МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ИМ. Н. И. ЛОБАЧЕВСКОГО

КАФЕДРА АЭРОГИДРОМЕХАНИКИ

Специальность (направление): 010800.68 – Механика и математическое моделирование
Специализация: механика жидкости, газа и плазмы

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(дипломная работа)

ДВИЖЕНИЕ НЕСИММЕТРИЧНОГО ТЕЛА С ПОДВИЖНОЙ ВНУТРЕННЕЙ МАССОЙ В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Работа завершена:

"___" _____ 201_ г. _____ (Н.Б. Дараби)

Работа допущена к защите:

Научный руководитель
д.ф.-м.н. аэрогидромеханики
"___" _____ 201_ г. _____ (А.Г. Егоров)

Научный консультант
к.ф.-м.н. асс. аэрогидромеханики
"___" _____ 201_ г. _____ (А.Н. Нуриев)

Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н. аэрогидромеханики
"___" _____ 201_ г. _____ (А.Г. Егоров)

Казань – 2014

Содержание

Введение 1

Глава 1

Численный эксперимент движения виброробота в вязкой жидкости 11

1.1. Введение 12

1.2. Постановка задачи 14

1.3.Численная схема 19

1.3.1. Дискретизация области решения 19

1.3.2. Граничные условия 22

1.3.3. Дискретизации системы уравнений движения 23

1.3.4. Дискретизация граничных условий 27

1.4. Итерационная схема 28

Глава 2

Результаты 30

2.1. Результаты расчетов 31

2.2. Картины течения 33

2.2. Заключение 39

Литература 41

Введение

Обтекание вокруг тела было привлекательной темой исследований за последние 100 лет, в силу его применения с технической значимости.

Электрическое охлаждение, авиационно-космическое проектирование, высотные здания, давно натянутых мостов, океанские структуры, системы теплообменников, строительное проектирование, акустическая эмиссия примеры из этого ряда – это лишь некоторые из областей, в которых задача имеет практическое приложение. С другой стороны интересуется изучением структурных особенностей течения, анализом интегральных характеристик (например гидродинамических сил, действующих на цилиндр), исследований вопросов устойчивости, сложных физических механизмов вихреобразования, поскольку периодические силы действующие на тело и образование вихрей могут вызывать структурные вибрации и усталостное разрушение конструкций среди других проблем. Поэтому разрушение образования вихрей или уменьшение силы приобрели большое внимание.

Существует еще один важный характер, который привлекает исследователей к рассмотрению этой задачи – это присутствие обширной базы экспериментальных результатов.

В последнее время уделялось внимание к этой задаче с точки зрения обеих экспериментальных и численных исследований в результате возрастающей вычислительной мощности и появления новых экспериментальных методов.

Для изучения течения вокруг цилиндра используется безразмерные управляющие параметры, включая число Келигана-Карпентера KC [38], число Рейнольдса Re и также число Стокса β [39].

В таблице 1 определяется упомянувшие безразмерные параметры:

Таблица 1: Определение безразмерных параметров

Название	символ	определение	формула
Кейлиган-Карпентер	KC	Отношение амплитуды колебаний к характерному размеру цилиндра	$KC = \frac{U_{max}\,T}{L}$
Рейнольдс	Re	Отношение характерного размера цилиндра к кинематической вязкости	$Re = \frac{U_{max}\,L}{\nu}$
Стокс	β	Квадрат отношения характерного размера цилиндра к толщине нестационарного пограничного слоя	$\beta = \frac{L^2}{\upsilon T}$

Слагаемые употребленные в высших формулах определяются таким образом (таблица 2) :

Таблица 2: Величины употребленные в определении безразмерных параметров

символ	определение
U_{max}	амплитуда скорости колебаний
T	период колебаний
L	характерный размер цилиндра
ν	кинематическая вязкость жидкости

Легко понятно, что число Стокса β объединяет два числа Келигана-Карпентера и Рейнольдса таким соотношением:

$$\beta = \frac{Re}{KC} \qquad (1)$$

Впервые Стокс [1] в 1851 году аналитически исследовал характеристики течения вязкой жидкости вокруг осциллирующего цилиндра. Он показал, что гидродинамическая сила, которая действует на цилиндр зависит от двух управляющих параметров задачи и также он получил формулу для вычисления силы сопротивления F когда β бесконечно большая. Формула Стокса с применением приближения $\cos t\,|\cos t\,| \approx {}^{8}/_{3}\pi\,\cos t$, в следующем виде представляется:

$$F = \pi\rho R^2 C_m \frac{du_\infty}{dt} + \rho R C_d |u_\infty| u_\infty,$$

$$C_m = 2 + 4(\beta\pi)^{-\frac{1}{2}} + O(\beta\pi)^{-\frac{3}{2}}, \qquad (2)$$

$$C_d = -\frac{3\pi^3}{2KC}\left((\beta\pi)^{-\frac{1}{2}} + (\beta\pi)^{-1} + (\beta\pi)^{-\frac{3}{2}}\right).$$

Здесь C_m- коэффициент инерциальной и C_d- коэффициент вязкой составляющих.

Шлихтинг [2] был следующим исследователем, который аналитически рассмотрел эту задачу. Он использовал асимптотический анализ, основанный на разложении по малому параметру KC.

Следует напомнить, что KC определяется как отношение амплитуды колебаний к характерному размеру цилиндра L. Решение состоится из двух частей – внутреннее разложение которое отвечает за стоксовский режим когда пограничный слой, нестационарный и другая часть - внешнее разложение.

Ванг [3] расширил метод внешнего и внутреннего разложений на основе метода Шлихтинга и добавил новые слагаемые в упомянутые коэффициенты сил. Новые формулы так выглядят:

$$C_m = 2 + 4(\beta\pi)^{-\frac{1}{2}} + (\beta\pi)^{-\frac{3}{2}},$$
$$C_d = -\frac{3\pi^3}{2KC}\left((\beta\pi)^{-\frac{1}{2}} + (\beta\pi)^{-1} - \frac{1}{4}(\beta\pi)^{-\frac{3}{2}}\right). \quad (3)$$

Надо сказать, что эти формулы для случая $\beta \gg 1, KC \ll 1, KC.Re \ll 1$. Стюарт [4] и Райл [5] проводили также аналитический анализ для $\beta \gg 1, KC.Re \geq 1$. Они показали, что в этом случае, течение усложняется. Кроме стоксовского нестационарного пограничного слоя, появляется второй стационарной пограничной слой во внешнем вторичном стационарном течении. Уравнения Навье-Стокса описывают внешнее стационарное вторичное течение. Здесь главный безразмерный параметр считается стационарным числом Рейнольдса Re_s(4).

$$Re_s = \frac{KC^2\beta}{2\pi}. \quad (4)$$

Ряд экспериментальных работ посвящен рассматриванию вторичных стационарных течений, возникающих вокруг осциллирующего цилиндра.

Впервые Андрадом [6] проводилось исследование вторичных течений при гармонических колебаниях цилиндра в воздухе. Многие другие исследователи также занимались этой работой, включая: Бертелсен [7], Хольтсмарк [8], Шлихтинг [9], Татсуно [10]. Большинство этих работ, как и аналитические, рассмотрели симметричные стационарные течения.

Можно перечислить работу Хони [11] в качестве одного из первых экспериментальных наблюдений трехмерных свойств течения. В случае больших β и малых KC Холл [12] численно-аналитическим путем исследовал трехмерное неустойчивое течение и в качестве результата

получил зависимость критического числа Келигана-Карпентера KC_h от параметра Стокса β.

$$KC_h = 5.778\,\beta^{-1/4}\left(1 + 0.205\beta^{-1/4} + \ \dots\right), \qquad (5)$$

Эта зависимость в широком диапазоне β хорошо совпала с экспериментальными наблюдениями Хони.

Следующий исследователь, который расширил попытку Холла был Сарпкой [13]. Он продолжал работу прошлых исследователей для больших чисел Стокса. Он использовал метод лазерно-флуоресцентной визуализации, чтобы выделить зону формирования квазикогрентных структур, которые образуют когерентные структуры обнаруженные Хонни в окрестности линии Холла, определяемой уравнением (5). Сарпкой анализировал гидродинамические силы действующие на цилиндр и искал причину не совпадения экспериментальных наблюдений и аналитических оценок Ванга-Стокса, когда β предполагается большое число. Он пришел к этому выводу, что это отклонение было связано со сменой режима течения, то есть с перехода от безотрывного обтекания к режимам с отрывом вихрей. Другие исследователи включая: Вильямсон [14], Татсуно и Бирман [15] экспериментально рассмотрели структуру плоских и трехмерных периодических режимов течения вокруг осциллирующего цилиндра и зон их устойчивости. Вильямсон исследовал течение при постоянном числе Стокса $\beta = 255$ и когда КС находится в диапазоне $2 \leq KC \leq 60$. Он выделил 6 типов периодического течения. В работах Татусно и Бирмана для диапазона числа Стокса $0 \leq \beta \leq 196$ такая же классификация режимов проведена.

Болшинство данных собрано посредством чисcленных исследований. В этой области многие исследователи работали и впервые начали из простейшего случая, то есть рассматривали двухмерную модель течения.

Большинство их работ сосредоточенно на изучении периодических режимов течения и аэрогидродинамических сил связанных с ними при условиях гармонических колебаниий цилиндра с малыми амплитудами и с учетом числа Стокса в малом и умеренном пределе.

Следующий этап развитя в этом разделе заключается в исследовании трехмерных структур которые возникают вокруг осциллирующего цилиндра. Можно перечислить Нехари [16] в качестве одного из первых исследователей который рассмотрел влияние трехмерности на гидродинамические составляющие силы. Он в своих работах предполагал β $и$ KC как малые числа и выполнил несколько двухмерных и трехмерных расчетов. Интересно, что между результатами двухмерных и трехмерных расчетов, при условиях одинаковых значений упомянутых параметров, значительные различия были наблюденны лишь для вертикальной составляющей силы. Для диапазона средних и больших числа Стокса до сего момента не сделано аналогичное исследование влияния трехмерности.

