ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2005 МАТЕМАТИКА № 11 (522)

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 514.756

Т.Н. АНДРЕЕВА

ЛИНЕЙНЫЕ СВЯЗНОСТИ, ИНДУЦИРУЕМЫЕ ПОЛНЫМ ОСНАЩЕНИЕМ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ КОНФОРМНОГО ПРОСТРАНСТВА

1. Рассмотрим гиперповерхность [1] $V_{n-1} \subset C_n$ $(n \geq 3)$; отнесем ее к полуизотропному [2] полуортогональному $(g_{in} = (A_i A_n) = 0)$ $(i,j,k,l,s,t = \overline{1, n-1})$ реперу $R = \{A_\lambda\}$ $(\lambda, \mu, \rho = \overline{0, n+1})$ первого порядка. Уравнения инфинитезимального перемещения репера R имеют вид $dA_\lambda = \omega_\lambda^\mu A_\mu$, где дифференциальные формы Пфаффа ω_λ^μ удовлетворяют уравнениям структуры конформного пространства C_n [3], [4]: $D\omega_\lambda^\mu = \omega_\lambda^\rho \wedge \omega_\rho^\mu$, а также линейным зависимостям

$$\omega_0^{n+1} = \omega_{n+1}^0 = 0, \;\; \omega_0^0 + \omega_{n+1}^{n+1} = 0, \;\; \omega_I^0 + g_{IK}\omega_{n+1}^K = 0,$$
$$\omega_I^{n+1} + g_{IK}\omega_0^K = 0, \;\; dg_{IL} - g_{IK}\omega_L^K - g_{KL}\omega_I^K = 0 \quad (I, J, K, L = \overline{1, n}).$$

Если скалярные произведения $(A_\lambda A_\mu)$ элементов выбранного репера обозначить через $g_{\lambda\mu}$, то [3], [4]

$$\|g_{\lambda\mu}\| = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & g_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{nn} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad g_{\lambda\mu} = g_{\mu\lambda},$$

причем метрический тензор g_{ij} и относительный инвариант g_{nn} являются невырожденными:

$$g_{il}g^{lj} = \delta_i^j, \;\; g_{nn}g^{nn} = 1, \;\; dg_{ij} - g_{ik}\omega_j^k - g_{kj}\omega_i^k = 0,$$
$$dg^{ij} + g^{ik}\omega_k^j + g^{kj}\omega_k^i = 0, \;\; d\ln g_{nn} - 2\omega_n^n = 0, \;\; d\ln g^{nn} + 2\omega_n^n = 0.$$

В этом репере справедливо

$$\omega_0^n = 0, \;\; \omega_i^n = \Lambda_{ij}^n \omega_0^j, \;\; \omega_n^i = \Lambda_{nt}^i \omega_0^t, \;\; \Lambda_{[ij]}^n = 0, \;\; g_{ij}\Lambda_{nk}^j + g_{nn}\Lambda_{ik}^n = 0.$$

2. Предположим, что задано касательное оснащение [1], [5] гиперповерхности $V_{n-1} \subset C_n$ полем гиперсфер $P_n = A_n + x_n^0 A_0$, определяемым полем квазитензора x_n^0 [1]:

$$dx_n^0 + x_n^0(\omega_0^0 - \omega_n^n) + \omega_n^0 = x_{nk}^0 \omega_0^k. \tag{1}$$

Охваты $\Lambda_n \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{n-1}\Lambda_{nj}^j$, $\widetilde{\Lambda}_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n-1} g^{jk} g_{nn} \Lambda_{kj}^n$ удовлетворяют уравнению (1); кроме того, данные охваты совпадают $\Lambda_n = \widetilde{\Lambda}_n = -\frac{1}{n-1}\Lambda_{nj}^j$. Таким образом, во второй дифференциальной окрестности охват Λ_n внутренним образом определяет касательное оснащение гиперповерхности $V_{n-1} \subset C_n$.

