ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2006 МАТЕМАТИКА № 4 (527)

УДК 517.968:519.642

Л.Б. ЕРМОЛАЕВА

К ОБОСНОВАНИЮ КВАДРАТУРНОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. Постановка задачи

Данная статья посвящена теоретическому обоснованию в смысле ([1], гл. 14; [2], гл. 1) метода механических квадратур решения интегральных уравнений Фредгольма вида

$$Kx \equiv x(t) - \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{h(t,\tau)x(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}}\, d\tau = y(t), \quad -1 \leqslant t \leqslant 1, \tag{1.1}$$

основанного на квадратурной формуле

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \frac{1}{n}{\sum_{k=0}^{n}}' f(t_k) + R_n[f], \quad f \in C[-1,1], \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1.2}$$

$$t_k = t_{kn} = \cos\frac{k\pi}{n}, \quad k = \overline{0,n}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1.3}$$

где $x(t)$ — искомая функция, $h(t,\tau)$ и $y(t)$ — известные непрерывные функции в областях соответственно $[-1,1;-1,1] \equiv [-1,1]^2$ и $[-1,1]$, $R_n[f]$ — остаточный член квадратурной формулы для непрерывной функции $f(t)$, а штрих у знака суммы означает, что ее коэффициенты при $k=0$ и $k=n$ следует разделить на 2.

Приближенное решение уравнения (1.1) ищется в виде многочлена

$$x_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k l_k(t) = \sum_{k=0}^{n} \beta_k t^k, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1.4}$$

а также в виде функции [3]

$$\widetilde{x}_n(t) = y(t) + \frac{1}{n}{\sum_{k=0}^{n}}' h(t,t_k)\alpha_k, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1.5}$$

где $l_k(t)$ — фундаментальные многочлены Лагранжа для узлов (1.3). Неизвестные коэффициенты $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ (а следовательно, и $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n$) будем определять согласно (1.2)–(1.3) из системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\alpha_j - \frac{1}{n}{\sum_{k=0}^{n}}' h(t_j,t_k)\alpha_k = y(t_j), \quad j = \overline{0,n}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.6}$$

2. Основные результаты

Обозначим через $E_n(y)$ наилучшее равномерное приближение функции $y(t) \in C[-1,1]$ всевозможными алгебраическими многочленами вида (1.4), а через $E_n^t(h)$ и $E_n^\tau(h)$ — соответствующие частные наилучшие равномерные приближения функции $h(t,\tau)$ по переменным $t \in [-1,1]$ и соответственно $\tau \in [-1,1]$.

Для вычислительной схемы (1.1)–(1.6) справедливы следующие рузультаты.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия*

а) *функции h (по каждой из переменных) и y удовлетворяют условию Дини–Липшица;*

б) *уравнение (1.1) имеет единственное непрерывное решение $x^*(t)$ при любой непрерывной правой части.*

Тогда при всех $n \geqslant n_0$ ($n_0 \in \mathbb{N}$ определяется структурными свойствами ядра $h(t,\tau)$) СЛАУ (1.6) имеет единственное решение $\alpha_0^*, \alpha_1^*, \ldots, \alpha_n^*$ (а следовательно, и $\beta_0^*, \beta_1^*, \ldots, \beta_n^*$). Приближенные решения

$$x_n^*(t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k^* l_k(t) = \sum_{k=0}^{n} \beta_k^* t^k \tag{1.4*}$$

равномерно сходятся к точному решению $x^*(t)$ на $[-1,1]$, причем

$$\max_{-1\leqslant t\leqslant 1} |x^*(t) - x_n^*(t)| \leqslant c_1\{E_n^t(h) + E_{n-1}^\tau(h) + E_n(y)\} \ln n, \tag{2.1}$$

где (здесь и далее) $c_1, c_2, \ldots$ — вполне определенные положительные постоянные, не зависящие от $n \in \mathbb{N}$.

Следствие. Пусть существуют непрерывные производные

$$\frac{d^r y(t)}{dt^r} \in \operatorname{Lip}\alpha, \quad \frac{\partial^r h(t,\tau)}{\partial t^r} \in \operatorname{Lip}\alpha \text{ (по } t), \quad \frac{\partial^r h(t,\tau)}{\partial \tau^r} \in \operatorname{Lip}\alpha \text{ (по } \tau), \tag{2.2}$$

где $r \in \mathbb{R}^+$, $\alpha \in (0,1]$. Тогда метод сходится равномерно с неулучшаемой по порядку скоростью

$$\max_{-1\leqslant t\leqslant 1} |x^*(t) - x_n^*(t)| \leqslant \frac{c_2 \ln n}{n^{r+\alpha}}. \tag{2.3}$$

В следующих двух теоремах уравнение (1.1) с вещественными коэффициентами рассматривается в пространствах вещественных функций (см. также ниже замечание 4.3).