Элстоном [17] были получены результаты по численному исследованию устойчивости периодических решений задачи в рамках анализа Флоке для области малых чисел Стокса. Как нам известно, численное решение для течения вокруг осциллирующего цилиндра с помощью моделей турбулентности при условиях больших KC $(2 \leq KC \leq 40)$ и $\beta = 196$ уже сделанное. Именно таким авторам удалось исследовать вторичные стационарные течения, которые возникают около цилиндра, когда амплитуды колебания большие. Результаты полученные этим авторам, качественно совпали с экспериментальными наблюдениями Вильямсона.

В отличие от исследований в которых рассматривается обтекание вокруг круглых и прямоугольных цилиндров, существуют ограниченные

исследования сосредоточенны на треугольных цилиндрах которые подвергаются одномерному потоку. Даштиманеш и др. [18] рассмотрели течение вокруг треугольного цилиндра при разных числах Рейнольдса в пределе ($Re \leq 38.03$) и по их результатам, поток симметричен вокруг цилиндра без каких-либо точек отрыва для вершины навстречу потоку и с увеличением числа Рейнольдса до критического значения, поток по-прежнему симметричен, но вихри формируются и симметричная область течения уменьшается и переходит в асимметричную область. Де и Далал [19] представили доклод о двухмерном потоке на равностороннем треугольном цилиндре с разными числами Рейнольдса (10≤Re≤250) путем численного метода. Они рассмотрели влияние числа Рейнольдса на топологию потока когда уголь падения α=60.0°. Бао и др. [20] сделали численный метод для обтекания вокруг равностороннего треугольного цилиндра с различными углами падения при двух разных чисел Рейнольдса (Re=100 и 150). Численное моделирование двухмерного обтекания вокруг треугольного цилиндра который подвергается вертикальному колебательному течению в канале было проведено Алавадхи [21]. Алонсо и др. [22] исследовали поперечный галоп цилиндров с шестью различными треугольных поперечных сечений и в виде результата представили, что угол падения сильно влияет на появление гистерезиса. Сригграром и Кох [23] и Ванг и др. [24] представили само возбужденное вращательное колебание на изолированных и тандемных треугольных цилиндрах, соответственно.

Насколько нам известно, общее исследование о влиянии числа Рейнольдса и угла падения на характеристики потока и вызванные потоком силы на стационарном треугольном цилиндре, и также последствие колебательной амплитуды и частоты на обтекании треугольной цилиндра не сделаны до сих пор.

Вибрационный принцип движения мобильных устройств был обоснован в работах академика Ф.Л. Черноусько и его учеников. Как указано ими, этот принцип представляется целесообразным для мобильных мини- и микророботов. Корпус роботов может быть сделан герметичным и гладким, не содержащим выступающих деталей, что позволяет использовать их для неразрушающей инспекции миниатюрных технических объектов, таких как тонкостенные трубопроводы малого диаметра, а также в медицине. Проблемы (оптимизации режимов) управления системами данного типа вызывают интерес как у исследователей в области оптимального управления, так и у специалистов в области прикладной механики и робототехники.

Изучением вибрационных мобильных устройств (вибророботов) в течение последних двух десятилетий занимаются отечественные и зарубежные ученые Ф.Л.Черноусько, Н.Н.Болотник, Т.Ю.Фигурина, И.М.Зейдис, С. Ф. Яцун, K.Zimmermann, E. Papadopoulos, A. Fidlin, K. Furuta, H. Li, J. J. Thomsen и многие другие. Технически такие механизмы реализуются в России (ИПМех РАН, Курский государственный технический университет), Германии в Техническом университете г. Ильменау, в Японии и других странах.

Основная часть проведенных исследований касалась прямолинейного движения вибрационных механизмов по шероховатой плоскости при наличии кулоновского трения. В последнее время проблема оптимального управления движением вибророботов широко обсуждается в литературе применительно к другим законам сопротивления и, в частности, гидродинамическому сопротивлению. В этой связи особо можно выделить следующие работы (Ф.Л. Черноусько, ПММ, 2008; Н.Н Болотник и др. ПММ, 2012). В [25] решалась задача оптимизации движения робота для степенного закона сопротивления. Весьма общая ситуация

рассматривалась в [26], где от силы сопротивления требовалось всего лишь являться монотонно возрастающей функцией скорости движения корпуса. В работе [27] проводилась оптимизация для произвольных, в том числе, немонотонных, зависимостей сил сопротивления от скорости.

Однако, все эти исследования проводились в рамках аналитических моделей, опирающихся на условия квазистационарности, когда сила сопротивления однозначно определяется скоростью движения корпуса. В действительности гидродинамические силы сопротивления движению корпуса в вязкой жидкости определяются течениями, которые были сформированы телом в жидкости за все время движения. В общем случае они не могут быть описаны исключительно в терминах мгновенной скорости и должны определяться всей предысторией движения.

Последовательное изучение движения виброробота в вязкой жидкости требует отказа от упрощающего предположения о квазистационарности закона сопротивления. Это требует совместного решения механической и существенно нестационарной гидродинамической задач.

Экспериментальные (лабораторные) исследования или прямое численное моделирование движения виброробота в вязкой жидкости на сколько нам известно ранее не проводились. Однако, следует отметить, что изучаемый процесс тесно связан с двумя классическими задачами гидромеханики: об осциллирующем движении тела в покоящейся жидкости и об осциллирующем движение тела в набегающем потоке. Первая задача описывает старт виброробота из неподвижного состояния: если средняя сила за период движения корпуса равна нулю, то виброробот будет колебаться около неподвижной точки. Вторая задача – установившееся движение виброробота: если средняя за период сила, действующая на корпус виброробота, при фиксированной скорости набегающего потока

равна нулю, то виброробот не замедляется и не ускоряется. Численное моделирование и экспериментальные исследования этих задач проводились в основном для случая гармонических колебаний тела в жидкости. Особо выделим работы Татсуно. В [28] рассматривалось моделирование течения около осциллирующего цилиндра в вязкой жидкости в пакете OpenFOAM. Основные элементы представленной численной модели используются настоящей работе.

Глава 1

Численный эксперимент движения виброробота в вязкой жидкости

1.1. Введение

Поток жидкости через горизонтальные каналы является одним из классических задач в области механики жидкости. Существует много случаев, в которых некоторые препятствия на пути потоков жидкостей. Когда разрывающийся поток очень большой, можно классифицировать препятствие как обтекаемое тело. Огромное количество работ было опубликовано на изучении обтекания цилиндров, потому что цилиндры, как структуры, обычно, используются в реальной жизни, и они могут быть найдены как в отдельном и в группах. Большинство исследований в этой сфере связано с круговых цилиндров. Основы обтекания круговых цилиндров впервые были зарегистрированы в стандартной ссылке Здравковича [29], где был рассмотрен диапазон чисел Рейнольдса для различных режимов обтекания гладкого круглого цилиндра в устойчивый поток. Приложения и интерпретации данных о обтекании круговых цилиндров либо экспериментальных данных, теоретических моделях, либо компьютерном моделировании были полно обследованы Здравковичом.

Реджани и др. [30] исследовали формы вихревого следа за круговым цилиндром и для обеих двух и трехмерного потока.

Одна обширная численная работа для начала вихрей для потока вокруг тела с различными формами была исследована Джаксоном [31]. Кроме того, Ареф и др. [32] рассмотрели бифуркации образца линии тока для тела обтекаемого, где образуется вихревой след.

Аббаси и др. [33] рассмотрели двухмерную вынужденную конвекцию воздуха на треугольной призмы в горизонтальном канале и нашли точку перехода на Рейнольдса 45 для тела с коэффициентом блокирования 0.25. Зелинска и Весферид [34] численно исследовали вихревого потока за препятствием в виде равностороннего

треугольника когда коэффициент блокирования постоянный и равен $1/15$, и число Рейнольдса находится в диапазоне $34 \leq Re \leq 50$.Они нашли критическое число Рейнольдса равно 38.3 для такого коэффициента блокирования. Де и Далал нашли критическое число Рейнольдса 39.9 для равностороннего треугольника цилиндра когда $\beta = 1/15$. На основании полученных результатов, они пришли к выводу, что поток неограниченный и более склонен к нестабильности следа. В далее Сриканц и др. [35] изучали поток жидкости и теплообмен вдоль равностороннего треугольного цилиндра. Основные уравнения были решены посредством коммерческого решателя CFD Fluent (6.3). Чатердже и Мондал [36] исследовали диапазон числа Рейнольдса от 50 до 250 с тремя различными значениями числа Прандтля.

Хотя многие доклады опубликованы об обтекании вокруг разных цилиндров, но отсутствие широкой фокусировки о треугольных цилиндрах по сравненю с круговыми или квадратными цилиндрами совершенно, очевидно. Таким образом, чтобы заполнить пустоту, упомянутую выше, в данной работе, проводится прямое численное моделирование движения виброробота клиновидной формы в вязкой жидкости при простейших гармонических осцилляциях внутренней массы. Задача рассматривается в плоской постановке.

Гармонический закон движения очевидно не является оптимальным с точки зрения эффективности движения, однако несимметричная форма корпуса должна обеспечивать различную реакцию внешней среды на разных фазах движения корпуса (в прямом и обратном направлении) робота, обеспечивая его направленное движение в жидкости. Целью работы является исследования взаимодействия виброробота с вязкой средой, изучение законов движения корпуса робота при гармонических осцилляциях внутренней массы, изучение

структуры течения вокруг виброробота и ее влияния на гидродинамическую силу, действующую на робот.

Численное моделирование задачи об обтекании цилиндра вязкой жидкостью, проводится в пакете Open FOAM (Open Source Field Operation And Manipulation) – открытой платформе для численного моделирования. Далее будем перечислять основные этапи процесса разработки модели в этом пакете:

1. Создание геометрии и дискретизация области решения
2. Выбор методов дискретизации управляющей системы
3. Задание граничных условий
4. Выбор численных методов решения
5. Задание управляющих параметров задачи

1.2. Постановка задачи

Рассматривается система, состоящая из двух твердых тел. Основное тело (тело M – корпус) массы M находится в вязкой несжимаемой жидкости, а тело массы m (далее – “внутренняя масса”) перемещается внутри него. Треугольное препятствие находится в середине рассматриваемой зоны. Значения этой зоны, выбраны так, чтобы уменьшить эффекты границы и удовлетворить состоянием свободного потока, и соответствуют с другими исследованиями в литературе. Отношение вертикальной линии препятствия к высоте канала обозначается символом f. Чтобы изучить влияние границ вблизи препятствия на характеристики потока, f=0.033 было сообщено хорошее соотношение из литературы.