Возьмем систему из $(n+1)^2$ форм Пфаффа $\{\overset{0}{\Omega}{}_b^a\}$ $(a, b, c = \overline{0, n-1}; n+1)$:

$$\begin{gathered} \overset{0}{\Omega}{}_0^j = \omega_0^j, \;\; \overset{0}{\Omega}{}_0^0 = \omega_0^0, \;\; \overset{0}{\Omega}{}_0^0 + \overset{0}{\Omega}{}_{n+1}^{n+1} = 0, \;\; \overset{0}{\Omega}{}_i^0 = \omega_i^0 - x_n^0 \omega_i^n - \frac{1}{2} g^{nn} (x_n^0)^2 \omega_i^{n+1}, \\ \overset{0}{\Omega}{}_i^j = \omega_i^j, \;\; \overset{0}{\Omega}{}_{n+1}^j = -g^{jk} \overset{0}{\Omega}{}_k^0, \;\; \overset{0}{\Omega}{}_i^{n+1} = \omega_i^{n+1}, \;\; \overset{0}{\Omega}{}_0^{n+1} = \omega_0^{n+1} = 0, \;\; \overset{0}{\Omega}{}_{n+1}^0 = \omega_{n+1}^0 = 0. \end{gathered} \tag{2}$$

Согласно работе [5] система форм (2) удовлетворяет структурным уравнениям пространства конформной связности $\overset{0}{C}_{n-1,n-1}$ с $(n-1)$-мерной базой V_{n-1} и $(n-1)$-мерными слоями, являющимися конформными пространствами $C_{n-1}(u^i) \equiv C_{n-1}(u)$:

$$D\omega_0^i = \omega_0^k \wedge (\omega_k^i - \delta_k^i \omega_0^0), \quad D\overset{0}{\Omega}{}_b^a = \overset{0}{\Omega}{}_b^c \wedge \overset{0}{\Omega}{}_c^a + \frac{1}{2}\overset{0}{R}{}_{bkl}^a \omega_0^k \wedge \omega_0^l, \tag{3}$$

где $d\overset{0}{R}{}_{bks}^a + 2\overset{0}{R}{}_{bks}^a \overset{0}{\Omega}{}_0^0 - \overset{0}{R}{}_{bkl}^a \overset{0}{\Omega}{}_s^l - \overset{0}{R}{}_{bls}^a \overset{0}{\Omega}{}_k^l - \overset{0}{R}{}_{cks}^a \overset{0}{\Omega}{}_b^c + \overset{0}{R}{}_{bks}^c \overset{0}{\Omega}{}_c^a = \overset{0}{R}{}_{bksl}^a \omega_0^l$. В структурных уравнениях (3) компоненты тензора кривизны-кручения $\overset{0}{R}{}_{bkl}^a$ пространства $\overset{0}{C}_{n-1,n-1}$ имеют следующие строения:

$$\overset{0}{R}{}_{0kl}^0 = \overset{0}{R}{}_{0kl}^j = \overset{0}{R}{}_{0kl}^{n+1} = \overset{0}{R}{}_{n+1\,kl}^0 = \overset{0}{R}{}_{ikl}^{n+1} = \overset{0}{R}{}_{n+1\,kl}^{n+1} = 0, \quad \overset{0}{R}{}_{ikl}^j = 2(\Lambda_{i[k}^n - g^{nn} x_n^0 g_{i[k})(\Lambda_{|n|l]}^j + \delta_{l]}^j x_n^0),$$
$$\overset{0}{R}{}_{n+1\,kl}^j = -g^{js}\overset{0}{R}{}_{skl}^0, \quad \overset{0}{R}{}_{ikl}^0 = 2[g^{nn} x_n^0 x_{n[k}^0 g_{l]i} - x_{n[k}^0 \Lambda_{l]i}^n]. \tag{4}$$

Каждая из систем функций $a_{ik}^n(x) \overset{\text{def}}{=} \Lambda_{ik}^n - g^{nn} x_n^0 g_{ik}$, $\widetilde{\Lambda}_{nl}^j(x) \overset{\text{def}}{=} \Lambda_{nl}^j + \delta_l^j x_n^0$ есть тензор порядка не ниже второго. Тогда компоненты тензора $\overset{0}{R}{}_{ikl}^j$ в формулах (4) можно записать в виде $\overset{0}{R}{}_{ikl}^j = 2a_{i[k}^n(x)\widetilde{\Lambda}_{|n|l]}^j(x)$.

Для пространства $\overset{0}{C}_{n-1,n-1}$ без кручения ($\overset{0}{R}{}_{0kl}^j = 0$) выполняются аналоги тождеств Риччи

$$\overset{0}{R}{}_{(kst)}^i = \overset{0}{R}{}_{(kst)}^0 = \overset{0}{R}{}_{i(ks}^l g_{t)l} = 0; \tag{5}$$

кроме того, каждая из систем функций $\{\overset{0}{R}{}_{kst}^i\}$, $\{\overset{0}{R}{}_{kst}^i, \overset{0}{R}{}_{kst}^0\}$, $\{\overset{0}{R}{}_{kst}^i, \overset{0}{R}{}_{n+1\,st}^i\}$ образует тензор.