Теорема 2. *Пусть выполнено условие*

$$q \equiv \max_{-1\leqslant t,\tau\leqslant 1} \frac{|h(t,\tau) + h(\tau,t)|}{2} < 1. \tag{2.4}$$

Тогда

а) *уравнение (1.1) имеет единственное решение $x^* \in C[-1,1]$ при любой правой части $y \in C[-1,1]$, причем*

$$\max_{-1\leqslant t\leqslant 1} |x^*(t)| \leqslant \{1 + (1-q)^{-1}\|h\|_C\} \max_{-1\leqslant t\leqslant 1} |y(t)|, \tag{2.5}$$

где $\|h\|_C = \max\limits_{-1\leqslant t,\tau\leqslant 1} |h(t,\tau)|$;

б) *при любых $n \in \mathbb{N}$ СЛАУ (1.6) имеет единственное решение $\alpha_0^*, \alpha_1^*, \ldots, \alpha_n^*$, причем*

$$\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}{}' |\alpha_k^*|^2\right\}^{1/2} \leqslant \frac{1}{1-q}\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}{}' |y(t_k)|^2\right\}^{1/2}, \quad n \in \mathbb{N}; \tag{2.6}$$

в) *приближенные решения*

$$\widetilde{x}_n^*(t) = y(t) + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}{}' h(t,t_k)\alpha_k^*, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1.5*}$$

равномерно сходятся при $n \to \infty$ *к точному решению* $x^*(t) \in C[-1,1]$, *причем погрешность приближенной формулы* $x^*(t) \approx \widetilde{x}_n^*(t)$, $-1 \leqslant t \leqslant 1$, *при любых* $n \in \mathbb{N}$ *может быть оценена неравенством*

$$\max_{-1\leqslant t\leqslant 1} |x^*(t) - \widetilde{x}_n^*(t)| \leqslant 2\{1 + (1-q)^{-1}\|h\|_C\} E_{2n-1}^{\tau}(hx^*), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.7}$$

где $hx^* = h(t,\tau)x^*(\tau)$ *и*

$$E_{2n-1}^{\tau}(hx^*) \leqslant E_{2n-1}^{\tau}(h(t,\tau)y(\tau)) + E_{2n-1}^{\tau}(h(t,\tau)h(\tau,\xi))(1-q)^{-1} \max_{-1\leqslant t\leqslant 1} |y(t)|, \tag{2.8}$$

а $E_{2n-1}^{\tau}(g(t,\tau,\xi))$ *есть частное наилучшее равномерное приближение функции* $g(t,\tau,\xi) \in C[-1,1]^3$ *по переменной* τ *равномерно относительно* $(t,\xi) \in [-1,1]^2$.

Следствие. Если выполнено условие (2.2), то в условиях теоремы метод сходится равномерно со скоростью

$$\max_{-1\leqslant t\leqslant 1} |x^*(t) - \widetilde{x}_n^*(t)| \leqslant \frac{c_3}{n^{r+\alpha}}. \tag{2.9}$$

Теорема 3. *Пусть* $h(t,\tau) = -h(\tau,t)$. *Тогда как уравнение* (1.1), *так и СЛАУ* (1.6) *при любых* $n \in \mathbb{N}$ *однозначно разрешимы, причем*

$$\max_{-1\leqslant t\leqslant 1} |x^*(t)| \leqslant \{1 + \|h\|_C\} \max_{-1\leqslant t\leqslant 1} |y(t)|; \tag{2.10}$$

$$\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}{}' |\alpha_k^*|^2\right\}^{1/2} \leqslant \left\{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}{}' |y(t_k)|^2\right\}^{1/2}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.11}$$

При этом погрешность приближенной формулы

$$x^*(t) \approx x_n^*(t), \quad -1 \leqslant t \leqslant 1, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.12}$$

может быть оценена неравенством

$$\max_{-1\leqslant t\leqslant 1} |x^*(t) - x_n^*(t)| \leqslant \left(\frac{8}{\pi} + \frac{4}{\pi}\ln\frac{4n}{\pi}\right)\{E_n(x^*) + (1 + \|h\|_C)E_{2n-1}^{\tau}(hx^*)\}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.13}$$

где $E_{2n-1}^{\tau}(hx^*)$ *оценено в* (2.8), *а*

$$E_n(x^*) \leqslant E_n(y) + E_n^t(h) \max_{-1\leqslant t\leqslant 1} |y(t)|. \tag{2.14}$$

3. Доказательства теорем

Доказательства теорем 1–3 будем вести на основе результатов ([1], гл. 14; [2], гл. 1; [4], гл. 4), а также работы [5], специально посвященной свойствам квадратурной формулы (1.2)–(1.3). При этом существенно будем пользоваться также результатами теории полиномиальных приближений функций [6]–[8].

