду плотных в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Выделим в качестве лемм основные этапы в доказательстве теоремы 1.

Лемма 1. *Пусть $f(z)$ — произвольная гармоническая функция, определенная в D, и $\xi \in L(f)$. Тогда в точке ξ функция $f(z)$ обладает следующими свойствами*:

1) *произвольная хорда $h(\xi,\varphi)$ является нормальной хордой для функции $f(z)$,*

2) *имеет место совпадение предельных множеств $C(f,\xi,h(\xi,\varphi)) \neq \overline{R}$ для всех значений $\varphi\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.*

Доказательство. Чтобы проверить выполнение свойства 1) допустим противное, т. е. существует некоторая хорда $h(\xi,\varphi_0)$, которая содержит P'-последовательность функции $f(z)$. Тогда в силу свойств неевклидовой геометрии для любого положительного ε можно указать такой угол $\Delta_1(\xi)$, который содержит хорду $h(\xi,\varphi_0)$ и в котором содержатся все неевклидовы круги $D(z_n,\varepsilon)$, $n \in N$. В силу определения P'-последовательностей и замкнутости предельных множеств $C(f,\xi,\Delta(\xi))$ для любых углов $\Delta(\xi)$ имеем $C(f,\xi,\Delta_1(\xi)) = \overline{R}$. А это противоречит условию $\xi \in L(f)$. Справедливость свойства 2) непосредственно следует из утверждения теоремы A. $\square$

Лемма 2. *Пусть $f(z)$ — произвольная гармоническая функция, определенная в D. Тогда для того, чтобы точка $\xi \in \Gamma$ была бы точкой Линделёфа для функции $f(z)$ достаточно выполнение следующих условий*:

1) *предельные множества $C(f,\xi,h(\xi,\varphi)) \neq \overline{R}$ для значений φ, всюду плотных в интервале $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, совпадают,*

2) *каждая из хорд $h(\xi,\varphi)$ является нормальной для функции $f(z)$.*

Доказательство. Обозначим через E множество значений $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, для которых по условию 1) имеет место совпадение предельных множеств $C(f,\xi,h(\xi,\varphi))$. Докажем, что из условий 1), 2) для любых хорд $h(\xi,\varphi_1)$ и $h(\xi,\varphi_2)$, где $\varphi_1,\varphi_2 \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, справедливо соотношение $C(f,\xi,h(\xi,\varphi_1)) = C(f,\xi,h(\xi,\varphi_2)) \neq \overline{R}$. Для доказательства рассмотрим произвольную хорду $h(\xi,\varphi_1)$, где $\varphi_1 \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \setminus E$ и покажем, что соотношение

$$C(f,\xi,h(\xi,\varphi_1)) = C(f,\xi,h(\xi,\varphi_2)) \neq R \tag{1}$$

имеет место для любого значения $\varphi_2 \in E$. Рассмотрим в точке ξ такую последовательность углов $\{\Delta(\xi,\varphi_1^m,\varphi_2)\}_{m=1}^{\infty}$, что $\Delta\left(\xi,\varphi_1^1,\varphi_2^1\right) \supset \Delta\left(\xi,\varphi_1^2,\varphi_2^2\right) \supset \cdots \supset \Delta\left(\xi,\varphi_1^m,\varphi_2^m\right) \supset \cdots$, $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \Delta\left(\xi,\varphi_1^m,\varphi_2^m\right) = h(\xi,\varphi_1)$ и сторонами углов при любом фиксированном m являются хорды $h(\xi,\varphi_1^m)$, $h(\xi,\varphi_2^m)$, где $\varphi_1^m,\varphi_2^m \in E$ и $\varphi_1^m < \varphi_1 < \varphi_2^m$ при любом $m \in N$. Возьмем произвольное значение $\beta \in C(f,\xi,h(\xi,\varphi_1))$ и покажем, что $\beta \in C(f,\xi,h(\xi,\varphi_1^m))$ при любом натуральном m. Рассмотрим на хорде $h(\xi,\varphi_1)$ такую последовательность точек $\{\ell_n\}$, что $\lim\limits_{n\to\infty} \ell_n = \xi$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f(\ell_n) = \beta$. Проведем через точки последовательности $\{\ell_n\}_{n=1}^{\infty}$ неевклидовы перпендикуляры E_n к диаметру $\Lambda(\xi)$, пересекающие хорду $h(\xi,\varphi_1^m)$ при любом фиксированном m соответственно в точках $\{z_n^m\}_{n=1}^{\infty}$. Допустим, что $\beta \notin C(f,\xi,h(\xi,\varphi_1^m))$ при любом фиксированном m. Тогда в силу непрерывности функции $f(z)$ и связности хорд $h(\xi,\varphi_1^m)$ предельные множества $C(f,\xi,h(\xi,\varphi_1^m))$ — связные множества при любом $m \in N$, ограниченные либо сверху числом $\gamma < \beta$, где $\gamma \in C(f,\xi,h(\xi,\varphi_1^m))$, либо снизу числом $\delta > \beta$, где $\delta \in C(f,\xi,h(\xi,\varphi_1^m))$. Поэтому из множества последовательностей $\{z_n^m\}$, $n = 1,2,\ldots$, $m = 1,2,\ldots$, можно выбрать такую подпоследовательность $\left\{z_{n_m}^m\right\}_{m=1}^{\infty}$, что