Теорема 1. *Инвариантное касательное оснащение гиперповерхности $V_{n-1} \subset C_n$ полем гиперсфер P_n индуцирует пространство конформной связности $\overset{0}{C}_{n-1,n-1}$ с полем метрического тензора g_{ij}, определяемое системой* $(n+1)^2$ *форм Пфаффа* (2)*, причем это пространство является пространством без кручения* ($\overset{0}{R}{}_{0kl}^j = 0$); *компоненты тензора кривизны-кручения пространства $\overset{0}{C}_{n-1,n-1}$ имеют строения* (4)*, причем выполняются аналоги тождеств Риччи* (5).

3. Для того чтобы касательная гиперсфера $P_n = A_n + x_n^0 A_0$ была неподвижна, необходимо и достаточно выполнение одной из двух групп соотношений

$$\widetilde{\Lambda}_{nk}^l(x) \overset{\text{def}}{=} \Lambda_{nk}^l + \delta_k^l x_n^0 = 0, \quad x_{nk}^0 = 0. \tag{6}$$

В случае неподвижности касательной гиперсферы P_n функция x_n^0 в силу (6) совпадает с Λ_n: $x_n^0 \equiv \Lambda_n$, а исходная гиперповерхность $V_{n-1} \subset C_n$ совпадает с неподвижной гиперсферой $P_n = A_n + \Lambda_n A_0$. Кроме того, неподвижность касательной гиперсферы P_n равносильна тому, что пространство конформной связности $\overset{0}{C}_{n-1,n-1}$ является плоским.

Теорема 2. *Поле касательных гиперсфер P_n гиперповерхности $V_{n-1} \subset C_n$ вырождается в одну гиперсферу тогда и только тогда, когда справедлива одна из двух эквивалентных групп соотношений* (6)*, или, что то же самое, когда индуцируемое пространство конформной связности $\overset{0}{C}_{n-1,n-1}$ является плоским*; *при этом исходная гиперповерхность V_{n-1} совпадает с неподвижной гиперсферой $P_n = A_n + \Lambda_n A_0$.*

Гиперповерхность $V_{n-1} \subset C_n$, касательно оснащенная неподвижной гиперсферой P_n, существует с произволом $n+1$ произвольных постоянных, которые определяют координаты центра неподвижной гиперсферы $V_{n-1} \subset C_n$ и ее радиус.

4. Предположим, что задано полное оснащение [1], [5] гиперповерхности $V_{n-1} \subset C_n$, т. е. кроме ее касательного оснащения полем гиперсфер P_n, определяемым полем квазитензора x_n^0, задано нормальное оснащение подмногообразия V_{n-1} полем окружностей $[P_i]$, $P_i = A_i + x_i^0 A_0$, определяемым полем квазитензора x_i^0 [1]: $dx_i^0 + x_i^0\omega_0^0 - x_j^0\omega_i^j + \omega_i^0 = x_{ij}^0\omega_0^j$.

Задание поля квазитензора x_i^0 определяет нормализацию [6] пространства конформной связности $\overset{0}{C}_{n-1,n-1}$. Справедлива

Теорема 3. *Инвариантное полное оснащение гиперповерхности $V_{n-1} \subset C_n$ полем квазитензора x_l^0 индуцирует нормализованное пространство конформной связности $\overset{0}{C}_{n-1,n-1}$, определяемое полем окружностей $[P_i]$, задаваемых полем квазитензора x_i^0.*

Система функций $a_{ik}^0 \overset{\text{def}}{=} \widetilde{x}_{ik}^0 - x_i^0 x_k^0 + \frac{1}{2} g_{ik} g^{jl} x_j^0 x_l^0$ образует тензор, вообще говоря, несимметричный $da_{ik}^0 + 2a_{ik}^0\overset{0}{\Omega}{}_0^0 - a_{lk}^0\overset{0}{\Omega}{}_i^l - a_{il}^0\overset{0}{\Omega}{}_k^l = a_{ikl}^0\overset{0}{\Omega}{}_0^l$. Следуя работе [7], тензор a_{ik}^0 назовем основным тензором нормализации пространства $\overset{0}{C}_{n-1,n-1}$, задаваемой полем квазитензора x_i^0. В случае симметрии основного тензора a_{ik}^0 нормализацию пространства конформной связности $\overset{0}{C}_{n-1,n-1}$ по аналогии с нормализацией проективного пространства [6] назовем гармонической.

