ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 5 (432)

УДК 517.983.26

Н.А. ЕРЗАКОВА

КОНСТАНТА МАКЕНХАУПТА И МЕРА НЕКОМПАКТНОСТИ ОПЕРАТОРА ВЛОЖЕНИЯ ПРОСТРАНСТВ СОБОЛЕВА

Введение

Верхняя χ-норма — это характеристика степени некомпактности линейного оператора. Во многих случаях (напр., [1]–[4]), когда она достаточно мала, результаты обобщаются с компактных операторов на некомпактные. Однако бывают ситуации, как в случае с оператором вложения пространств Соболева на области с нерегулярной границей, когда вычисление χ-нормы довольно сложно.

В данной работе получены оценки для верхней χ-нормы оператора вложения специального класса пространств Соболева, включающего пространства Соболева на области с так называемым "обобщенным хребтом" [5], [6].

Пусть Q — область в R^n, $W_p^1(Q) = W_p^1$ — пространство Соболева, $L_q(Q) = L_q$ — пространство Лебега, $1 < p, q < \infty$, $\operatorname{mes} Q < \infty$, $L_p^1(Q) = L_p^1$ — пространство всех обобщенных функций на Q с полунормой $\|f\|_{L_p^1} = \|\nabla f\|_{L_p}$, C — совокупность всех постоянных функций на Q, P_D — оператор умножения на характеристическую функцию измеримого подмножества $D \subset Q$.

Определение 1 ([1], [2], [7]). Пусть E — банахово пространство, а Ω — ограниченное подмножество E. Мерой некомпактности Хаусдорфа $\chi_E(\Omega) = \chi(\Omega)$ множества Ω называется инфимум всех $\varepsilon > 0$, при которых Ω имеет в E конечную ε-сеть.

Определение 2 ([7]). Пусть G и E — банаховы пространства, A — линейный ограниченный оператор из G в E. Верхней χ-нормой оператора A называется величина $\|A\|^{(\chi)} = \chi_E(AS_1)$, где S_1 — единичная сфера пространства G.

Пусть μ — неотрицательная борелевская мера на $J = [a, b)$ и $\check{\mu}$ — абсолютно непрерывная часть μ, $1 < p \le q < \infty$. Под константой Макенхаупта подразумевается величина

$$\lim_{\delta \to 0} N_\delta, \tag{1}$$

где

$$N_\delta = \sup_{r \in J_\delta} \left\{ [\mu(b-) - \mu(r)]^{1/q} \left(\int_c^r (d\check{\mu}/dt)^{-1/(p-1)} dt \right)^{(p-1)/p} \right\}$$

(напр., [8], теорема 1, гл. 1, § 1.3, с. 42).

Всюду будем предполагать наличие вложения L_p^1/C в L_q/C для $1 < p \le q < \infty$, под которым понимается справедливость неравенства Пуанкаре

$$\|f - \overline{f}\|_{L_q} \le k \|\nabla f\|_{L_p}, \tag{2}$$

где

$$\overline{f} = \frac{1}{\operatorname{mes} Q} \int_Q f(x) dx$$

([8], лемма 2, гл. 3, § 3.2, с. 143; [6], неравенство 2.18).

Будем предполагать, что область Q удовлетворяет условиям:

1. для некоторого интервала $J=[a,b)$ существует равномерно локально липшицево отображение $\tau : Q \to J$, т. е. для каждого $x \in Q$ найдется такая окрестность $V(x)$, что

$$|\tau(x)-\tau(y)| \le \gamma |x-y| \tag{3}$$

для всех $y \in V(x)$, причем $Q \backslash Q_\delta$ удовлетворяет условию конуса, где $Q_\delta = \tau^{-1}(J_\delta)$, а $J_\delta = [1/\delta, b)$ при $b=\infty$, $J_\delta = [b-\delta, b)$ при $b<\infty$;