$$\lim_{m\to\infty} \sigma\left(z_{n_m}^m,\ell_{n_m}\right) = 0, \quad \lim_{m\to\infty} f\left(\ell_{n_m}\right) = \beta \tag{2}$$

и либо $\overline{\lim\limits_{m\to\infty}} f\left(z_{n_m}^m\right) \leqslant \gamma$, либо $\underline{\lim\limits_{m\to\infty}} f\left(z_{n_m}^m\right) \geqslant \delta$. Из последовательности $\left\{z_{n_m}^m\right\}_{m=1}^\infty$ можно выбрать такую подпоследовательность, которую для простоты снова обозначим через $\left\{z_{n_m}^m\right\}_{m=1}^\infty$, что справедливо соотношение $\lim\limits_{m\to\infty} f\left(z_{n_m}^m\right) = \alpha \neq \beta$. Принимая во внимание (2) и следствие 1 из работы [4] получим, что последовательность $\{\ell_{n_m}\}_{m=1}^\infty$ или некоторая ее подпоследовательность является P'-последовательностью для функции $f(z)$ на хорде $h(\xi,\varphi_1)$. А это противоречит условию 2). Следовательно, $\beta \in C(f,\xi,h(\xi,\varphi_1^m))$ при любом m и

$$C(f,\xi,h(\xi,\varphi_1)) \subset C\left(f,\xi,h\left(\xi,\varphi_1^m\right)\right) = C(f,\xi,h(\xi,\varphi_2)).$$