Доказательство теоремы 1. Пусть, как обычно, $C[-1,1] \equiv C$ — пространство всех непрерывных на $[-1,1]$ функций с чебышевской нормой $\|f\|_C = \max_{-1\leqslant t\leqslant 1} |f(t)|$, $f \in C$. Тогда интегральное уравнение (1.1) эквивалентно линейному операторному уравнению

$$Kx \equiv x - Hhx = y \quad (x, y \in C), \tag{3.1}$$

где

$$K = E - Hh : C \to C, \quad (Hhx)(t) \equiv \frac{1}{\pi} \int\limits_{-1}^{1} \frac{h(t,\tau)x(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}}\, d\tau,$$

есть непрерывный оператор, причем

$$\|Hh\|_{C\to C} = \max_{-1\leqslant t\leqslant 1} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{|h(t,\tau)|}{\sqrt{1-\tau^2}}\, d\tau \leqslant \max_{-1\leqslant t,\tau\leqslant 1} |h(t,\tau)| \equiv \|h\|_C.$$

Из условия б) теоремы 1 и известных теорем Фредгольма (напр., [1], гл. 13) в банаховом пространстве C следует, что оператор $K : C \to C$ имеет непрерывный обратный оператор K^{-1} и

$$\|K^{-1}\| \leqslant c_4 < \infty, \ K^{-1} : C \to C. \tag{3.2}$$

Пусть $I\!H_n$ — множество всех алгебраических многочленов вида (1.4); очевидно, $I\!H_n \subset C$ и $\dim I\!H_n = n+1 < \infty$. Обозначим через $P_n : C \to I\!H_n \subset C$ оператор проектирования пространства C на подпространство $I\!H_n$, определяемый по формуле

$$P_n(f;t) = {\sum_{k=0}^{n}}' f(t_k) l_k(t), \quad t \in [-1,1], \quad n \in \mathbb{N}, \quad f \in C, \tag{3.3}$$

где (напр., [7], сс. 7, 169)

$$l_k(t) = \frac{(-1)^{k+1}}{n} \frac{\sin n\theta \sin\theta}{\cos\theta - \cos\theta_k}, \quad k = \overline{0,n}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3.4}$$

$$t = \cos\theta, \quad \theta = \arccos t, \quad \theta_k = \frac{k\pi}{n}, \quad t_k = \cos\theta_k.$$

Поэтому в силу [5] СЛАУ (1.6) эквивалентна линейному операторному уравнению

$$K_n x_n \equiv x_n - P_n H P_n^\tau (h x_n) = P_n y \quad (x_n, P_n y \in I\!H_n), \tag{3.5}$$

где P_n^τ означает, что оператор Лагранжа P_n применяется к функции $hx_n = h(t,\tau)x_n(\tau)$ по переменной $\tau \in [-1,1]$.

Покажем близость операторных уравнений (3.1) и (3.5) в смысле теорем 7 и 14 ([2], гл. 1). С этой целью установим структурные и аппроксимативные свойства определенного в (3.3)–(3.4) оператора $P_n : C \to C$. Из результатов ([7], [8] и [2], гл. 3) следует

$$\|P_n\| \sim \frac{2}{\pi} \ln n, \quad n \to \infty, \quad P_n : C \to C, \tag{3.6}$$

$$\frac{2}{\pi} \ln n \leqslant \|P_n\| \leqslant \frac{4}{\pi} + \frac{2}{\pi} \ln \frac{4n}{\pi}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3.7}$$

где $\sim$ есть знак сильной эквивалентности. Отсюда с учетом тождества $P_n^2 = P_n$ получаем

$$\delta_n \equiv \|y - P_n y\| \leqslant 2\|P_n\| E_n(y), \quad y \in C, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.8}$$

Поэтому благодаря первой теореме Джексона (напр., [6], гл. 6), неравенствам (3.7) и условию а) теоремы 1, имеем

$$\delta_n \equiv \|y - P_n y\| \leqslant 6\|P_n\| \omega(y; 1/n) = O(\omega(y;1/n)\ln n) \to 0, \quad n \to \infty, \tag{3.9}$$

где $\omega(y;\delta)$ — модуль непрерывности функции $y(t)$ с шагом $\delta \in [0,2]$.