Внутреннее тело взаимодействует с основным телом посредством силы создаваемой приводом. Сила приложенная к внутреннему телу, вызывает реакционную силу приложенную к основному телу. Реакционная сила изменяет скорость основного тела относительно окружающей средой, следовательно возникает изменение силы

сопротивления окружающей среды напротив движения основного тела. Таким образом, с помощью регулирования перемещения внутреннего тела по отношению к основному телу можно изменить внешнюю силу действующую на главном теле, чтобы контролировать движение целой системы.

Как уже в введении перечислено, такой принцип движения может применяться для некоторых видов роботов с маленькими размерами. Основные тела этих роботов могут быть сделаны герметичными и гладкими без выступающих частей. Это позволяет таким роботам использоваться для неразрушающей инспекции технических объектов малого размера, например, тонкостенные трубы с маленькими диаметрами, а также в медицине.

Изучаются продольные периодические движения внутренней массы относительно тела М, при которых вся система перемещается как целое. Обозначим через u_M скорость корпуса, а через s и $v = \dot{s}$ – перемещение и скорость внутренней массы относительно корпуса (Рис. 1.1).

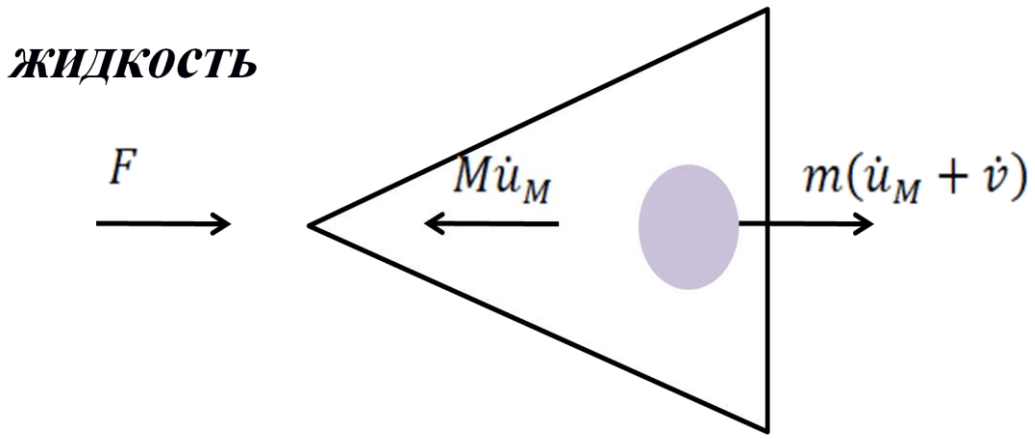


Рисунок 1. 1: Схема движения

Уравнения движения внутренней массы и корпуса в неподвижной системе координат имеют вид:

$$m(\dot{u}_M + \dot{v}) = -G, \quad (6)$$

$$M\dot{u}_M = G + F \quad (7)$$

Здесь F– силы действующие на тело со стороны жидкости, G – сила взаимодействия внутренней массы и тела. Исключая из уравнений (5) и (6) силу G, нормируя скорость на U_0– амплитуду скорости колебания внутренней массы, время на ${RU_0}^{-1}$, где R– характерный размер тела, (силу F на $\rho_f {RU_0}^2$) получим основное уравнение движения двухмассовой системы в следующем виде:

$$\dot{u}_M = -\mu_2 \dot{v} + \mu_1 \frac{R^2}{S} F \quad (8)$$

Здесь μ_2– отношение подвижной массы к полной массе виброробота ($\mu_2 = \frac{m}{M+m}$), μ_1– отношение массы вязкой жидкости, занимающей тот-же объем, что и виброробот, к массе виброробота ($\mu_1 = \frac{M_f}{M+m}$), S – площадь поперечного сечения корпуса (рис. 1.1). Для определения силы F рассмотрим движение среды, в которую помещен виброробот.

Движение жидкости вокруг виброробота описывается системой уравнений Навье-Стокса. Нормируя пространственные координаты, время и скорость на R, ${RU_0}^{-1}$, U_0 соответственно, запишем управляющую систему уравнений в декартовой системе координат как

$$\partial U/_{\partial t} + U.\nabla U = -\nabla p + {}^2/_{Re}\,\Delta U, \quad (9)$$

$$\nabla.U = 0. \quad (10)$$

где $U = (u, v)$ –безразмерная скорость, $p -$ безразмерное давление, $Re -$ число Рейнольдса. Для численного решения данной задачи удобно перейти в подвижную систему координат связанную с

вибророботом. Для сохранения системы движения жидкости в форме в новой неинерциальной системе координат определим давление как:

$$p = \tilde{p} + x\dot{\omega}. \qquad (11)$$

Здесь первое слагаемое $\tilde{p}$ – давление в неподвижной системе координат, а второе – вклад от инерциальных составляющих. $\dot{\omega}$ – ускорение подвижной системы координат и x – безразмерный координат.

На границе виброробота в новой системе координат задаются условия прилипания:

$$u|_c = v|_c = 0. \qquad (12)$$

Для определения условий на бесконечности, в этом случае, выпишем ускорение подвижной системы координат. Для этого перейдем в подвижную систему координат связанную с корпусом робота. Поскольку ускорение в неподвижной системе равно ускорению в подвижной системе координат плюс ускорению системы координат $\dot{u}_M = \dot{\omega} + \dot{u}|_c$ и $\dot{u}|_c = 0$, то

$$\dot{\omega} = -\mu_2\dot{v} + \mu_1\frac{R^2}{S}F \qquad (13)$$

На бесконечности, в силу того, что течение является потециалным, граничные условия определяются следующим образом:

$$\dot{u}|_\infty + \dot{\omega} = 0,\ \dot{u}|_\infty = -\dot{\omega} \qquad (14)$$

$$\dot{u}|_\infty = \mu_2\dot{v} - \mu_1\frac{R^2}{S}F \qquad (15)$$

В предположение о потенциальном течении жидкости на бесконечности, можно получить также условие для давления:

$$\frac{\partial p}{\partial x}|_{\infty} = -\dot{u}|_{\infty} = -\mu_2\dot{v} + \mu_1\frac{R^2}{S}F \qquad (16)$$

Вычисление сил действующих на виброробот со стороны вязкой жидкости в безразмерной постановке проводится по формуле:

$$F_p = \int_S pnds - \int_S \bar{\sigma}.nds, \qquad (17)$$

где $\bar{\sigma} -$ вязкий тензор напряжений, $S -$ поверхность виброробота, $n -$ внешняя нормаль к поверхности виброробота.

Полученный таким образом вектор силы F_p можно разложить на вертикальную составляющую F_y – подъемную силу, и горизонтальную F_x, стоящую и из силы вязкого сопротивления и инерциальных сил. Инерциальные составляющие возникают вследствие ускорения жидкости и состоят из двух частей: силы инерции присоединенных масс, возникающей из-за локального ускорения вблизи цилиндра и силы Фруда-Крылова, которая связанна с градиентом давления, созданным в жидкости для моделирования осциллирующего потока. Величину силы Фруда-Крылова для рассматриваемого случая можно вычислить по формуле:

$$F_{fk} = \int_S x\dot{\omega}\, nds, \qquad (18)$$

С учетом (18), сила F, действующая на виброробот в подвижной системе координат вычисляется как

$$F = F_x - F_{fk} \qquad (19)$$

Отсюда условие на бесконечности (16) может быть переписано в виде:

$$\frac{\partial p}{\partial x}|_{\infty} = -\dot{u}|_{\infty} = -\mu_2\dot{v} + \mu_1\frac{R^2}{S}(F_x - F_{fk}) \qquad (20)$$

Система уравнений (9), (10), (19), (20) полностью описывает движение виброробота произвольной формы в вязкой жидкости (и движение жидкости вокруг виброробота) при заданном законе движения внутренней массы. Далее мы будем рассматривать движение виброробота клиновидной формы (цилиндра с треугольным равносторонним сечением) в жидкости при гармонических осцилляциях внутренней массы:

$$\dot{v} = \sin(2\pi f t) \tag{21}$$

где f — безразмерная частота колебания.

1.3.Численная схема

1.3.1. Дискретизация области решения

Решение этой задачи рассматривается в ограниченной области, которая является прямоугольным параллелепипедом в центре которого помещен треугольный цилиндр (Рис. 1.2). В этой задачи граничные условия разделяются на 7 часть: входная граница Γ_{in} и выходная граница Γ_{out}, нижняя граница Γ_{bottom} и верхняя граница Γ_{top}, передняя граница Γ_{front} и задняя граница Γ_{back}, граница цилиндра Γ_{cyl}. Выбор трехмерной области для моделирования плоского течения проводится в соответствии с особенностью программного обеспечения. В данной задаче, ребра параллелепипеда параллельны основным осям используемой декартовой системы координат, а ось цилиндра перпендикулярна плоскости xOy.

Один из процессов решения включается в дискретизации расчетной области. Здесь используются блочные структурировнные сетки, построенные с помощью приложения blockMesh, который входит в состав пакета OpenFOAM.

Процесс дискретизации расчетной области начинается с разделением области на простые геометрические части – блоки, а затем каждый блок разбивается на непересекающиеся ячейки, имеющие форму шестигранников. Разбиение в направлении оси Oz состоит из одной ячейки, так как в силу двухмерности задачи течение в этом направлении отсутствует. На рисунке 1.2. представлен метод деления расчетной области.