Покажем, что справедливо и обратное вложение. Рассмотрим произвольное значение $\beta \in C(f,\xi,h(\xi,\varphi_2))$, $\varphi_2 \in E$, и покажем, что $\beta \in C(f,\xi,h(\xi,\varphi_1))$. Построим так же, как и выше, последовательность вложенных углов $\{\Delta(\xi,\varphi_1^m,\varphi_2^m)\}_{m=1}^\infty$, для которых $\bigcap\limits_{m=1}^\infty \Delta\left(\xi,\varphi_1^m,\varphi_2^m\right) = h(\xi,\varphi_1)$ и сторонами углов $\Delta\left(\xi,\varphi_1^m,\varphi_2^m\right)$ являются хорды $h(\xi,\varphi_1^m)$, $h(\xi,\varphi_2^m)$, где $\varphi_1^m,\varphi_2^m \in E$. При каждом фиксированном m рассмотрим такую последовательность $\{z_n^m\}_{n=1}^\infty \in h(\xi,\varphi_1^m)$, что $\lim\limits_{n\to\infty} z_n^m = \xi$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n^m) = \beta$. Через точки z_n^m при любом фиксированном m проведем неевклидовы перпендикуляры E_n^m, $n = 1,2,\ldots$, к диаметру $\Lambda(\xi)$, пересекающие $h(\xi,\varphi_1)$ в точках $\{t_n^m\}_{n=1}^\infty$. Изменяя m, получим два множества последовательностей $\{z_n^m\}$, $\{t_n^m\}$, $n = 1,2,\ldots$, $m = 1,2,\ldots$. Из множества последовательностей $\{z_n^m\}$, $m = 1,2,\ldots$, $n = 1,2,\ldots$, выберем такую подпоследовательность $\left\{z_{n_m}^m\right\}_{m=1}^\infty$, что $\lim\limits_{m\to\infty} f\left(z_{n_m}^m\right) = \beta$. Соответствующую $\left\{z_{n_m}^m\right\}$, $m = 1,2,\ldots$, последовательность на $h(\xi,\varphi_1)$ обозначим через $\left\{t_{n_m}^m\right\}_{m=1}^\infty$. Из этой последовательности можно извлечь подпоследовательность, которую обозначим через $\left\{t_{n_m}^m\right\}_{m=1}^\infty$, для которой существует предел и $\lim\limits_{m\to\infty} \sigma\left(z_{n_m}^m, t_{n_m}^m\right) = 0$. Этот предел должен равняться β, так как в противном случае в силу следствия 1 из работы [4] последовательность $\left\{t_{n_m}^m\right\}_{m=1}^\infty$ является P'-последовательностью для функции $f(z)$ на хорде $h(\xi,\varphi_1)$, что противоречит условию 2). Следовательно, $\beta \in C(f,\xi,h(\xi,\varphi_1))$ и соотношение (1) доказано. Теперь докажем справедливость равенства

$$C(f,\xi,\Delta(\xi)) = C(f,\xi,h(\xi,\varphi)) \tag{3}$$

для любых $\Delta(\xi)$ и $h(\xi,\varphi)$. Допустим противное, т. е. существует угол $\Delta(\xi)$, для которого $C(f,\xi,\Delta(\xi)) \neq C(f,\xi,h(\xi,\varphi))$ для любой хорды $h(\xi,\varphi)$. Следовательно, существует действительное значение $\gamma \in C(f,\xi,\Delta(\xi))$ и $\gamma \notin C(f,\xi,h(\xi,\varphi))$ для любой хорды $h(\xi,\varphi)$, $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. В силу предположения существует такая последовательность $\{z_n\}$, что $\{z_n\} \in \Delta(\xi)$, $z_n \to \xi$ при $n \to \infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = \gamma$. Обозначим через φ_n угол, образуемый при фиксированном n хордой $h(\xi,\varphi_n)$, проходящей через точку z_n с диаметром $\Lambda(\xi)$ в точке ξ.

В силу ограниченности $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ из нее можно выделить подпоследовательность φ_{n_k}, стремящуюся к конечному пределу $\varphi_0 \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. В силу свойств неевклидовой геометрии $\lim\limits_{k\to\infty} \sigma\left(z_{n_k}, h(\xi,\varphi_0)\right) = 0$. Рассмотрим на хорде $h(\xi,\varphi_0)$ последовательность точек $\{t_{n_k}\}_{k=1}^\infty$, для которых $\sigma\left(z_{n_k}, t_{n_k}\right) = \sigma\left(z_{n_k}, h(\xi,\varphi_0)\right)$. Тогда $\lim\limits_{k\to\infty} \sigma\left(z_{n_k}, t_{n_k}\right) = 0$ и если последовательность $\{f(t_{n_k})\}_{k=1}^\infty$ не имеет предела, то из нее можно выделить такую подпоследовательность $\{f(t_{n_m})\}_{m=1}^\infty$, которая имела бы предел. Отсюда, как и выше получим, что $\gamma \in C(f,\xi,h(\xi,\varphi_0))$ и, значит, равенство (3) доказано. Поэтому точка ξ является точкой Линделёфа для функции $f(z)$ и утверждение леммы 2 доказано. $\square$

Теперь утверждение теоремы 1 непосредственно следует из лемм 1 и 2.