5. Охват $A_{ijk}^0 \overset{\text{def}}{=} a_{ijk}^0 - a_{ik}^0 x_j^0 - a_{kj}^0 x_i^0 + (g_{ik} a_{lj}^0 + g_{jk} a_{il}^0) g^{lt} x_t^0 - 2a_{ij}^0 x_k^0$ является тензором.

Предположим, что основной тензор нормализации a_{ik}^0 невырожден: $a \overset{\text{def}}{=} |a_{ik}^0| \neq 0$, $a_{ik}^0 a_0^{kj} = a_{ki}^0 a_0^{jk} = \delta_i^j$. В этом случае будем говорить, что нормализация пространства $\overset{0}{C}_{n-1,n-1}$ и полное оснащение гиперповерхности $V_{n-1} \subset C_n$ являются невырожденными.

Возьмем новую систему из $(n+1)^2$ форм Пфаффа

$$\overline{\Omega}{}_b^a = \overset{0}{\Omega}{}_b^a + \Pi_{bk}^a \overset{0}{\Omega}{}_0^k; \tag{7}$$

потребуем, чтобы система форм $\{\overline{\Omega}{}_b^a\}$ удовлетворяла структурным уравнениям пространства конформной связности $\overline{C}_{n-1,n-1}$: $D\overline{\Omega}{}_b^a = \overline{\Omega}{}_b^c \wedge \overline{\Omega}{}_c^a + \frac{1}{2}\overline{R}{}_{blt}^a \overset{0}{\Omega}{}_0^l \wedge \overset{0}{\Omega}{}_0^t$. Это требование равносильно тому, что система функций Π_{bk}^a есть тензор.

На формы системы $\{\overline{\Omega}{}_b^a\}$ наложим дополнительные условия, а именно, чтобы при преобразованиях (7)

1) формы $\overline{\Omega}{}_0^k$, $\overline{\Omega}{}_0^0$, $\overline{\Omega}{}_{n+1}^{n+1}$ оставались без изменения, т. е.

$$\overline{\Omega}{}_0^k = \overset{0}{\Omega}{}_0^k, \quad \overline{\Omega}{}_0^0 = \overset{0}{\Omega}{}_0^0, \quad \overline{\Omega}{}_{n+1}^{n+1} = \overset{0}{\Omega}{}_{n+1}^{n+1};$$

2) для пространства $\overline{C}_{n-1,n-1}$ метрическим тензором был метрический тензор g_{ij} пространства $\overset{0}{C}_{n-1,n-1}$;
3) формы $\overline{\Omega}{}_b^a$ удовлетворяли соотношениям вида (2).

С учетом требований 1)–3) в качестве тензора Π_{ik}^j (в предположении, что задана невырожденная нормализация пространства $\overset{0}{C}_{n-1,n-1}$) можно взять охват $A_{ik}^j \overset{\text{def}}{=} a_0^{jt} A_{tik}^0 - g^{jt} g_{si} a_0^{sl} A_{ltk}^0$: $\Pi_{ik}^j = A_{ik}^j$; при этом соответствующие формы $\overline{\Omega}{}_b^a$ связности обозначим через $\overset{1}{\Omega}{}_b^a$, а само пространство конформной связности — через $\overset{1}{C}_{n-1,n-1}$.

Теорема 4. *Если полное оснащение гиперповерхности $V_{n-1} \subset C_n$ является невырожденным, то индуцируется второе пространство конформной связности $\overset{1}{C}_{n-1,n-1}$ (с кривизной и кручением), метрический тензор которого совпадает с метрическим тензором g_{ij} пространства $\overset{0}{C}_{n-1,n-1}$, формами связности его являются формы $\overset{1}{\Omega}{}_b^a$.*

6. Поле квазитензора x_i^0, определяющее нормализацию пространства конформной связности $\overset{0}{C}_{n-1,n-1}$, задает нормализацию и индуцированного пространства конформной связности

$\overset{1}{C}_{n-1,n-1}$; при этом поля основных тензоров a^0_{ik} и $\overset{1}{a}{}^0_{ik}$ нормализованных пространств $\overset{0}{C}_{n-1,n-1}$ и $\overset{1}{C}_{n-1,n-1}$ совпадают: $a^0_{ik} \equiv \overset{1}{a}{}^0_{ik}$.