Докажем, что операторы $K : C \to C$ и $K_n : I\!H_n \to I\!H_n \subset C$ близки в том смысле, что

$$\varepsilon_n \equiv \|K - K_n\|_{I\!H_n \to C} \leqslant 2\|P_n\| \{E_n^t(h) + E_{n-1}^\tau(h)\}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.10}$$

Действительно, из (3.1) и (3.5) для любого $x_n \in I\!H_n$ находим

$$\|Kx_n - K_n x_n\| = \|Hhx_n - P_n H P_n^\tau(hx_n)\| \leqslant$$
$$\leqslant \|Hhx_n - P_n Hhx_n\| + \|P_n H(h-Q)x_n\| + \|P_n[HQx_n - HP_n^\tau(hx_n)]\| \equiv \varepsilon_1^{(n)} + \varepsilon_2^{(n)} + \varepsilon_3^{(n)}, \tag{3.11}$$

где $Q(t,\tau) \in C[-1,1]^2$ есть алгебраический многочлен наилучшего равномерного приближения степени не выше $n-1$ функции $h(t,\tau)$ по переменной τ.

Поскольку $(Hhx_n)(t) \in C$, то в силу (3.8) и (3.11) для любого $x_n \in X_n$ находим

$$\varepsilon_1^{(n)} \equiv \|Hhx_n - P_n Hhx_n\| = \|H(h - P_n^t h)x_n\| \leqslant 2\|P_n\| E_n^t(h)\|H(|x_n|)\| =$$
$$= 2\|P_n\|E_n^t(h)\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{|x_n(\tau)|}{\sqrt{1-\tau^2}}\,d\tau \leqslant 2\|P_n\|E_n^t(h)\|x_n\|. \tag{3.12}$$

Из (3.11) при любых $x_n \in I\!H_n$ устанавливаем

$$\varepsilon_2^{(n)} \equiv \|P_n H(Q-h)x_n\| \leqslant \|P_n\|\|H(Q-h)x_n\| \leqslant$$
$$\leqslant \|P_n\| \max_{-1\leqslant t,\tau\leqslant 1}|h(t,\tau) - Q(t,\tau)|\,\|H(|x_n|)\| \leqslant \|P_n\|E_{n-1}^\tau(h)\|x_n\|. \tag{3.13}$$

Поскольку для любого $x_n \in I\!H_n$ функции $Q(t,\tau)x_n(\tau)$ принадлежат $I\!H_{2n-1}$, а функции $P_n^\tau[h(t,\tau)x_n(\tau)]$ принадлежат $I\!H_n$ по переменной τ (равномерно относительно t), то в силу результатов [5] относительно квадратурной формулы (1.2)–(1.3) находим

$$\varepsilon_3^{(n)} \equiv \|P_n[HQx_n - HP_n^\tau(hx_n)]\| \leqslant \|P_n\|\left\|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}{}' Q(t,t_k)x_n(t_k) - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}{}' h(t,t_k)x_n(t_k)\right\| \leqslant$$
$$\leqslant \|P_n\| \max_{-1\leqslant t,\tau\leqslant 1}|h(t,\tau) - Q(t,\tau)|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}{}'|x_n(t_k)| \leqslant \|P_n\|E_{n-1}^\tau(h)\|x_n\|, \quad x_n \in I\!H_n. \tag{3.14}$$

Из неравенств (3.11)–(3.14) получаем оценку (3.10), а из нее с учетом первой теоремы Джексона [6], неравенств (3.7) и условия а) теоремы 1 следует

$$\varepsilon_n \equiv \|K - K_n\|_{I\!H_n \to C} \leqslant 6\|P_n\|\{\omega_t(h;1/n) + \omega_\tau(h;1/n)\} =$$
$$= O\{(\omega_t(h;1/n) + \omega_\tau(h;1/n))\ln n\} \to 0, \quad n \to \infty, \tag{3.15}$$

где $\omega_t(h;\delta)$ и $\omega_\tau(h;\delta)$ — частные модули напрерывности функции $h(t,\tau)$ по переменным t и τ соответственно.

В силу соотношений (3.2), (3.8)–(3.10), (3.15) для уравнений (3.1) и (3.5) выполнены все условия теорем 7 и 14 ([2], гл. 1), из которых следуют утверждения

α) для всех $n \in \mathbb{N}$ таких, что

$$q_n \equiv 2\|K^{-1}\|\|P_n\|\{E_n^t(h) + E_{n-1}^\tau(h)\} < 1, \quad n \geqslant n_0,$$

операторы K_n из (3.5) непрерывно обратимы (а следовательно, СЛАУ (1.6) имеет единственное решение), причем

$$\|K_n^{-1}\| \leqslant \frac{\|K^{-1}\|}{1-q_n} \leqslant 2\|K^{-1}\|, \quad n \geqslant n_1 \geqslant n_0; \tag{3.16}$$

β) приближенные решения (1.4*) равномерно сходятся к точному решению $x^*(t)$, причем погрешность приближенной формулы

$$x^*(t) \approx x_n^*(t), \quad t \in [-1,1], \quad n \geqslant n_0,$$

с учетом (3.16) может быть оценена неравенствами

$$\|x^* - x_n^*\| \leqslant \frac{\|K^{-1}\|}{1 - q_n}[\|y - P_n y\| + q_n\|y\|] \leqslant c_5\|P_n\|\{E_n^t(h) + E_{n-1}^\tau(h) + E_n(y)\} \leqslant$$
$$\leqslant c_6 \ln n\{\omega_t(h;1/n) + \omega_\tau(h;1/n) + \omega(y;1/n)\}, \quad (3.17)$$

из которых и следует оценка (2.1). $\square$

Следствие теоремы с оценкой (2.3) легко выводится из неравенств (3.17) и второй теоремы Джексона (напр., [6], гл. 6).