Анализируя доказательство теоремы 1, легко видеть, что справедливо

Следствие 1. Точка $\xi \in \Gamma$ принадлежит множеству $B(f)$ для произвольной гармонической функции $f(z)$, определенной в D, в том и только том случае, если

1) имеет место совпадение предельных множеств $C(f,\xi,h(\xi,\varphi)) \neq \overline{R}$ для множества значений φ, всюду плотных в интервале $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ и для этих значений φ предельные множества $C(f,\xi,h(\xi,\varphi))$ содержат более одного элемента,

2) каждая из хорд $h(\xi,\varphi)$ является нормальной для функции $f(z)$.

Принимая во внимание, что для произвольной гармонической функции $f(z)$, определенной в D, справедливо равенство $B(f) = L^*(f)$, доказанное в работе [3], получим

Следствие 2. Точка $\xi \in \Gamma$ является уточненной точкой Линделёфа для произвольной гармонической функции $f(z)$, определенной в D, в том и только том случае, если

1) имеет место совпадение предельных множеств $C(f,\xi,h(\xi,\varphi)) \neq R$ для множества значений φ, всюду плотных в интервале $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ и для этих значений φ предельные множества $C(f,\xi,h(\xi,\varphi))$ содержат более одного элемента,

2) каждая из хорд $h(\xi,\varphi)$ является нормальной для функции $f(z)$.

Принимая во внимание утверждение теоремы B и проводя те же построения, что и при доказательстве теоремы 1, получаем следующее утверждение.

Теорема 2. *Точка $\xi \in \Gamma$ является точкой Линделёфа для нормальной непрерывной функции $f(z)$, определенной в D, в том и только том случае, если имеет место совпадение предельных множеств $C(f,\xi,h(\xi,\varphi)) \neq \overline{R}$ для множества значений φ, всюду плотных в интервале $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.*

Для нормальных гармонических функций $f(z)$ можно ослабить условия, при которых граничная точка $\xi \in \Gamma$ будет точкой Линделёфа.

Теорема 3. *Точка $\xi \in \Gamma$ является точкой Линделёфа для нормальной гармонической функции $f(z)$, определенной в D, в том и только том случае, если для любого сколь угодно малого положительного ε существуют такие углы φ_ε^1 и φ_ε^2, что $-\frac{\pi}{2} < \varphi_\varepsilon^1 < -\frac{\pi}{2}+\varepsilon$, $\frac{\pi}{2}-\varepsilon < \varphi_\varepsilon^2 < \frac{\pi}{2}$ и*

$$C\left(f,\xi,h\left(\xi,\varphi_\varepsilon^1\right)\right) = C\left(f,\xi,h\left(\xi,\varphi_\varepsilon^2\right)\right) = [\alpha,\beta] \neq \overline{R}. \tag{4}$$

Доказательство. Необходимость условий теоремы 3 непосредственно вытекает из теоремы 1.

Достаточность. Рассмотрим произвольный угол $\Delta(\xi)$. Допустим, угол $\Delta_1(\xi)$ такой, что $\Delta(\xi) \subset \Delta_1(\xi)$ и сторонами $\Delta_1(\xi)$ являются хорды $h\left(\xi,\varphi_\varepsilon^1\right)$ и $h\left(\xi,\varphi_\varepsilon^2\right)$, для которых справедливо соотношение (1). В силу связности $\Delta(\xi)$, непрерывности $f(z)$, замкнутости предельных множеств и соотношения (4) множества $C\left(f,\xi,h\left(\xi,\varphi_\varepsilon^1\right)\right)$ и $C\left(f,\xi,h\left(\xi,\varphi_\varepsilon^2\right)\right)$

1) ограничены сверху конечным числом β, принадлежащим этим множествам,

2) ограничены снизу конечным числом α, принадлежащим этим множествам,

3) ограничены сверху и снизу конечными числами β и α.