2. если

$$\mu(t) = \operatorname{mes}\{x \in Q : \tau(x) \in [a,t)\}, \quad \mu(d-)-\mu(c) = \mu(c,d) \quad (a \le c < d \le b), \tag{4}$$

$L^p(J, d\mu) = L^p$ — пространство функций, локально липшицевых на J и таких, что

$$\|F\|_{L^p} = \left(\int_J |F|^p d\mu \right)^{1/p} < \infty,$$

$L^{1,p,q}(J,d\mu) = L^{1,p,q}$ — множество $F \in L^q$, для которых $F' \in L^p$, то существует отображение $M : L^1_p \cap C^1(Q) \to L^{1,p,q}$, удовлетворяющее неравенству

$$\|(Mf)'\|_{L^p} \le \rho \|\nabla f\|_{L_p}; \tag{5}$$

3. для оператора $TF = F(\tau(x))$, действующего из $L^{1,p,q}$ в L^1_p, справедливо равенство

$$\lim_{\delta\to 0} \sup_{f \in S\cap C^1(Q)} \|P_{Q_\delta}(f - TMf)\|_{L_q} = 0 \quad (S = \{f \in L^1_p : \|\nabla f\|_{L_p} = 1\}). \tag{6}$$

Замечание. Как следует из лемм 4.2–4.5, теорем 4.6–4.7 работы [6], области с так называемым "обобщенным хребтом" удовлетворяют предположениям теоремы для случая $p=q$ (только этот случай рассмотрен в [6]).

Напомним ([6], определение 4.1), что область Q называется областью с "обобщенным хребтом" (generalized ridged domain), если существуют функции u, ρ, τ, интервал $J=[a,b)$ $(b \le \infty)$ и положительные константы α, β, δ_1, γ такие, что выполнены условия:

1) $u : J \to Q$, $\rho : J \to R^+ = (0,\infty)$ удовлетворяют условию Липшица;
2) $\tau : Q \to J$ равномерно локально удовлетворяет условию Липшица, т. е. для всех $x \in Q$ найдется такая окрестность $V(x)$, что $|\tau(x)-\tau(y)| \le \gamma\|x-y\|$ для всех $y \in V(x)$;
3) $\|x - u(\tau(x))\| \le \alpha\rho(\tau(x))$ для всех $x \in Q$;
4) $r_n\{\|u'(t)\| + \|\rho'(t)\|\} \le \beta$ для всех $t \in J$, где r_n — наилучшая константа в неравенстве $|(a,b)| \le r_n\|a\|\,\|b\|$, а $\|\cdot\|$ — норма в R^n;
5) для $B_t := B(u(t),\rho(t))$ и $S(x) := \{y : sy+(1-s)x \in Q$ для всех $0 \le s \le 1\}$ имеет место включение $B_{\tau(x)} \subset Q$ и, кроме того, $S(x) \cap B_{\tau(x)}$ содержит такой шар $B(x)$, что $\operatorname{mes}(B(x))/\operatorname{mes}(B_{\tau(x)}) \ge \delta_1 > 0$.

Тогда кривая $t \to u(t) : J \to Q$ называется "обобщенным хребтом".

Отсюда видно, что предположение (3) совпадает с предположением 2) области с "обобщенным хребтом". Заметим также, что в силу предположения (6) отображение T можно интерпретировать как обратное отображение к M на той части, где происходит ухудшение области.

1. Формулировка основного результата. Комментарии. Пример

Для верхней χ-нормы оператора вложения $I : L^1_p/C \to L_q/C$ выделенного класса пространств Соболева в пространства Лебега установим связь с константой Макенхаупта.