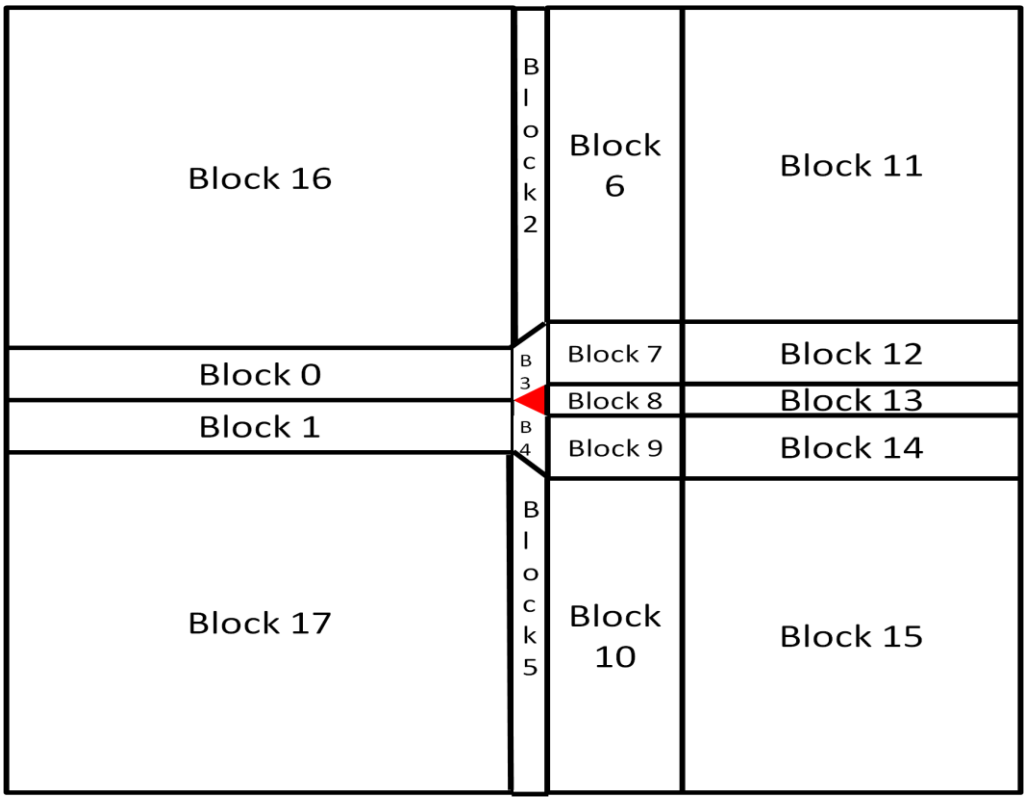


Рисунок 1. 2: Способ деление области на блоки

Здесь для двухмерных расчетов используется область размером $30 \times 30 \times 1$ - где эти числа соответственно указывают на $l_1 \times l_2 \times l_3$, которые на рисунке показанно.

Далее в таблице 1.1 приведены значения основных параметров, характеризующие разрешающие способности сеток: n – общее количество ячеек, N_m- количество ячеек на границе цилиндра, V_m -

объем самых мелких ячеек, расположенных на границе с цилиндром, V_{max} - объем самых крупных ячеек, расположенных в окрестности внешней границы области.

Таблица 1. 1: Параметры расчетных сеток

	n	**N_m**	**V_m**	**V_max**	**M_n**	**M_s**	**M_u**
m1	127652	197	1.24*10(-4)	0.22	30	0.37	0.46
m2	56734	131	2.8*10(-4)	0.5	30	0.37	0.46

Помимо разрешающей способности важными факторами оценки качества построенных расчетных сеток являются [37, 38]:

1. Неортогональность. Показатель неортогональности M_n измеряется как угол a между вектором d соединяющим центры двух соседних ячеек и нормалью S к их общей грани (Рис. 1.3).

$$M_n = \angle a \tag{22}$$

   Имеет оптимальное значение 0 градусов.

2. Скошенность. Показатель скошенности M_sизмеряется как отношение длинны вектора m равной расстоянию между точкой f_0(образованной пресечением вектора d с общей гранью ячеек) и центром грани f_c к длине вектора d (Рис. 1.3).

$$M_s = \frac{|m|}{|d|} \tag{23}$$

   Имеет оптимальное значение 0.

3. Равномерность. Показатель равномерности M_u измеряется как отношение длинны вектора d соединяющего точку f_0 с центром ячейки N к длине вектора d (Рис. 1.3).

$$M_u = \frac{|\overline{f_0 N}|}{|d|} \tag{24}$$

   Для равномерной сетки $M_u = 0.5$.

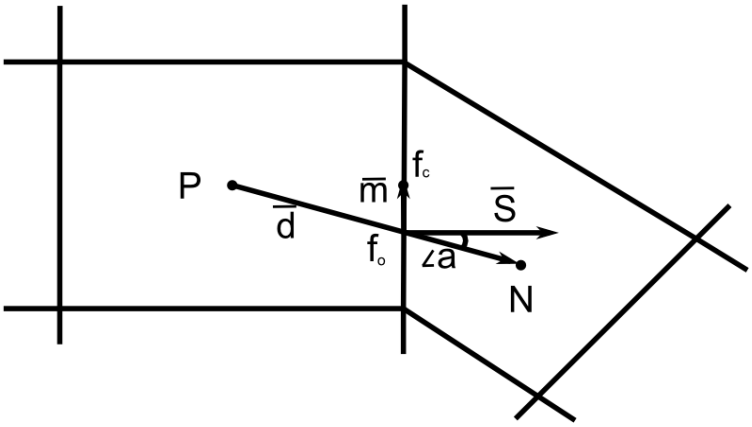


Рисунок 1. 3: Ячейки расчетной сетки

Эти локальные характеристики сетки оказывают ключевое влияние на точность результирующей аппроксимационной схемы. Экстремальные значения показателей скошенности, неортогональности и равномерности для используемых сеток приведены в таблице 1.1.

1.3.2. Граничные условия

На входной и выходной границах области задаются неотражающие граничные условия вида:

$$\begin{cases} u = u_\infty, \ {\partial p}/{\partial x} = -\dot{u}_\infty, \ u_0 > 0; \\ {\partial u}/{\partial x} = 0, \ p = -\dot{u}_\infty x, \qquad u_0 \leq 0; \end{cases} \tag{25}$$

$$v = 0.$$

Они скомбинированы из условий (20), определенных на бесконечно удаленной границе. Условия зависят от переменной u_0, определяющей направление потока относительно внешней нормали к границе.

На верхней и нижней границах ставятся условия проскальзывания:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \ \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \ v = 0. \tag{26}$$

На границе цилиндра ставятся условия прилипания для скорости:

$$u = v = 0, \tag{27}$$

и условие для давления:

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0. \tag{28}$$

На передней и задней границах области задаются специальные «пустые» граничные условия, предусмотренные в пакете для случаев, когда вычисления в обозначенном направлении не проводятся.

В качестве начальных условий задачи во всей расчетной области используются значения скоростей и давления соответствующие невозмущенному потоку.

1.3.3. Дискретизации системы уравнений движения

Как уже перечисленно, следующий этап заключается в дискретизации системы уравнений движения.

В пакете OpenFOAM, этот процесс проводится по методу конечных объемов (FVM) в декартовой системе координат. Для этого дискретные значения составляющих скорости и дискретные давления локализуются в центрах ячеек построенной расчетной сетки.

Система уравнений задачи в интегральной форме для произвольной ячейки сетки с объемом V записывается в следующем образом:

$$\underbrace{\int_V \frac{\partial U}{\partial t} dV}_{\mathrm{I}} + \underbrace{\int_V \nabla.(UU)\, dV = -\int_V \nabla p\, dV + \upsilon \int_V \Delta \mathrm{U}\, dV}_{\mathrm{II}} \tag{29}$$

$$\int_V \nabla.\mathrm{U}\, dV = 0 \tag{30}$$

На представленных формулах, I и II соответсвенно так обясняются:

I. Аппроксимируется в центре ячейки как произведение среднего

значения подинтегральной функции на объем ячейки V.

II. Переход от объемного интеграла к поверхностному используя общая процедура Гаусса.

Далее поверхностные интегралы превращаются в виде суммы интегралов по граням ячейки и приближенно вычисляются по формуле средних прямоугольников. Новая полудискретная система уравнений для произвольной ячейки представляется в виде:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)_P V + \overbrace{\sum_f S_f.(UU)_f}^{конвекция} = -\sum_f S_f p_f + \upsilon \overbrace{\sum_f S_f.(\nabla U)_f}^{диффузия} \qquad (31)$$

$$\sum_f S_f\,.(U)_f = 0 \qquad (32)$$

Здесь индекс f указывает на то, что переменная или градиент определены на грани ячейки, P – в центре ячейки, а S_f определяется как вектор ортогональный к грани ячейки и по модулю равный площади этой грани.

Для линеаризации упомянутившейся системы, конвективные слагаемые представляются в следующей форме:

$$\sum_f S_f.(UU)_f = \sum_f F(U)_f \qquad (33)$$

Здесь, F– массовый поток через грань с индексом f, считается известным. Значения функции и нормальных градиентов на поверхности ячеек в системе (31) и (32) для внутренних ячеек расчетной области интерполируются из значений функции в центрах соседних ячеек.

В данной работе, градиент давления на границах ячеек используется линейная интерполяция.

$$p_f = p_P f_x + p_N(1 - f_x) \qquad (34)$$

Здесь, $f -$ символ границы, P и $N -$ символы центров соседних ячеек, p_Pи p_N – значения давления в центрах ячеек P и N соответсвенно, $p_f -$ значение давления на границе между этими двумя ячейками и наконец $f_x -$ интерполяционный множитель.