Каждая из систем форм $\{\overset{0}{\theta}{}^j_0 = \overset{0}{\Omega}{}^j_0,\ \overset{0}{\theta}{}^j_i = \overset{0}{\Omega}{}^j_i - \delta^j_i(\overset{0}{\Omega}{}^0_0 - x^0_k\overset{0}{\Omega}{}^k_0) + g^{jl}x^0_l\overset{0}{\Omega}{}^{n+1}_i + x^0_i\overset{0}{\Omega}{}^j_0\}$, $\{\overset{1}{\theta}{}^j_0 = \overset{1}{\Omega}{}^j_0,$ $\overset{1}{\theta}{}^j_i = \overset{1}{\Omega}{}^j_i - \delta^j_i(\overset{1}{\Omega}{}^0_0 - x^0_k\overset{1}{\Omega}{}^k_0) + g^{jl}x^0_l\overset{1}{\Omega}{}^{n+1}_i + x^0_i\overset{1}{\Omega}{}^j_0\}$ удовлетворяет структурным уравнениям Картана–Лаптева [8], [9], следовательно, определяет пространства аффинной связности соответственно $\overset{0}{A}_{n-1,n-1}$ и $\overset{1}{A}_{n-1,n-1}$.

Теорема 5. *Невырожденное полное оснащение гиперповерхности $V_{n-1} \subset C_n$ определяет одновременную нормализацию пространств конформной связности $\overset{0}{C}_{n-1,n-1}$ и $\overset{1}{C}_{n-1,n-1}$ полем квазитензора x^0_i, при этом поля основных тензоров a^0_{ik} и $\overset{1}{a}{}^0_{ik}$ этих пространств совпадают; аффинные связности $\overset{0}{\nabla}$ и $\overset{1}{\nabla}$, индуцируемые при этом оснащении и определяемые системами форм соответственно $\{\overset{0}{\theta}{}^j_0, \overset{0}{\theta}{}^j_i\}$ и $\{\overset{1}{\theta}{}^j_0, \overset{1}{\theta}{}^j_i\}$, являются вейлевыми с полем метрического тензора g_{ik}, причем связность $\overset{0}{\nabla}$ без кручения, тензор кручения связности $\overset{1}{\nabla}$ совпадает с тензором кручения пространства $\overset{1}{C}_{n-1,n-1}$ и, вообще говоря, является ненулевым. Связность $\overset{0}{\nabla}$ риманова тогда и только тогда, когда нормализация пространства $\overset{0}{C}_{n-1,n-1}$ является гармонической.*

Замечание. Невырожденное полное оснащение гиперповерхности $V_{n-1} \subset C_n$ полями функций x^0_n и квазитензора x^0_i в общем случае индуцирует бесчисленное множество пространств конформной связности $\overset{p}{C}_{n-1,n-1}$ и аффинной связности $\overset{p}{A}_{n-1,n-1}$ $(p = 0, 1, 2, \dots)$, удовлетворяющих теоремам соответственно 4 и 5.

Литература

1. Акивис М.А. *Инвариантное построение геометрии гиперповерхности конформного пространства* // Матем. сб. – 1952. – Т. 31. – № 1. – С. 43–75.
2. Бушманова Г.В., Норден А.П. *Элементы конформной геометрии.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1972. – 178 с.
3. Акивис М.А. *К конформно-дифференциальной геометрии многомерных поверхностей* // Матем. сб. – 1961. – Т. 53. – № 1. – С. 53–72.
4. Akivis M.A., Goldberg V.V. *Conformal differential geometry and its generalizations.* – USA, 1996. – 384 p.
5. Столяров А.В. *Линейные связности на распределениях конформного пространства* // Изв. вузов. Математика. – 2001. – № 3. – С. 60–72.
6. Норден А.П. *Пространства аффинной связности.* – М.: Наука, 1976. – 432 с.
7. Столяров А.В. *Внутренняя геометрия нормализованного конформного пространства* // Изв. вузов. Математика. – 2002. – № 11. – С. 61–70.
8. Лаптев Г.Ф. *Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований* // Тр. Моск. матем. о-ва. – 1953. – № 2. – С. 275–382.
9. Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П. *Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях* // Итоги науки и техн. Проблемы геометрии. – М.: ВИНИТИ, 1979. – Т. 9. – 246 с.

Чувашский государственный
педагогический университет

Поступили
полный текст 27.01.2005
краткое сообщение 23.05.2005