Доказательство теоремы 2. Обозначим через $L_2((1-t^2)^{-\frac{1}{2}};[-1;1]) \equiv L_2(\rho)$ весовое гильбертово пространство квадратично суммируемых по Лебегу функций на $[-1,1]$ со скалярным произведением и нормой соответственно

$$(f,g) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt, \quad \|f\|_{L_2(\rho)} = \left\{\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{|f(t)|^2 dt}{\sqrt{1-t^2}}\right\}^{1/2} \quad (f,g \in L_2(\rho)).$$

Теперь интегральное уравнение (1.1) будем рассматривать в $L_2(\rho)$ как линейное операторное уравнение вида

$$Kx \equiv (x - H^- x) - H^+ x = y \quad (x,y \in L_2(\rho)), \quad (3.18)$$

где

$$H^{\pm}x = Hh^{\pm}x, \quad h^{\pm}(t,\tau) = \frac{h(t,\tau) \pm h(\tau,t)}{2}. \quad (3.19)$$

Следуя [4] (гл. 4), из соотношений (3.18)–(3.19) для любой функции $x \in L_2(\rho)$ находим

$$(Kx,x) = (x,x) - (H^- x,x) - (H^+ x,x) = (x,x) - (H^+ x,x) \geqslant$$
$$\geqslant (x,x) - \|H^+\|_{L_2(\rho)}\|x\|_{L_2(\rho)}^2 \geqslant \|x\|_{L_2(\rho)}^2(1 - \|H^+\|_{L_2(\rho)}),$$

где в силу (3.19) и (2.4)

$$\|H^+\|_{L_2(\rho)} = \|H^+\|_{L_2(\rho)\to L_2(\rho)} \leqslant \left\{\frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \rho(t)\rho(\tau)|h^+(t,\tau)|^2 dt\, d\tau\right\}^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant \max_{-1\leqslant t,\tau\leqslant 1}|h^+(t,\tau)|\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\rho(s)\,ds = \|h^+(t,\tau)\|_C = q < 1.$$

Поэтому $(Kx,x) \geqslant (1-q)\|x\|_{L_2(\rho)}^2$, $x \in L_2(\rho)$. Отсюда следует неравенство $\|Kx\|_{L_2(\rho)} \geqslant (1-q)\|x\|_{L_2(\rho)}$, $x \in L_2(\rho)$, обеспечивающее (напр., [1], гл. 5) существование левого непрерывного обратного оператора K_l^{-1} в $L_2(\rho)$ и

$$\|K_l^{-1}\|_{L_2(\rho)} \leqslant (1-q)^{-1} < \infty. \quad (3.20)$$

Поскольку оператор $K = E - Hh$ непрерывен, а Hh — вполне непрерывный оператор в банаховом пространстве $L_2(\rho)$, то в силу теорем Фредгольма (напр., [1], гл. 13) из (3.20) следует существование двустороннего обратного оператора K^{-1} и оценка

$$\|K^{-1}\|_{L_2(\rho)} = \|K^{-1}\|_{L_2(\rho)\to L_2(\rho)} \leqslant \frac{1}{1-q} < \infty. \quad (3.21)$$

Так как $K = E - Hh : C \to C$ непрерывен, а $Hh : C \to C$ — вполне непрерывный оператор, то с помощью (3.21), как и в работе [9], доказывается, что оператор K имеет непрерывный обратный K^{-1} в пространстве C, причем

$$\|K^{-1}\|_{C\to C} \leqslant 1 + (1-q)^{-1}\|h(t,\tau)\|_C < \infty. \quad (3.22)$$

Из (3.22) следует оценка (2.5), т. е. первое утверждение теоремы доказано.