Вычисление дискретной составляющей скорости u_f на грани с индексом f для $F > 0$ производится по формуле;

$$\begin{cases} u_f = u_P, & \tilde{u}_P \leq 0, \tilde{u}_P \geq 1 \\ u_f = u_P f_x + u_N(1 - f_x), & \beta_m \leq \tilde{u}_P < 1 \\ u_f = \big(1 - \gamma_u(1 - f_x)\big)u_P + \gamma_u(1 - f_x)u_N, & 0 < \tilde{u}_P < \beta_m \end{cases} \quad (35)$$

Здесь $\tilde{u}_p = 1 - ((\nabla \mathrm{u})\mathrm{f} \,.\, \mathrm{d})/(2(\nabla \mathrm{u})\mathrm{p} \,.\, \mathrm{d}))$ –нормализованная переменная, d-вектор направленный из точки P в точку $N, \Upsilon_u = \frac{\tilde{u}_p}{\beta m}$ - факторы смешивания, $\frac{1}{10} < \beta m < \frac{1}{2}$- предопределенная константа метода. Выбор больших значений β_m из данного диапазона обеспечивает наилучшую устойчивость схемы, а меньших- увеличивает точность интерполяции. В данной работе использовалось значение $\beta m = 0.25$. В случае противоположного направления потока F $(F < 0)$ формула (*35*) изменяются соответствующим образом.

В диффузионных слагаемых при дискретизации оператора Лапласа необходимо вычислять нормальные градиенты скорости на поверхности ячейки. На ортогональных участках сетки, где вектор S параллелен вектору d, они вычисляются из значений скорости в центрах соседних ячеек по симметричной схеме второго порядка;

$$S \cdot (\nabla u)_f = |S| \frac{u_N - u_P}{|d|} \quad (36)$$

На неортогональных участках сетки (рис. 1.3) скалярное произведение $S\cdot(\nabla u)_f$ представляется в виде суммы двух слагаемых;

$$S \cdot (\nabla u)_f = l \cdot (\nabla u)_f + k \cdot (\nabla u)_f \qquad (37)$$

Первое слагаемое отвечает за ортогональный вклад, второе- за неортогональную поправку, при этом для векторов k и l выполняется соотношение:

$$S = k + l \qquad (38)$$

Ортогональный вклад вычисляется по формуле (36), где вместо вектора S используется вектор l, параллельный вектору d, длина которого определяется по формуле

$$l = \frac{d}{d \cdot S} |S|^2 \qquad (39)$$

Неортогональная поправка вычисляется следующим образом; вектор k находится из соотношения (38), а значение градиента $(\nabla u)f$ на грани ячейки интерполируется из значений градиентов в центрах соседних ячеек;

$$(\nabla u)_f = (\nabla u)_P f_x + (\nabla u)_N (1 - f_x) \qquad (40)$$

Для интерполяции слагаемых $(\nabla v)f$, $(\nabla w)f$ применяется аналогичный подход.

Аппроксимация диффузионных слагаемых имеет второй порядок точности для равномерных участков сеток, на неравномерных участках порядок понижается до первого [38]. Для дискретизации системы (31) по времени используется неявная схема Эйлера;

$$\left(\frac{U_P^n - U_P^o}{\tau}\right) V + \sum_f F U_F^n = -\sum_f S_f p_f^n + \nu \sum_f S_f (\nabla U)_F^n \qquad (41)$$

$$\sum_f S_f \cdot U_F^n = 0, \qquad \sum_f S_f \cdot U_F^o = 0 \qquad (42)$$

Здесь верхние индексы *«o»* и *«n»* указывают на использование переменной со старого или нового временного слоя соответственно, τ- шаг по времени.

для минимизации эффектов связанных с аппроксимацией первого порядка точности, шаг по времени во всех расчетах выбирается из условия $Co^{max} < 0.1$- максимальное число Куранта не превышает значения *0.1*. Число Куранта в пакете *OpenFOAM* определяется по формуле;

$$Co = \frac{|U_P|}{\delta} \qquad (43)$$

где $|U_P|$- модуль скорости в ячейке, δ- размер ячейки в направлении скорости.

1.3.4. Дискретизация граничных условий

При решении задачи на каждом временном слое используется итерационный алгоритм PISO, основанный на последовательном решении уравнений для скоростей и давлений. При этом необходимо определить граничные условия для скорости и давления и на этой основе провести дискретизацию уравнений в граничных ячейках.

Обозначения используемых граничных условий в пакете OpenFOAM приведены в таблице 1.2.

Таблица 1. 2: Граничные условия в OpenFOAM.

Граница	Переменная	Тип граничных условий
$\Gamma_{front}, \Gamma_{back}$	U, p	empty
$\Gamma_{in}, \Gamma_{out}$	U	mixed
$\Gamma_{in}, \Gamma_{out}$	p	mixed
$\Gamma_{bottom}, \Gamma_{top}$	U	slip
$\Gamma_{bottom}, \Gamma_{top}$	p	zeroGradient
Γ_{cyl}	U	fixedValue
Γ_{cyl}	p	zeroGradient

В качестве начальных условий задачи во всей расчетной области используются значения скоростей и давления соответствующие невозмущенному потоку.

1.4. Итерационная схема

Решение дискредитированной задачи проводится на основе метода PISO [ссылки], реализованного в модуле icoFoam. На каждой временной итерации алгоритма определяются дополнительные шаги, отвечающие за обновление граничных условий. Обновление проводится по схеме передиктор с отложенной коррекцеий. Результирующая итерационная схема для вычисления значений дискретных неизвестных на j-ом временном слое может быть представлена в следующем виде:

1. Вычисляется предиктор для ускорения подвижной системы координат

$$\dot{w}_p^j = 2\dot{w}^{j-1} - \dot{w}^{j-2} \tag{44}$$

2. Определяются граничные условия на выходной и выходной границах по формуле (25), где ускорение вычисляется как сумма предиктора и корректора для старого временного слоя, а скорость находится с помощью направленной разности второго порядка точности:

$$\dot{u}_{\infty}^{j} = -\dot{w}_{p}^{j} + w_{c}^{j-1}, \tag{45}$$

$$u_{\infty}^{j} = (-2\dot{u}_{\infty}^{j} dt + 4u_{\infty}^{j-1} - u_{\infty}^{j-2})/3.$$

Проводится решение уравнений движения жидкости (20) по методу PISO, вычисляется сила Fx, действующая со стороны жидкости на виброробот.

3. По найденной силе вычисляется реальное ускорение системы:

$$\dot{w}^{j} = -\mu_2 \dot{v}^{j} + \mu_1 \frac{R^2}{S} F^{j} \tag{46}$$

4. Вычисляется корректор

$$\dot{w}_{c}^{j} = w_{p}^{j} - \dot{w}^{j} \tag{47}$$

Глава 2

Результаты

2.1. Результаты расчетов

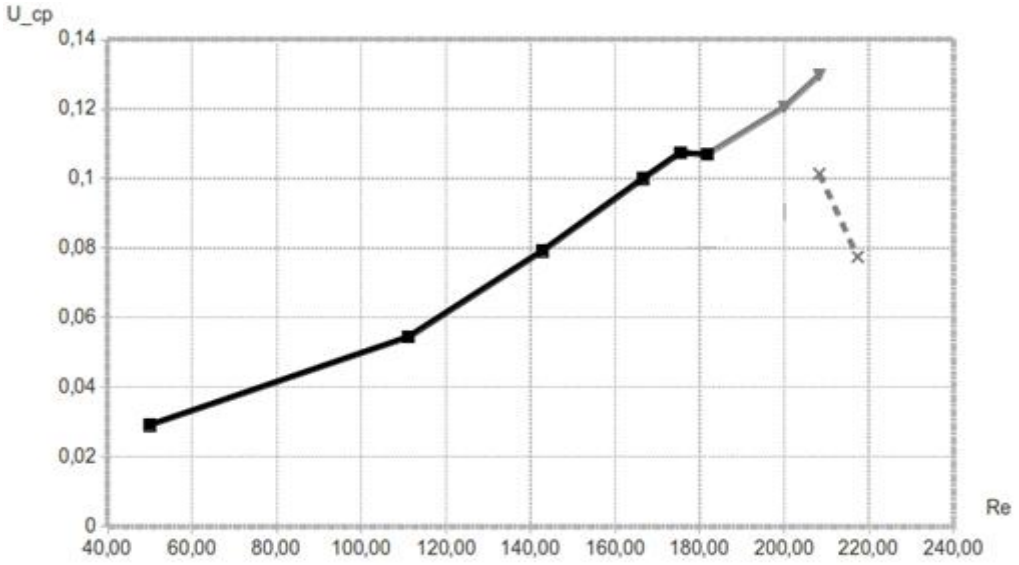
Расчеты в работе выполнялись для следующей комбинации управляющих параметров $\mu_1 = 0.53$, $\mu_2 = 0.423$, f=1/5, в диапазоне чисел Рейнольдса $50 < Re < 250$. Вычисления проводились с разных начальных приближений, определяемых различной начальной скоростью набегающего потока.

В исследуемом диапазоне было обнаружено 3 устойчивых направленных режима движения виброробота. Для описания этих режимов удобно ввести следующие характеристики движения: U_cp – средняя скорость движения и показатель эффективности движения, отражающий энергетические затраты на движение тела с помощью внутреннего движителя. Они определяются по следующим формулам:

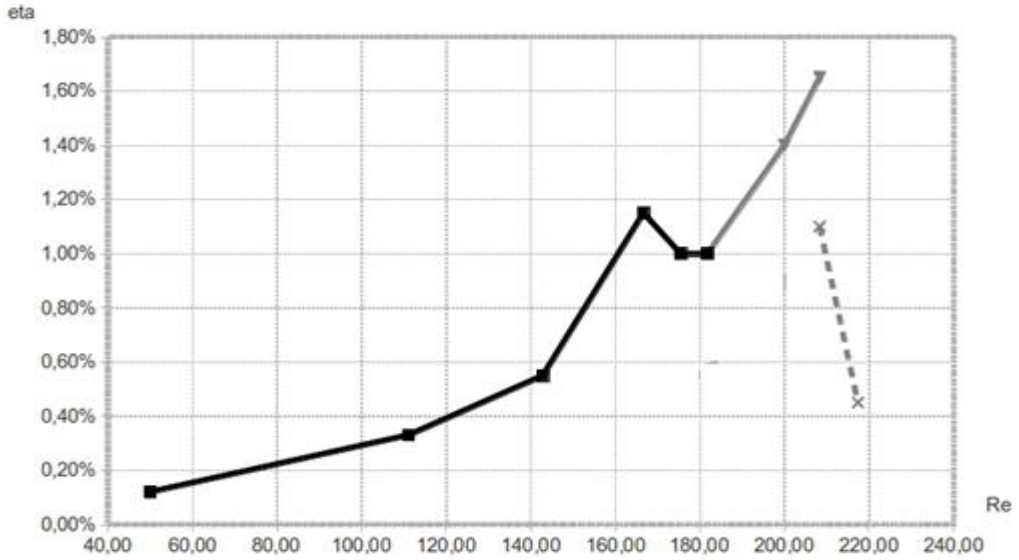
$$\eta = \frac{N_0}{N_{vbr}} \qquad (48)$$

Здесь N_0 – минимальная мощность, необходимая для движения тела скоростью U_cp (значения N_0 для разных Re получены по данным вспомогательных расчетов), N_vbr – мощность, затрачиваемая при движении виброробота с этой скоростью .