Теорема. *Пусть выполнены предположения* (1)–(6). *Тогда справедливо неравенство*

$$1/\gamma \lim_{\delta\to 0} N_\delta \le \|I\|^{(\chi)} \le \rho q^{1/q}(q/(q-1))^{(p-1)/p} \lim_{\delta\to 0} N_\delta.$$

В частности, оператор вложения $E : W_p^1 \to L_q$ компактен, если и только если

$$\lim_{\delta\to 0} N_\delta = 0.$$

Замечание. Этот результат обобщает теорему 3 [9], из него вытекает следствие 5.2 [6] (критерий компактности оператора вложения в случае $p = q$). Оценки степени некомпактности для оператора вложения, полученные в теореме для $1 < p \le q < \infty$ (при выполнении (2)), являются важными для приложений ([1]–[4]).

Понятие "обобщенного хребта" не используется из-за сложности применения этого понятия при $p < q$, а потому вопрос о его существовании не исследуется. Кроме того, в нижеследующем примере область Q и τ удовлетворяют предположениям теоремы, однако условие 5) определения области с "обобщенным хребтом" для них не выполнено.

Пример. Рассмотрим область

$$Q \subset R^2, \quad Q = \{(x_1, x_2) : 0 < x_2 < \infty,\ 0 < x_1 < e^{-\xi x_2}, \quad \xi = \mathrm{const} > 0\}.$$

Мера Лебега ее конечна, хотя область и неограничена, а потому пространства $L_q(Q)$ включают в себя постоянные функции, поскольку $c^q \operatorname{mes} Q < \infty$. Область Q удовлетворяет и остальным предположениям теоремы, например, при $p = q = 2$. Действительно, в качестве J рассмотрим интервал $[0, \infty)$. Положим $\tau : (x_1, x_2) \to x_2$. Очевидно, τ удовлетворяет предположению (3), причем $\gamma = 1$.

Для $f \in L_2^1 \cap C^1(Q)$ пусть

$$Mf(t) = e^{\xi t} \int_0^{e^{-\xi t}} f(\tau, t)\, d\tau.$$

Нетрудно проверить, что для любого $(x_1, x_2) \in Q$

$$|f(x_1, x_2) - TMf(x_1, x_2)| \le e^{-\xi x_2} \|\nabla f\|_{L_2}/\xi,$$

откуда следует справедливость предположения (6). Непосредственно устанавливается справедливость всех остальных предположений теоремы.

Вычисляем

$$\mu(t) = \int_0^t e^{-\xi\tau}\, d\tau = (1 - e^{-\xi t})/\xi,$$

$$\lim_{\delta\to 0} N_\delta = \lim_{\delta\to 0} \sup_{r > 1/\delta} (e^{-\xi r}/\xi)^{1/2} \left(\int_{1/\delta}^r (e^{-\xi\tau})^{-1}\, d\tau \right)^{1/2} = 1/\xi.$$

Отсюда $\|I\|^{(\chi)} \le 2/\xi$ и $\|I\|^{(\chi)} > 0$, т. е. $I : L_2^1/C \to L_2/C$ не является компактным, в то же время верхняя χ-норма может быть сколь угодно малой при $\xi \to \infty$.

Более сложные примеры областей, удовлетворяющих предположениям теоремы, можно найти в [5], [6].

2. Доказательство основного результата

Доказательство теоремы проведем с помощью двух лемм.

Лемма 1. *Пусть выполнены* (2)–(6). *Тогда*

1. $$\|\nabla(TF)\|_{L_p} \le \gamma \|F'\|_{L^p}, \tag{7}$$

2. $\lim_{\delta\to 0} \operatorname{mes} Q_\delta = 0$,

3. *если* $I^0 = \lim_{\delta\to 0} \sup_{F\in JS} \|P_{J_\delta}(F - F(c))\|_{L^q}$ *и* $I_0 = \lim_{\delta\to 0} \sup_{F\in JS} \|P_{J_\delta}(F - F(c_0))\|_{L^q}$, *где* $JS = \{F \in L^{1,p,q} : \|F'\|_{L^p} = 1\}$, $c = b - \delta$ *при* $b < \infty$ *и* $c = 1/\delta$ *при* $b = \infty$, $c_0 \in \tau(Q)$ — *произвольная,*

не зависящая от δ, точка из интервала, то $\|I\|^{(\chi)} < \rho I^0$ и $I_0 \leq \|I\|^{(\chi)}/\gamma$ для любого c_0, где $I : L_p^1/C \to L_q/C$ — оператор вложения.