Для доказательства второго утверждения теоремы в пространстве $(n+1)$-мерных векторов $\mathbb{R}^{n+1}$ введем скалярное произведение и норму формулами соответственно

$$(\overline{f},\overline{g})=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}{}' f_k g_k,\ \|\overline{f}\|=\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}{}'|f_k|^2\right\}^{1/2},$$

где $\overline{f}=(f_0,f_1,\dots,f_n)$, $\overline{g}=(g_0,g_1,\dots,g_n)\in\mathbb{R}^{n+1}$. Тогда СЛАУ (1.6) можно записать в $\mathbb{R}^{n+1}$ в виде эквивалентного ей линейного операторного уравнения

$$\overline{K}\overline{x}\equiv(\overline{x}-\overline{H}^{-}\overline{x})-\overline{H}^{+}\overline{x}=\overline{y}\quad(\overline{x},\overline{y}\in\mathbb{R}^{n+1}),\tag{3.23}$$

где $\overline{x}=(\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, $\overline{y}=(y(t_0),y(t_1),\dots,y(t_n))$, а

$$\overline{H}^{\pm}\overline{x}=\overline{z}^{\pm}=(z_0^{\pm},z_1^{\pm},\dots,z_n^{\pm}),\quad z_j^{\pm}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}{}' h^{\pm}(t_j,t_k)\alpha_k.$$

Следуя [4] (гл. 4), из (3.23) для любого вектора $\overline{x}\in\mathbb{R}^{n+1}$ находим

$$(\overline{K}\overline{x},\overline{x})=(\overline{x},\overline{x})-(\overline{H}^{-}\overline{x},\overline{x})-(\overline{H}^{+}\overline{x},\overline{x})=(\overline{x},\overline{x})-(\overline{H}^{+}\overline{x},\overline{x})\geqslant$$
$$\geqslant(\overline{x},\overline{x})-\|\overline{H}^{+}\overline{x}\|_{\mathbb{R}^{n+1}}\|\overline{x}\|_{\mathbb{R}^{n+1}}\geqslant(1-\|\overline{H}^{+}\|_{\mathbb{R}^{n+1}})\|\overline{x}\|^2_{\mathbb{R}^{n+1}},$$

где в силу (3.19) и (2.4) имеем

$$\|\overline{H}^{+}\|_{\mathbb{R}^{n+1}}=\|\overline{H}^{+}\|_{\mathbb{R}^{n+1}\longrightarrow\mathbb{R}^{n+1}}\leqslant\left\{\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n}{}'\sum_{j=0}^{n}{}'|h^{+}(t_j,t_k)|^2\right\}^{\frac{1}{2}}\leqslant\max_{-1\leqslant\tau\leqslant1}|h^{+}(t,\tau)|=q<1,\quad n\in\mathbb{N}.$$

Отсюда следует оценка $\|\overline{K}\overline{x}\|_{\mathbb{R}^{n+1}}\geqslant(1-q)\|\overline{x}\|_{\mathbb{R}^{n+1}}$, $\overline{x}\in\mathbb{R}^{n+1}$, обеспечивающая (напр., [2], гл. 1) существование двустороннего обратного оператора $\overline{K}^{-1}$ и справедливость неравенств

$$\|\overline{K}^{-1}\|\leqslant(1-q)^{-1}<\infty,\quad\overline{K}^{-1}:\mathbb{R}^{n+1}\longrightarrow\mathbb{R}^{n+1},\quad n\in\mathbb{N}.\tag{3.24}$$

Из соотношений (3.23) и (3.24) следует (2.6), тем самым второе утверждение теоремы доказано.

Из формул (1.1)–(1.3) при $x=x^*(t)$, $t=t_j$, $j=\overline{0,n}$, находим тождества

$$x^*(t_j)-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}{}' h(t_j,t_k)x^*(t_k)=y(t_j)+r_n(t_j),\quad j=\overline{0,n},\tag{3.25}$$

где $r_n(t)=R_n^{\tau}[h(t,\tau)x^*(\tau)]$. Аналогично, при $\alpha_k=\alpha_k^*$, $k=\overline{0,n}$, из (1.6) получаем тождества

$$\alpha_j^*-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}{}' h(t_j,t_k)\alpha_k^*=y(t_j),\quad j=\overline{0,n}.\tag{3.26}$$

Вычитая из (3.25) почленно (3.26), находим СЛАУ

$$\varepsilon_j-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}{}' h(t_j,t_k)\varepsilon_k=r_n(t_j),\quad j=\overline{0,n},\tag{3.27}$$

относительно $\varepsilon_k=x^*(t_k)-\alpha_k^*$, $k=\overline{0,n}$. Система (3.27) эквивалентна операторному уравнению

$$\overline{K}\overline{\varepsilon}\equiv\overline{\varepsilon}-\overline{H}\overline{\varepsilon}=\overline{r}\quad(\overline{\varepsilon},\overline{r}\in\mathbb{R}^{n+1}),\tag{3.28}$$