Без нарушения общности рассмотрим случай 1. Докажем, что в этом случае предельное множество $C(f,\xi,\Delta(\xi))$ ограничено сверху числом $\beta \in C(f,\xi,\Delta(\xi))$. В силу теоремы C предельное множество $C(f,\xi,\Delta_1(\xi))$, а значит, и предельное множество $C(f,\xi,\Delta(\xi))$ ограничены сверху числом β. Так как угол $\Delta(\xi)$ взят произвольно, то для любого угла $\Delta_2(\xi)$ с вершиной в точке $\xi \in \Gamma$ предельное множество $C(f,\xi,\Delta_2(\xi))$ ограничено сверху числом β. На хорде $h\left(\xi,\varphi_\varepsilon^1\right)$ рассмотрим такую последовательность $\{z_n\}$, что $z_n \to \xi$ при $n \to \infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = \beta$. Через точки последовательности $\{z_n\}$, $n = 1,2,\ldots$, проведем неевклидовы перпендикуляры E_n, пересекающие $\Lambda(\xi)$ в точках r_n, $n = 1, 2, \dots$. На этих перпендикулярах при любом фиксированном n выберем точку $t_n \in \Delta(\xi)$. Очевидно, $t_n \to \xi$ при $n \to \infty$ и в силу свойств неевклидовой геометрии $\sigma(z_n, t_n) \leqslant \sigma(z_n, r_n) < M + 1$, где M — неевклидово расстояние от любой точки гиперцикла $L\left(\xi, \varphi_\varepsilon^1\right)$ до диаметра $\Lambda(\xi)$. Для произвольного натурального n рассмотрим отображение $S_n(z) = \frac{z+z_n}{1+\overline{z}_n \cdot z}$. Очевидно, $S_n(0) = z_n$ и $S_n(t'_n) = t_n$, где t'_n — прообраз точки t_n при отображении $S_n(z)$. Возьмем компакт $K = \{z : |z| \leqslant \operatorname{th}(M+1)\}$, который представляет из себя замкнутый неевклидов круг с центром в точке $z = 0$ и неевклидовым радиусом $M+1$. В силу инвариантности метрики σ при отображениях $S_n(z)$ будем иметь, что t'_n вместе со всеми своими предельными точками лежат внутри K. Так как $f(z)$ — нормальная гармоническая функция в D, то существует последовательность $\{f\left(S_{n_k}(z)\right)\}$, равномерно сходящаяся на K к гармонической функции $F(z)$ или равномерно расходящаяся к $+\infty$ или к $-\infty$ на K. В силу того, что $S_n(K) \subset \Delta(\xi, \varphi'_1, \varphi'_2)$, где $\Delta(\xi, \varphi'_1, \varphi'_2)$ — некоторый угол, для которого $C\left(f, \xi, \Delta(\xi, \varphi'_1, \varphi'_2)\right)$ ограничено сверху числом β, то $F(z) \leqslant \beta$. Так как $F(0) = \lim\limits_{k\to\infty} f(S_{n_k}(0)) = \lim\limits_{k\to\infty} f(z_{n_k}) = \beta$, то в силу принципа максимума для гармонических функций $F(z) \equiv \beta$. Поэтому $F(t_0) = \lim\limits_{k\to\infty} F(t'_{n_k}) = \lim\limits_{k\to\infty} f\left(S_{n_k}(t'_{n_k})\right) = \lim\limits_{k\to\infty} f(t_{n_k}) = \beta$, где t_0 — предельная точка последовательности $\{t'_{n_k}\}$ или некоторой ее подпоследовательности. Она лежит внутри K. Следовательно, $\beta \in C(f, \xi, \Delta(\xi))$. Во втором случае, пользуясь принципом минимума для гармонических функций, аналогично докажем, что $\alpha \in C(f, \xi, \Delta(\xi))$. В третьем случае одновременно получим $\alpha, \beta \in C(f, \xi, \Delta(\xi))$. В случае, если $\alpha = -\infty$ или $\beta = +\infty$ проведем те же рассуждения, что и в случаях 1), 2). Тогда соответственно получим, что предельная функция $F(z) = -\infty$ или $F(z) = +\infty$ и $-\infty \in C(f, \xi, \Delta(\xi))$ или $+\infty \in C(f, \xi, \Delta(\xi))$. Таким образом, во всех возможных случаях α и β принадлежат множеству $C(f, \xi, \Delta(\xi))$. В силу непрерывности функции $f(z)$ и связности $\Delta(\xi)$ имеем $C(f, \xi, \Delta(\xi)) = [\alpha, \beta]$. Принимая во внимание произвольность угла $\Delta(\xi)$ получаем утверждение теоремы 3. □

На примере функции $f(z) = |\arg(1 - z)|$ в точке $z = 1$ видим, что в теореме 3 в случае нормальных субгармонических функций нельзя данное условие заменить условием $C(f, \xi, h(\xi, \varphi_1)) = C(f, \xi, h(\xi, \varphi_2)) \neq \overline{R}$ для двух фиксированных хорд $h(\xi, \varphi_1)$ и $h(\xi, \varphi_2)$.