Изменения характеристик движения виброробота с ростом числа Рейнольдса при разных режимах движения представлены на рис 2.1. В зоне малых чисел Рейнольдса (Re<160) наблюдается единственный периодический симметричный относительно оси колебания режим S, который определяет направленное движение робота вперед вершиной. Рост нелинейности закона сопротивления среды в этом диапазоне с увеличением числа Рейнольдса приводит к росту значений как средней скорости, так и показателя эффективности движения виброробота.



а)

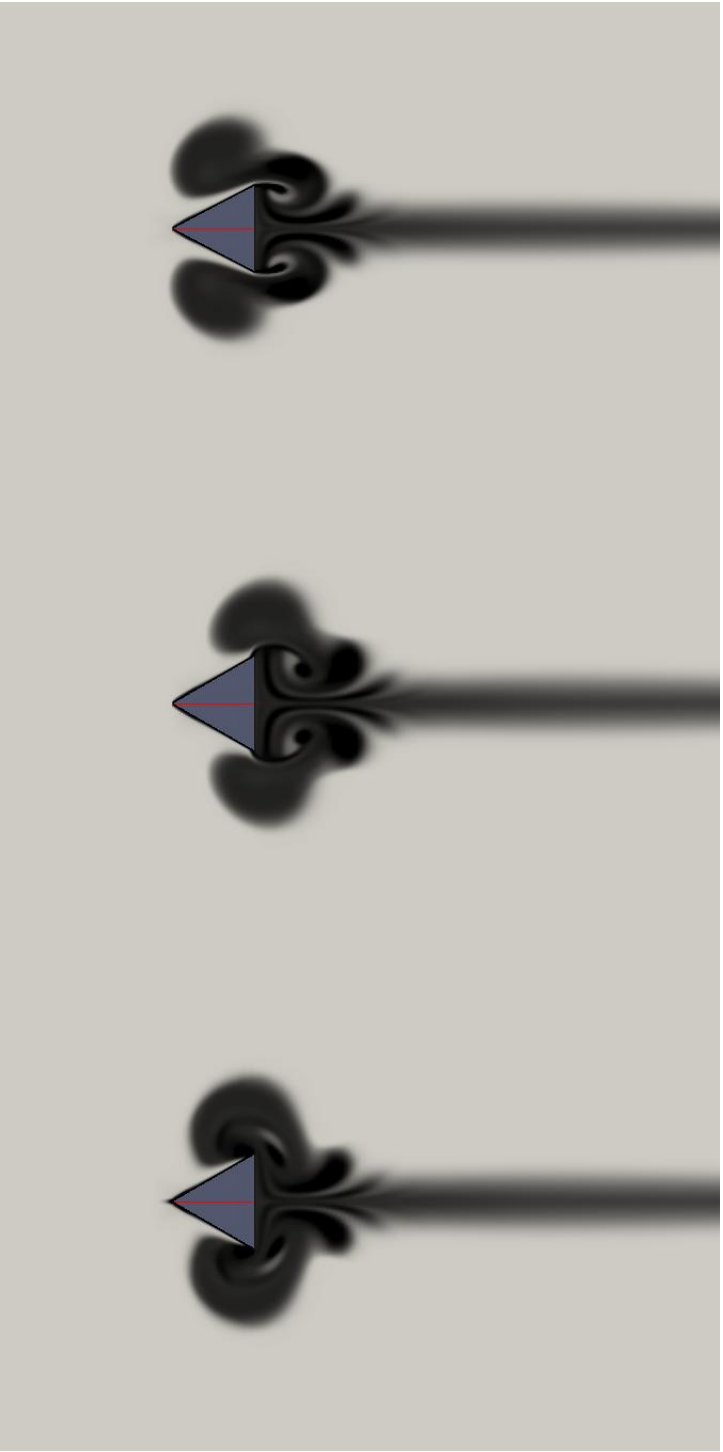


б)

Рисунок 2. 1: Характеристики движения виброробота: а) – зависимость средней скорости от числа Рейнольдса, б) – зависимость эффективности от числа Рейнольдса.

В далее, приведены картины течения за половину большого периода квазипериодических разных режимов.

2.2. Картины течения



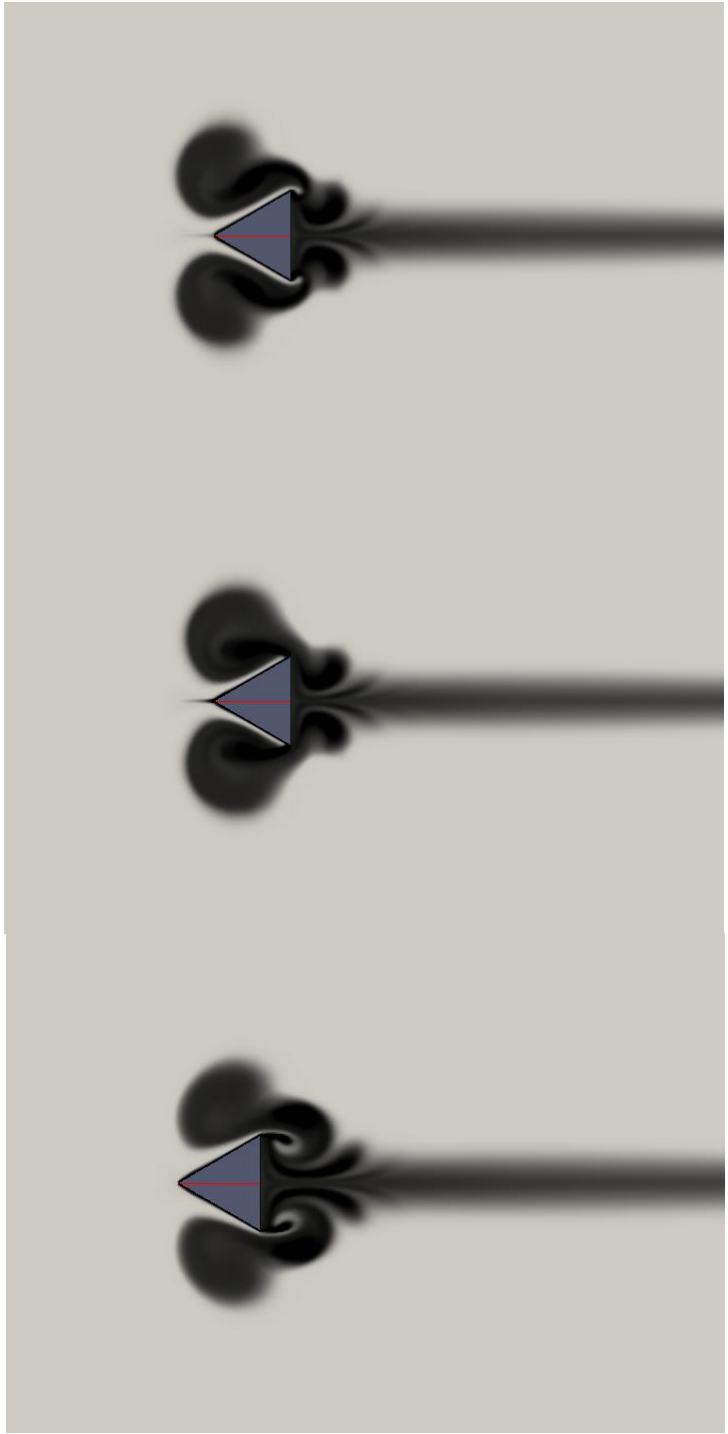


Рисунок 2. 2: Картины течения за половину большого периода симметричного режима. $\boldsymbol{\upsilon}$ = 9e-3