где $\overline{\varepsilon} = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$, $\overline{r} = (r_n(t_0), r_n(t_1), \ldots, r_n(t_n))$. Из (3.24) и (3.28) при любых $n \in \mathbb{N}$ получаем оценки

$$\|\overline{\varepsilon}\|_{\mathbb{R}^{n+1}} = \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n}{}' |\varepsilon_k|^2 \right\}^{1/2} = \|\overline{K}^{-1}\overline{r}\|_{\mathbb{R}^{n+1}} \leqslant (1-q)^{-1}\|\overline{r}\|_{\mathbb{R}^{n+1}} =$$

$$= \frac{1}{1-q} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n}{}' |r_n(t_j)|^2 \right\}^{1/2} \leqslant (1-q)^{-1} \max_{0 \leqslant j \leqslant n} |r_n(t_j)|, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.29)$$

Поскольку в силу (1.1)–(1.3) и (1.5)

$$x^*(t) \equiv y(t) + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n}{}' h(t, t_k) x^*(t_k) + r_n(t),$$

$$\widetilde{x}_n^*(t) \equiv y(t) + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n}{}' h(t, t_k) \alpha_k^*, \quad t \in [-1, 1], \quad n \in \mathbb{N},$$

то для любых $n \in \mathbb{N}$ с помощью (3.29) находим

$$\|x^*(t) - \widetilde{x}_n^*(t)\|_C \leqslant \left\| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n}{}' h(t, t_k) \varepsilon_k \right\|_C + \|r_n(t)\|_C \leqslant$$

$$\leqslant \|h\|_C \|\overline{\varepsilon}\|_{\mathbb{R}^{n+1}} + \|r_n(t)\|_C \leqslant \{1 + (1-q)^{-1}\|h\|_C\} \|r_n(t)\|_C. \quad (3.30)$$

Из (3.30) с учетом установленных в [5] свойств квадратурной формулы (1.2)–(1.3) следует оценка (2.7). При этом из тождеств

$$x^*(t) \equiv y(t) + (Hhx^*)(t), \quad -1 \leqslant t \leqslant 1,$$

$$hx^* \equiv h(t, \tau) x^*(\tau) \equiv h(t, \tau) y(\tau) + \frac{h(t, \tau)}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{h(\tau, \xi) x^*(\xi)}{\sqrt{1 - \xi^2}} d\xi, \quad -1 \leqslant t, \tau \leqslant 1,$$

находим

$$E_{2n-1}^{\tau}(hx^*) \leqslant E_{2n-1}^{\tau}(h(t, \tau) y(\tau)) + E_{2n-1}^{\tau}(h(t, \tau) h(\tau, \xi)) \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{|x^*(\xi)|}{\sqrt{1 - \xi^2}} d\xi,$$

где в силу неравенства Буняковского и оценки (3.21) имеем

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{|x^*(\xi)|}{\sqrt{1 - \xi^2}} d\xi \leqslant \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{|x^*(\xi)|^2 d\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \right\}^{1/2} = \|x^*\|_{L_2(\rho)} \leqslant \|K^{-1}\|_{L_2(\rho)} \|y\|_{L_2(\rho)} \leqslant (1-q)^{-1} \|y\|_C.$$

Из последних неравенств следует оценка (2.8), а из нее и из (2.7) с учетом первой теоремы Джексона [6] получаем третье утверждение теоремы. □

Из соотношений (2.2), (2.7), (2.8) и второй теоремы Джексона [6] следует оценка (2.9).

Доказательство теоремы 3. Первое утверждение теоремы с оценками (2.10) и (2.11) следует из утверждений а) и б) теоремы 2.

В силу соотношений (1.2)–(1.3), (1.4*), (1.5) и (3.3)–(3.5) находим

$$P_n \widetilde{x}_n^*(t) = P_n y(t) + P_n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n}{}' h(t, t_k) \alpha_k^* = P_n y + P_n H P_n^{\tau}(hx_n^*) \equiv x_n^*(t),$$

где $x_n^*(t)$ — решение уравнения (3.5). Поэтому в пространстве C имеем

$$\|x^*(t) - x_n^*(t)\| \leqslant \|x^* - P_n x^*\| + \|P_n x^* - P_n \widetilde{x}_n^*\| \leqslant 2\|P_n\| E_n(x^*) + \|P_n\| \|x^* - \widetilde{x}_n^*\|, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.31)$$

Из (3.31) и (2.7) находим

$$\|x^* - x_n^*\| \leqslant 2\|P_n\|\{E_n(x^*) + (1 + \|h\|_C)E_{2n-1}^\tau(hx^*)\}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3.32}$$

где $E_{2n-1}^\tau(hx^*)$ оценено в (2.8), а в силу (1.1) и (3.21) (при $q = 0$) имеем

$$E_n(x^*) = E_n(y + Hhx^*) \leqslant E_n(y) + E_n(Hhx^*) \leqslant E_n(y) + E_n^t(h)\|H|x^*|\,\| \leqslant$$
$$\leqslant E_n(y) + E_n^t(h)\|x^*\|_{L_2(\rho)} \leqslant E_n(y) + E_n^t(h)\|y\|_{L_2(\rho)} \leqslant E_n(y) + E_n^t(h)\|y\|_C. \tag{3.33}$$