Следующее утверждение для мероморфных функций получено в [11].

Теорема 4. *Пусть $f(z)$ — произвольная гармоническая функция, определенная в D. Тогда $I(f)$ — подмножество типа G_δ на Γ.*

Доказательство. Наш метод тот же, что и в [11]. Этот метод, по существу, является частью построения, предложенного Н.Н. Лузиным и И.И. Приваловым [12]. Рассмотрим на R все интервалы, концы которых имеют рациональные координаты, и расположим их в последовательность $\delta_1, \delta_2, \dots$. Пусть $\{\Delta_n(\xi)\}$ — такая последовательность углов, что для любого угла $\Delta(\xi, \varphi_1, \varphi_2)$ существует такое значение n, что $\Delta_n(\xi) \subset \Delta(\xi, \varphi_1, \varphi_2)$. Пусть $E_{p,q,r}$ — множество всех таких точек на Γ, для которых значения функции $f(z)$ лежат вне интервала δ_p при любом $z \in \Delta_q(\xi) \cap N(\xi, r)$. В силу теоремы Коши эти значения $f(z)$ расположены либо левее, либо правее интервала δ_p. Можно видеть, что если $\xi_k \in E_{p,q,r}$ и $\xi_k \to \xi$ при $k \to \infty$, то и $\xi \in E_{p,q,r}$, т. е. множества $E_{p,q,r}$, $p, q, r \in N$, — замкнутые множества. Обозначим $F = \bigcup\limits_{p,q,r=1} E_{p,q,r}$. Тогда $I(f) = \Gamma \setminus F$ и так как F — множество типа F_σ, то и $I(f)$ — множество типа G_δ. □

В случае, когда $\xi \in K(f)$ для произвольной гармонической функции $f(z)$, определенной в D, условия на принадлежность точки $\xi \in \Gamma$ множеству $L(f)$ менее жесткие.

Теорема 5. *Точка $\xi \in K(f)$ является точкой Линделёфа для произвольной гармонической функции $f(z)$, определенной в D, в том и только том случае, если существует хорда $h(\xi,\varphi_0)$, для которой*
1) $C(f,\xi,h(\xi,\varphi_0)) \neq \overline{R}$
и
2) *хорда $h(\xi,\varphi_0)$ является нормальной для функции $f(z)$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\xi \in L(f)$. Тогда свойства 1) и 2) непосредственно следуют из теоремы 1.

Достаточность. Допустим $\xi \in K(f)$ и выполнены свойства 1), 2). Как и при доказательстве теоремы 1, рассмотрим такую последовательность углов $\{\Delta\left(\xi,\varphi_1^m,\varphi_2\right)\}_{m=1}^{\infty}$, что $\Delta\left(\xi,\varphi_1^1,\varphi_2^1\right) \supset \Delta\left(\xi,\varphi_1^2,\varphi_2^2\right) \supset \cdots \supset \Delta\left(\xi,\varphi_1^m,\varphi_2^m\right) \supset \cdots$, $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \Delta\left(\xi,\varphi_1^m,\varphi_2^m\right) = h(\xi,\varphi_0)$ и $\varphi_1^m < \varphi_0 < \varphi_2^m$ при любом фиксированном m. Очевидно, $C(f,\xi,h(\xi,\varphi_0)) \subseteq C\left(f,\xi,\Delta\left(\xi,\varphi_1^m,\varphi_2^m\right)\right)$ при $m = 1,2,\ldots$. Покажем, что

$$C(f,\xi,h(\xi,\varphi_0)) = C\left(f,\xi,\Delta\left(\xi,\varphi_1^m,\varphi_2^m\right)\right) \tag{5}$$