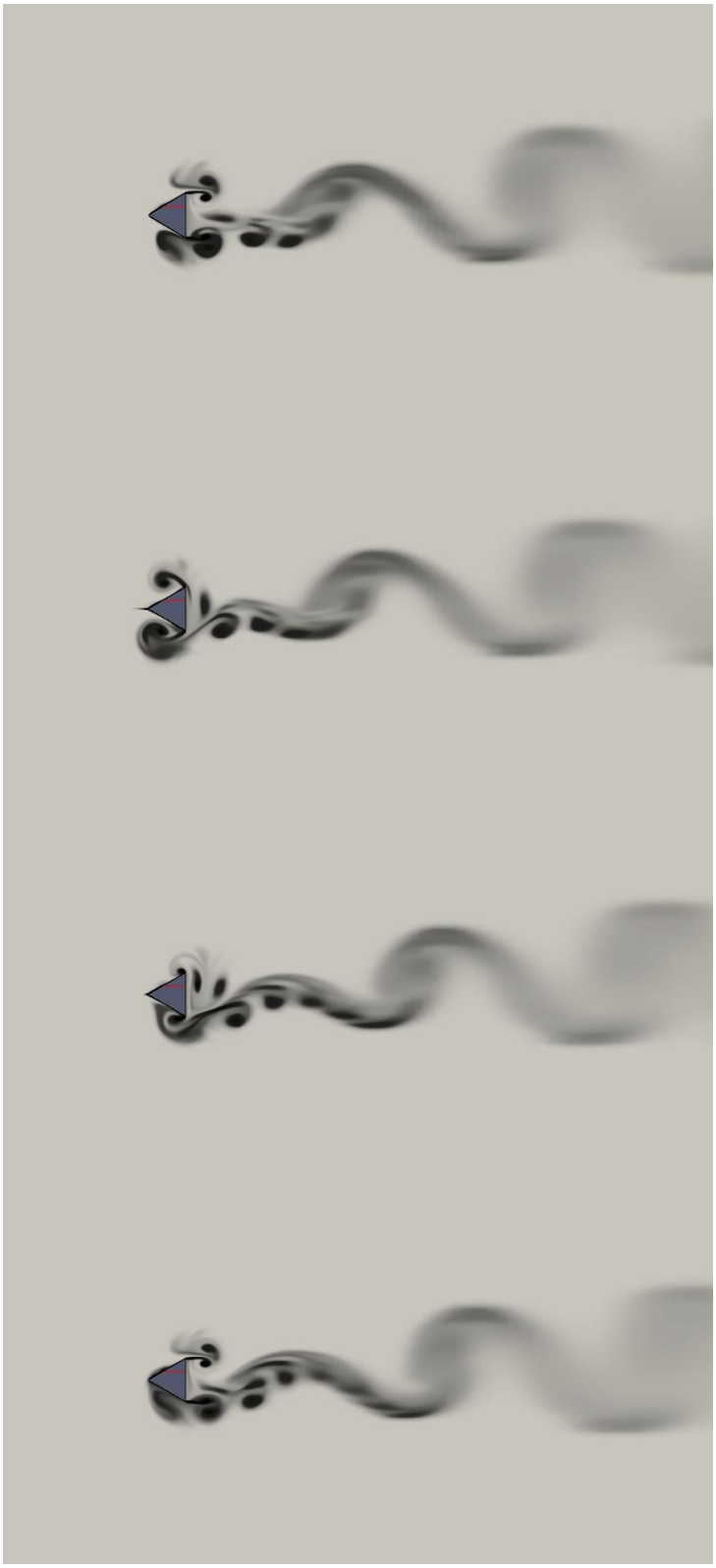


Рисунок 2. 3: Картины течения за половину большого периода квазипериодического режима 1. $\boldsymbol{\upsilon}$ = 4.8e-3

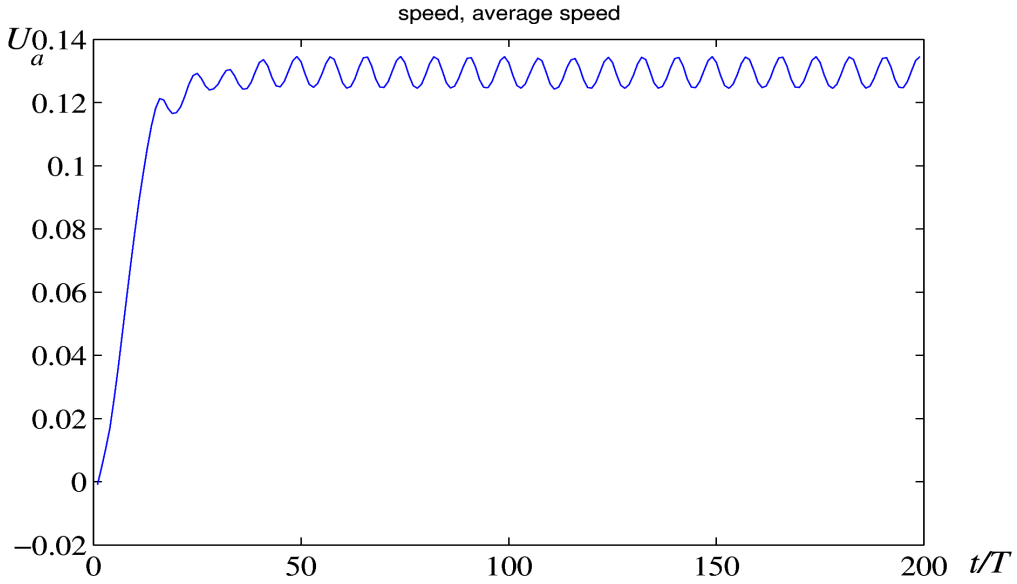


Рисунок 2. 4: Амплитуды скорости виброробота в зависимости от времени когда $\boldsymbol{\upsilon}$ = 4.8e-3 режим 1.

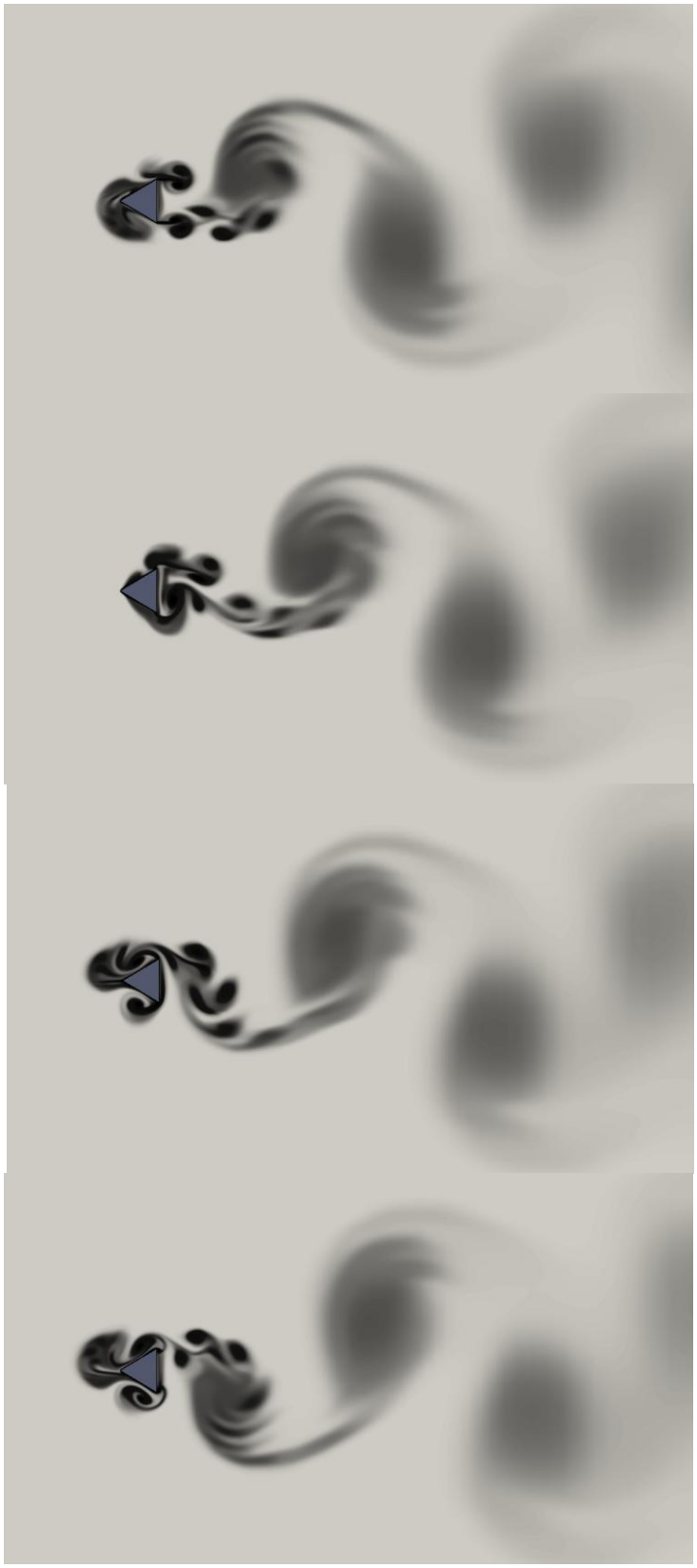


Рисунок 2. 5:

Картины течения за половину большого периода квазипериодического режима 2. υ = 4.6e-3

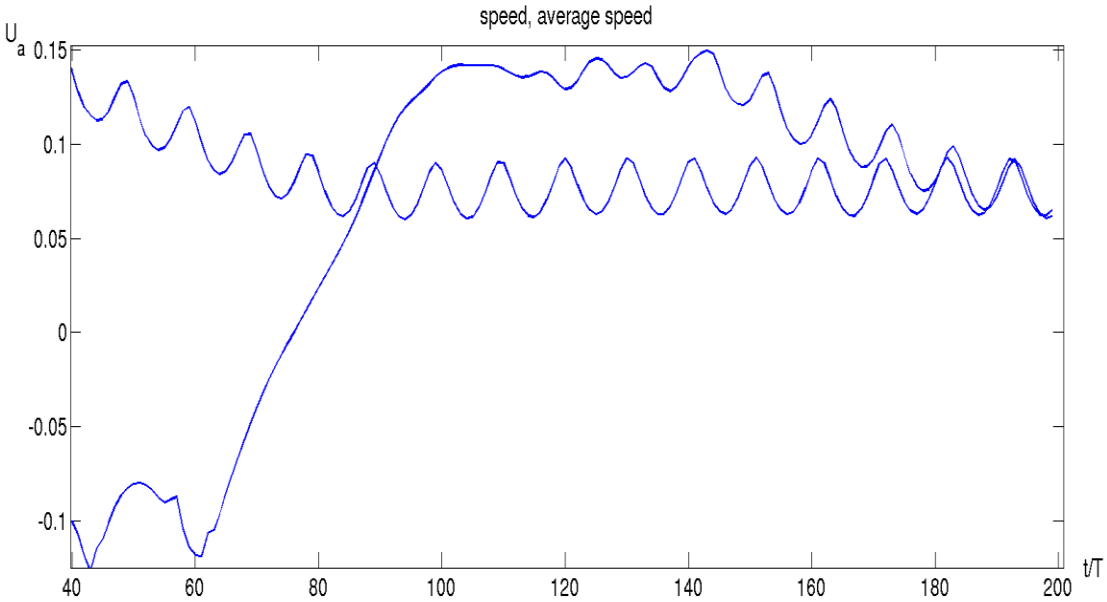


Рисунок 2. 6: Амплитуды скорости виброробота в зависимости от времени для двух разных режима с разными начальными условиями когда $\boldsymbol{\upsilon}$ = 4.6e-3 режим 2.