Из соотношений (3.32), (3.33), (3.6)–(3.7) и (2.12) следуют оценки (2.13) и (2.14). □

4. Некоторые замечания

4.1. Все участвующие в теоремах 2 и 3 постоянные могут быть вычислены в явном виде. Поэтому предложенные в них оценки погрешности метода механических квадратур можно считать практически эффективными. Такое утверждение по отношению к теореме 1 и ее следствию можно считать справедливым лишь при наличии значения нормы $\|K^{-1}\|_C$ или хотя бы ее приемлемой оценки сверху (см. неравенства (3.2)). Такие оценки установлены, например, в теоремах 2 и 3; кроме того, постоянная c_4 может быть эффективно вычислена, если $h(t,\tau) = 0$ при $-1 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant 1$ или же при $-1 \leqslant t \leqslant \tau \leqslant 1$; в этом случае теорема 1 и ее следствие значительно упрощаются и несколько усиливаются. Однако следует отметить, что даже в этом случае оценка (2.3) не может быть улучшена в смысле порядка, что следует из аппроксимативных свойств интерполяционного полинома (3.3)–(3.4), которые, в свою очередь, существенным образом опираются на оценки (3.6)–(3.7).

4.2. Теорема 1 может быть несколько усилена, если использовать доказанное в ([10], с. 53–55) неравенство

$$\|P_n\|_{C \to L_2(\rho)} \leq \sqrt{\pi}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тогда, заменяя пространство C на пространство $L_2(\rho)$ и следуя работе [9], в теореме 1 можно освободиться от условия a); другими словами, в менее сильной норме можно получить более сильное, чем в формулировке теоремы 1, утверждение о вычислительной схеме (1.1)–(1.6).

4.3. Теоремы 2 и 3 справедливы также в случае комплекснозначных функций $h(t,\tau)$ и $y(t)$, если в пространстве комплекснозначных функций $L_2(\rho)$ скалярное произведение определить по формуле

$$(f,g) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{f(t)\overline{g(t)}}{\sqrt{1-t^2}}dt \quad (f, g \in L_2(\rho));$$

в этом случае величину q в теореме 2 следует заменить на

$$q = \max_{-1 \leqslant t,\tau \leqslant 1} |h^+(t,\tau)| = \max_{-1 \leqslant t,\tau \leqslant 1} \frac{|h(t,\tau) + \overline{h(\tau,t)}|}{2} < 1,$$

где $\overline{g(t)}$ и $\overline{h(\tau,t)}$ — соответствующие комплексно-сопряженные функции; кроме того, здесь в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ скалярное произведение вводится по формуле

$$(\widetilde{f}, \widetilde{g}) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}{}' f_k \overline{g}_k \quad (f, g \in \mathbb{R}^{n+1}),$$

где $\widetilde{f} = (f_0, f_1, \ldots, f_n)$ и $\widetilde{g} = (g_0, g_1, \ldots, g_n)$, а $\overline{g}_k$ — соответствующие комплексно-сопряженные величины.

Литература

1. Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ в нормированных пространствах.* – М.: Физматгиз, 1959. – 684 с.
2. Габдулхаев Б.Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1980. – 232 с.
3. Канторович Л.В., Крылов В.И. *Приближенные методы высшего анализа.* – М.: Физматгиз, 1962. – 708 с.
4. Габдулхаев Б.Г. *Численный анализ сингулярных интегральных уравнений. Избранные главы.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1995. – 230 с.
5. Ермолаева Л.Б. *Об одной квадратурной формуле* // Изв. вузов. Математика. – 2000. – № 3. – С. 25–28.
6. Корнейчук Н.П. *Точные константы в теории приближения.* – М.: Наука, 1987. – 424 с.
7. Турецкий А.Х. *Теория интерполирования в задачах.* Ч. 1. – Минск: Изд-во Вышэйш. школа, 1968. – 328 с.
8. Ehlich H., Zeller K. *Auswertung der Normen von Interpolationsoperatoren* // Math. Ann. – 1966. – № 164. – S. 105–112.
9. Габдулхаев Б.Г. *К численному решению интегральных уравнений методом механических квадратур* // Изв. вузов. Математика. – 1972. – № 12. – С. 21–39.
10. Ермолаева Л.Б. *Аппроксимативные свойства полиномиальных операторов и решение интегральных и интегро-дифференциальных уравнений методом подобластей*: Дис. … канд. физ.-матем. наук. – Казань, 1987. – 154 с.

Казанский государственный архитектурно-строительный университет

Поступила 12.03.2004