для любого угла $\Delta\left(\xi,\varphi_1^m,\varphi_2^m\right)$. Возьмем произвольное действительное значение $\alpha \in C\left(f,\xi,\Delta\left(\xi,\varphi_1^m,\varphi_2^m\right)\right)$, $m = 1,2,\ldots$. Для каждого угла $\Delta\left(\xi,\varphi_1^m,\varphi_2^m\right)$ при любом фиксированном значении m выберем такую последовательность $\{z_n^m\} \in \Delta\left(\xi,\varphi_1^m,\varphi_2^m\right)$, что $\lim\limits_{n\to\infty} z_n^m = \xi$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(z_n^m\right) = \alpha$. Проведем через точки последовательности $\{z_n^m\}_{n=1}^{\infty}$ неевклидовы перпендикуляры E_n^m к диаметру $\Lambda(\xi)$, пересекающие $h(\xi,\varphi_0)$ соответственно в точках $\{t_n^m\}_{n=1}^{\infty}$. Из этого множества можно выбрать последовательность $\left\{z_{n_m}^m\right\}_{m=1}^{\infty}$ так, чтобы $\lim\limits_{m\to\infty} z_{n_m}^m = \xi$, $\lim\limits_{m\to\infty} \sigma\left(z_{n_m}^m, t_{n_m}^m\right) = 0$, $\lim\limits_{m\to\infty} f\left(z_{n_m}^m\right) = \alpha$. Применяя те же рассуждения, что и при доказательстве теоремы 1, получим $\alpha \in C(f,\xi,h(\xi,\varphi_0))$. Следовательно, равенство (5) справедливо. □

Следствие 3. Точка $\xi \in K(f)$ является точкой Фату для произвольной гармонической функции $f(z)$, определенной в D, в том и только том случае, если существует некоторая хорда $h(\xi,\varphi_0)$, для которой предельное множество $C(f,\xi,h(\xi,\varphi_0))$ состоит из единственного значения α и хорда $h(\xi,\varphi_0)$ является нормальной для функции $f(z)$.

Принимая во внимание, что у нормальных гармонических функций нет P'-последовательностей, получим

Следствие 4. Точка $\xi \in K(f)$ является точкой Линделёфа для нормальной гармонической функции $f(z)$ в том и только том случае, если существует хорда $h(\xi,\varphi_0)$, для которой $C(f,\xi,h(\xi,\varphi_0)) \neq \overline{R}$. В случае, когда $C(f,\xi,h(\xi,\varphi_0))$ состоит из единственного значения, получаем утверждение, известное из работы [13].

Следствие 5. Точка $\xi \in K(f)$ является точкой Фату для нормальной гармонической функции $f(z)$ в том и только том случае, если существует хорда $h(\xi,\varphi_0)$, для которой предельное множество $C(f,\xi,h(\xi,\varphi_0))$ состоит из единственного значения.

Теорема 6. *Класс множеств $\{L(f)\}$ для произвольных гармонических функций $f(z)$ имеет вид*

$$L(f) = F(f) \setminus E(f),$$

где $F(f)$ — множество типа F_σ на Γ, а $E(f)$ — совершенное пористое множество на Γ.

Доказательство. По определению $K(f) = L(f) \cup I(f)$ и $L(f) \cap I(f) = \varnothing$. Согласно теореме 4 множество $I(f)$ имеет тип G_δ на Γ. С другой стороны, известно [14], что для произвольной действительнозначной функции $f(z)$ справедливо разложение

$$\Gamma = K(f) \cup E(f), \tag{6}$$

где $E(f)$ — некоторое совершенное пористое множество на Γ. В силу теоремы 4, так как $I(f)$ — множество типа G_δ, то и $F = \Gamma \setminus I(f)$ — некоторое множество типа F_σ. Принимая во внимание разложение (6), получим $L(f) = F \setminus E(f)$, где $E(f)$ — совершенное пористое множество на Γ. □

Замечание. В работе [15] показано, что при наличии условия нормальности хорды $h(\xi, \varphi)$, для гармонических функций $f(z)$ условия

$$C(f, \xi, h(\xi, \varphi)) \neq \overline{R}, \tag{7}$$

$$C(f, \xi, \{z_n\}) \neq \overline{R}, \tag{8}$$

где $z_n \in h(\xi, \varphi)$, $\lim\limits_{n \to 0} \sigma(z_n, z_{n+1}) = 0$, $\lim\limits_{n \to 0} z_n = \xi$, совпадают.