Выбраны разные начальные условия, график показывает что с разных начальных условий мы сходим к одному и тому же решению.

2.2. Заключение

В ходе исследований проведенных в работе по изучению движения клиновидного виброробота в вязкой жидкости при гармонических осцилляциях внутренней массы были получены следующие основные результаты:

1. Выбранная форма корпуса при заданном законе движения внутренней массы для исследуемой частоты колебания f = 1/5 позволяет обеспечить направленное устойчивое движение виброробота в вязкой жидкости в диапазоне чисел Рейнльдса 50<Re<250.

2. Обнаружен гистерезис режимов движения. Направление движения в большей части исследуемого диапазона определяется начальными условиями, в зависимости от которых могут реализоваться различные устойчивые режимы прямолинейного движения робота как вперед вершиной, так и вперед основанием, обладающие различной эффектностью.

3. Большинство наблюдаемых режимов течения относится к разряду квазипериодических, т. е. полный период движения робота равен нескольким периодам колебания внутренней массы. В том числе базовый периодический режим течения переходит в квазипериодиский при Re>180. Это связано в первую очередь с тем, что с ростом числа Рейнольдса гидродинамическая сила накапливает временные гармоники отличные от главной.

4. Максимальная эффективность движения, при заданных параметрах не превышает 1,7%. Это значение достигается для квазипериодического режима К1 при числе Рейнольдса Re = xx. При больших числах Рейнольдса наблюдаются менее

эффективные режимы, которые постепенно переходят в хаотические.

Все эти результаты служат основой для понимания взаимодействия виброробота с вязкой средой, являются платформой для исследование более сложных законов движения с целью максимизации эффективности подобных устройств.

Литература

1. *Stokes, G. G.* On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums / G. G. Stokes // *Trans. Camb. Phil. Soc.* — 1851. — Vol. 9. — Pp. 8–106.
2. *Schlichting, H.* Berechnung ebener periodischer Grenzschichtstrmungen / H. Schlichting // *Phys.* — 1932. — Vol. 33. — Pp. 327–335.
3. *Wang, C. Y.* On high-frequency oscillating viscous flows / C. Y. Wang // *J. Fluid Mech.* — 1968. — Vol. 32. — Pp. 55–68.
4. *Stuart, J.* Double boundary layers in oscillatory viscous flow / J. Stuart // *J. Fluid Mech.* — 1966. — Vol. 24. — Pp. 673–687.
5. *Riley, N.* Oscillatory Viscous Flows. Review and Extension / N. Riley // *IMA Journal of Applied Mathematics*. — 1967. — Vol. 3, no. 4. — Pp. 419–434.
6. *Nehari, D.* Three-dimensional analysis of the unidirectional oscillatory flow around a circular cylinder at low Keulegan–Carpenter and beta numbers / D. Ne- hari, V. Armeni, F. Balli // *J. Fluid Mech.* — 2004. — Vol. 520. — Pp. 157–186.
7. *Elston, J. R.* The primary and secondary instabilities of flow generated by an oscillating circular cylinder / J. R. Elston, H. M. Blackburn, J. Sheridan // *J. Fluid Mech.* — 2006. — Vol. 550. — Pp. 359–389.
8. Boundary layer flow near a cylindrical obstacle in an oscillating incompressible fluid / J. Holtsmark, I. Johnsen, T. Sikkeland, S. Skavlem // *J . Acoust. Soc. Am.*— 1954. — Vol. 26. — Pp. 26–39.
9. *Шлихтинг, Г.* Теория пограничного слоя / Г. Шлихтинг; Под ред. Л. Г. Лой- цянский. — Москва: Наука, 1974. — С. 712.

10. *Ван-Дайк, М.* Альбом течения жидкости и газа / М. Ван-Дайк; Под ред.Г. И. Баренблатт, В. П. Шидловский. — Москва: Мир, 1986. — С. 184.
11. *Honji, H.* Streaked flow around an oscillating circular cylinder / H. Honji // *J.Fluid Mech.* — 1981. — Vol. 107. — Pp. 509–520.
12. *Hall, P.* On the stability of unsteady boundary layer on a cylinder oscillating transversely in a viscous fluid / P. Hall // *J. Fluid Mech.* — 1984. — Vol. 146. — Pp. 347–367.
13. *Sarpkaya, T.* Forces on a circular cylinder in viscous oscillatory flow at low Keulegan-Carpenter numbers / T. Sarpkaya // *J. Fluid Mech.* — 1986. — Vol. 165. — Pp. 61–71.
14. *Williamson, H. K.* Sinusoidal flow relative to circular cylinders / H. K. Williamson // *J. Fluid Mech.* — 1985. — Vol. 155. — Pp. 141–174.
15. *Tatsuno, M.* A visual study of the flow around an oscillating circular cylinder at low Keulegan-Carpenter numbers and low Stokes numbers / M. Tatsuno, P. W. Bearman // *J. Fluid Mech.* — 1990. — Vol. 211. — Pp. 157–182.
16. *Nehari, D.* Three-dimensional analysis of the unidirectional oscillatory flow around a circular cylinder at low Keulegan–Carpenter and beta numbers / D. Nehari, V. Armeni, F. Balli // *J. Fluid Mech.* — 2004. — Vol. 520. — Pp. 157–186.
17. *Elston, J. R.* The primary and secondary instabilities of flow generated by an oscillating circular cylinder / J. R. Elston, H. M. Blackburn, J. Sheridan // *J. Fluid Mech.* — 2006. — Vol. 550. — Pp. 359–389.
18. Dashtimanesh, A. Assessment of Air Flow over an Equilateral Triangular Obstacle in a horizontal Channel Using FVM / A. Dashtimanesh, P. Ghadimi, R. Shademani, R. Zamanian// *J. Mathematical Sciences and Applications.* — 2013. — Vol. 1. — No. 1.

— Pp. 12-16.

19. De, A., K., Dalal, A., “Numerical simulation of unconfined flow past a triangular cylinder”, *J Numer Meth Fluids*, Vol.52, 2006, 801-821.
20. Bao, Y., Zhou, D., Zhao, Y.J., 2010. A two-step Taylor-characteristic-based Galerkin method for incompressible flows and its application to flow over triangular cylinder with different incidence angles. International Journal for Numerical Methods in Fluids 62, 1181–1208.
21. Alawadhi, E.M., 2013. Numerical simulation of fluid flow past an oscillating triangular cylinder in a channel. Journal of Fluids Engineering (ASME), 135; 041202.
22. Alonso, G., Sanz-Lobera, A., Meseguer, J., 2012. Hysteresis phenomena in transverse galloping of triangular cross-section bodies. Journal of Fluids and Structures 33, 243–251.
23. Srigrarom, S., Koh, A.K.G., 2008. Flow field of self-excited rotationally oscillating equilateral triangular cylinder. Journal of Fluids and Structures 24, 750–755.
24. Wang, S.Z., Zhu, L.D., Zhang, X., et al., 2011. Flow past two freely rotatable triangular cylinders in tandem arrangement. Journal of Fluids Engineering (ASME). 133; 081202.
25. Егоров А.Г., Захарова О.С. Оптимальное по энергетическим затратам движение виброробота в среде с сопротивлением // ПММ. 2010. Т. 74. Вып. 4. С. 620-632.
26. Болотник Н.Н., Фигурина Т.Ю., Черноусько Ф.Л. Оптимальное управление прямолинейным движением системы двух тел в сопротивляющейся среде // ПММ. 2012. Т. 76. Вып. 1. С. 3-22.
27. Егоров А.Г., Захарова О.С. Оптимальное квазистационарное движение виброробота в вязкой жидкости// Изв. Вузов. Матем. 2012. №2. С. 57-64.

28. Нуриев А.Н., Зайцева О.Н. Решение задачи об осциллирующем движении цилиндра в вязкой жидкости в пакете OpenFOAM.// Вестн. Каз. технологического ун-та. 2013. Том 8. С. 116-123.

29. M.M. Zdravkovich, Flow around circular cylinders, In: Fundamentals, vol. 1.Oxford University Press, USA, 1977.

30. Rajani, B., N., Kandasamy, A., Majumdar, S., “Numerical simulation of laminar flow past a circular cylinder”, *Appl. Math. Model* Vol.33, 2008, 1228-1247.

31. Jackson, C., P., “A finite volume study of the onset of vortex shedding in flow past variously shaped bodies”, *J Fluid Mech.*, Vol.182, 1987, 23-45.

32. Aref, H., Brons, M., Stremler, M., A., “Bifurcation and instability problems in vortex wakes”, *J. Comput. Phys.* Vol.189, 2003, 351-370.

33. Abbassi, H., Turki, S., Nasrallah, S., “numerical investigation of forced convection in a plane channel with a built-in triangular prism”, *J. Thermal Sci,* Vol. 40, 2001, 649-658.

34. Zielinska, B., J., A., Wesfreid, J., E., “On the spatial structure of global modes in wake flow”, *Phys Fluids*, Vol.7, 1995, 1418-1424.

35. Srikanth, S., Dhiman, A., K., Bijjam, S., “Confined flow and heat transfer across a triangular cylinder in a channel”, *J. Thermal Sci,* Vol.49, 2011, 2191-2200.

36. Chatterjee, D., Mondal, B., “Forced convection heat transfer from an equilateral triangular cylinder at low Reynolds numbers”, *Heat mass Trans.*, Vol. 48, 2012, 1575-1587.

37. *Jasak, H.* Error analysis and estimation for the Finite Volume method with ap- plications to fluid flows: Ph.D. thesis / Imperial College, University of London. — 1996.

38. *Franjo, Juretic*. Error analysis in finite volume CFD: Ph.D. thesis / Imperial College, University of London. — 2004.

39. *Tatsuno, M.* Circulatory Streaming in the Vicinity of an Oscillating Triangular Cylinder / M. Tatsuno // *J. Physical Society of Japan.* — 1975. — Vol. 38. — No 1.