Замечание. В определении величин I^0 и I_0 под $F(c)$ и $F(c_0)$ понимается значение непрерывной функции в точке из интервала, поскольку все функции из $L^{1,p,q}$ непрерывны. Точка c зависит от δ в отличие от точки c_0. Заметим также, что на классе функций $F + C$, где C — множество всех постоянных функций на интервале, разность $F - F(c)$ постоянна для любой точки c.

Доказательство. 1. Неравенство (7) по лемме 4.4 [6] вытекает из предположения (3).

2. Имеем $\mathrm{mes}(Q \backslash P) < \varepsilon$ для произвольного $\varepsilon > 0$ и некоторого замкнутого множества $P \subset Q$. Из непрерывности τ следует замкнутость $\tau(P) \subset [\alpha, \beta] \subset J$. Отсюда найдется такое $\delta > 0$, что $P \subset Q \backslash Q_\delta$, т.е. справедливо утверждение 2.

3. Покажем неравенство $\|I\|^{(\chi)} \leq \rho I^0$. Из предположения (6) следует, что для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что

$$\|P_{Q_\delta}(f - TMf)\|_{L_q} < \varepsilon \tag{8}$$

для всех $f \in S \cap C^1(Q)$. По определению I^0 без ограничения общности считаем справедливым неравенство

$$\|P_{J_\delta}(F - F(c))\|_{L^q} \leq (I^0 + \varepsilon)\|F'\|_{L^p}, \tag{9}$$

где $c = 1/\delta$, если $b = \infty$, и $c = b - \delta$, если $b < \infty$.

Множество $U := \{f - \overline{f} : f \in S \cap C^1(Q)\}$ в силу неравенства (2) равномерно ограничено в $L_q \cap L_p^1$. Отсюда, принимая во внимание (5) и (8), имеем равномерную ограниченность $\{P_{J_\delta}Mf : f \in U\}$ в $L^{1,p,q}$, что влечет по теореме Соболева равномерную ограниченность в L^∞ множества постоянных $\{Mf(c) : f \in U$, где $c = 1/\delta$ при $b = \infty$, $c = b - \delta$ при $b < \infty\}$.

Оценим расстояние между U и вполне ограниченным в L_q множеством $\{P_{Q\backslash Q_\delta}f + Mf(c)P_{Q_\delta}1 : f \in U\}$. Из (5), (8) и (9) имеем для всех $f \in U$

$$\begin{aligned}\|f - P_{Q\backslash Q_\delta}f - Mf(c)P_{Q_\delta}1\|_{L_q} &\leq \varepsilon + \|P_{Q_\delta}(TMf - Mf(c))\|_{L_q} = \\ &= \varepsilon + \|P_{J_\delta}(Mf - Mf(c))\|_{L^q} \leq \rho(I^0 + \varepsilon) + \varepsilon.\end{aligned}$$

Отсюда, учитывая, что по теореме 1 ([8], гл. 1, § 1.1, с. 16) $L_p^1 \cap C^\infty(Q)$ плотно в L_p^1 и $\|I\|^{(\chi)} = \chi_{L_q/C}(IS) = \chi_{L_q}(IU)$, получим необходимое неравенство.