Поэтому всюду в условиях рассмотренных теорем условие (7) можно заменить на (8).

Отметим, что в случае мероморфных функций при отсутствии P-последовательностей на произвольной хорде $h(\xi, \varphi)$ равносильность условий (7) и (8) показана в [16].

Литература

[1] Гаврилов В.И., Захарян Т.Т., Субботин А.В. *Линейно-топологические свойства максимальных пространств Харди гармонических функций в круге*, Докл. НАН Армении **102** (3), 203–209 (2002).

[2] Соломенцев Е.Д. *Гармонические и субгармонические функции и их обобщения*, В сб.: Математический анализ. Теория вероятностей. Регулирование. Итоги науки. ВИНИТИ АН СССР, 83–100 (1964).

[3] Берберян С.Л., Гаврилов В.И. *Предельные множества непрерывных и гармонических функций по некасательным граничным путям*, Mathem. Montisnigri, № 1, 17–25 (1993).

[4] Берберян С.Л. *О распределении значений гармонических функций в единичном круге*, Изв. вузов. Матем., № 6, 12–19 (2011).

[5] Lappan P.A. *Fatous points of harmonic normal functions and uniformly normal functions*, Math. Zeitschr. **102** (2), 110–114 (1967).

[6] Берберян С.Л. *О некоторых предельных множествах гармонических функций*, Докл. НАН Армении **111** (1), 7–14 (2011).

[7] Гаврилов В.И., Захарян В.С. *Множество точек Линделёфа произвольных комплексных функций*, ДАН АрмССР **86** (1), 12–16 (1988).

[8] Гаврилов В.И. *О распределении значений мероморфных в единичном круге функций, не являющихся нормальными*, Матем. сб. **67** (3), 408–427 (1965).

[9] Берберян С.Л. *Об угловых граничных значениях нормальных непрерывных функций*, Изв. вузов. Матем., № 3, 22–28 (1986).

[10] Берберян С.Л. *Об угловых граничных значениях гармонических функций, порождающих нормальное семейство на подгруппах автоморфизмов единичного круга*, Докл. НАН Армении **105** (4), 323–327 (2005).

[11] Lappan P.A. *Characterization of Plessner points*, Bull. London Math. Soc. **2** (1), 60–62 (1970).

[12] Привалов И.И. *Граничные свойства аналитических функций* (ГИТТЛ, М.–Л., 1950).

[13] Берберян С.Л. *О граничных особенностях нормальных субгармоничных функций*, Math. Montisnigri, XVIII–XIX, 5–14 (2005–2006).

[14] Коллингвуд Э., Ловатер А. *Теория предельных множеств* (Мир, М., 1971).

[15] Берберян С.Л. *О некоторых применениях P'-последовательностей при исследовании граничных свойств произвольных гармонических функций*, Изв. вузов. Матем., № 9, 3–9 (2011).

[16] Гаврилов В.И. *О некоторых теоремах единственности для мероморфных функций*, Тр. семинара им. И.Г. Петровского, вып. 1, 57–62 (1975).

С.Л. Берберян

и. о. профессора, кафедра математики и математического моделирования,
Российско-Армянский (Славянский) государственный университет,
ул. Овсепа Эмина, д. 123, г. Ереван, 0051, Республика Армения,

e-mail: samvel357@mail.ru

S.L. Berberyan

On boundary points of arbitrary harmonic functions

Abstract. The article deals with the Lindelöf and Fatou points of arbitrary harmonic functions defined on the until circle. We present the necessary and sufficient conditions for the existence of such points on the unit circle.

Keywords: harmonic functions, Lindelöf points, Fatou points, non-Euclidean circles, normal functions, P-sequence, P'-sequence.

S.L. Berberyan

acting as Professor, Chair of Mathematics and Mathematical Modeling,
Russian–Armenian (Slavonic) University,
123 Ovsep Emin str., Yerevan, 0051 Republic of Armenia,

e-mail: samvel357@mail.ru