Докажем последнее утверждение леммы 1, а именно, неравенство $I_0 \leq \|I\|^{(\chi)}/\gamma$ для всех c_0. Очевидно,

$$I_0 = \lim_{\delta \to 0} \sup_{F \in JS} \|P_{J_\delta}((F - \overline{F}) - (F - \overline{F})(c_0))\|_{L^q}. \tag{10}$$

По формуле (2) из работы [3] имеем

$$\|I\|^{(\chi)} \geq \lim_{\delta \to 0} \sup_{TF \in S} \|P_{Q_\delta}(TF - \overline{TF})\|_{L_q} \geq (1/\gamma) \lim_{\delta \to 0} \sup_{TF \in S} \|P_{J_\delta}(F - \overline{F})\|_{L^q}. \tag{11}$$

Из определения T, неравенств (7) и (9) вытекает

$$\|F - \overline{F}\|_{L^q} = \|TF - \overline{TF}\|_{L_q} \leq k\|\nabla TF\|_{L_p} \leq k\gamma\|F'\|_{L^p},$$

откуда следует равномерная ограниченность $\{F - \overline{F} : F \in JS\}$ в $L^{1,p,q}$. Применяя теорему Соболева, получим равномерную ограниченность постоянных $\{(F - \overline{F})(c_0) : F \in JS\}$ в L^∞ и, следовательно,

$$\lim_{\delta \to 0} \sup_{F \in JS} \|P_{J_\delta}(F - \overline{F})(c_0)\|_{L^q} = 0,$$

что в силу (10) и (11) завершает доказательство.

Лемма 2. *Пусть* μ *— неотрицательная борелевская мера на* $J = [a, b)$ *и* $\check{\mu}$ *— абсолютно непрерывная часть* μ, $1 < p \le q < \infty$, N_δ *определено в* (1).

Тогда

$$I^0 \le q^{1/q}(q/(q-1))^{(p-1)/p} \lim_{\delta\to 0} N_\delta$$

и

$$\lim_{\delta\to 0} N_\delta \le I_0.$$

Доказательство дословно повторяет рассуждения, проводимые при доказательстве неравенства Харди ([8], теорема 1.3.1).

Применяя лемму 2 к мере μ, порожденной неубывающей функцией $\mu(t)$ из (4), являющейся в силу построения неотрицательной борелевской мерой на $J = [a, b)$, из леммы 1 получим утверждение теоремы.

Литература

1. Садовский Б.Н. *Предельно компактные и уплотняющие операторы* // УМН. – 1972. – Т. 27. – № 1. – С. 81–146.
2. Ахмеров Р.Р., Каменский М.И., Потапов А.С. и др. *Меры некомпактности и уплотняющие операторы.* – Новосибирск: Наука, 1986. – 264 с.
3. Ерзакова Н.А. *Некоторые приложения мер некомпактности к уравнениям математической физики* // Сб. научн. тр. НИИ КТ. – Хабаровск, 1994. – Вып. 1. – С. 38–49.
4. Yerzakova N.A. *The measure of noncompactness of Sobolev embeddings*// Integr. Equat. and Oper. Theory. – 1994. – V. 19. – № 3. – P. 349–359.
5. Amick C.J. *Some remarks on Rellich's theorem and the Poincaré inequality* // J. London Math. Soc. – 1978. – V. 18. – № 1. – P. 81–93.
6. Evans W.D., Harris D.J. *Sobolev embedding for generalized ridged domains* // Proc. London Math. Soc. – 1987. – V. 54. – № 1. – P. 141–175.
7. Гольденштейн Л.С., Гохберг И.Ц., Маркус А.С. *Исследование некоторых свойств линейных ограниченных операторов в связи с их q-нормой* // Учен. зап. Кишиневск. ун-та. Сер. физ.-матем. наук. – 1957. – Т. 29. – С. 29–36.
8. Мазья В.Г. *Пространства С.Л. Соболева.* – Л.: Изд-во ЛГУ, 1985. – 415 с.
9. Ерзакова Н.А. *Критерии компактности оператора вложения пространств Соболева* // Сб. научн. тр. НИИ КТ. – Хабаровск, 1993. – Вып. 1. – С. 103–109.

Хабаровский государственный технический университет

Поступили
первый вариант 14.11.1995
окончательный вариант 12.11.1996