ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 7 (458)

УДК 512.812 : 514.754

А.В. ВИННИК, С.Г. ЛЕЙКО

ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКИЕ ЭКСТРЕМАЛИ ПОВОРОТА НА ДВУМЕРНЫХ СВЯЗНЫХ ГРУППАХ ЛИ С ИНВАРИАНТНЫМИ РИМАНОВЫМИ МЕТРИКАМИ

На пространстве параметризованных кривых в двумерном римановом многообразии (M, g) определены два естественных функционала: функционал длины

$$l[\gamma] = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g(\dot\gamma, \dot\gamma)}\, dt,$$

где $\dot\gamma$ — касательный вектор параметризованной кривой γ, и функционал абсолютного поворота

$$\Theta[\gamma] = \int_{l_0}^{l_1} k_1(l) dl,$$

где l — длина дуги на кривой γ, $k_1(l)$ — первая кривизна кривой.

В [1], [2] было показано, что стационарные кривые изопериметрической вариационной задачи с фиксированными концами

$$\text{extremum } \Theta[\gamma], \quad \gamma(t_0) = p_0, \quad \gamma(t_1) = p_1, \quad l[\gamma] = \text{const} = \widehat{l},$$

либо удовлетворяют уравнению

$$K = \widehat{c}k, \tag{1}$$

где K — кривизна метрики g, $\widehat{c}$ — изопериметрическая постоянная, зависящая от $\widehat{l}$, либо являются геодезическими.

Кривые, удовлетворяющие уравнению (1), а также геодезические кривые названы изопериметрическими экстремалями поворота (ИЭП) [1]. Геодезические естественно назвать тривиальными ИЭП.

Для многообразия нулевой кривизны $K = 0$ всякая допустимая кривая является при $\widehat{c} = 0$ его ИЭП. Если $K \neq 0$, то (1) можно представить в виде

$$k = cK, \tag{1$'$}$$

где k вычисляется по формуле

$$k = \frac{(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)^{1/2}}{(g_{ij}\dot u^i \dot u^j)^{3/2}} [\dot u^1(\ddot u^2 + \Gamma^2_{ij}\dot u^i \dot u^j) - \dot u^2(\ddot u^1 + \Gamma^1_{ij}\dot u^i \dot u^j)],$$

и случаем $c = 0$ охватываются также тривиальные ИЭП. Тем самым изучение ИЭП содержательно при $K \neq 0$.

Известно [3], что если M^2 — связная двумерная группа Ли, то она изоморфна одной из следующих групп:

I (абелевы группы) 1) $\mathbb{R}^2$, 2) $T^1 \times \mathbb{R}$, 3) T^2;

II (не абелева группа) 4) $\operatorname{Aff}^0 \mathbb{R}^1$ — группа собственных аффинных преобразований прямой $x^1 = b^2 x + b^1$, $b^2 > 0$.

Здесь $T^1 = \{z \in C \mid z = e^{i\varphi}\}$, $T^2 = T^1 \times T^1$ — соответственно одномерный и двумерный торы.

В случае I групповые функции имеют вид $f^1(a,b) = a^1 + b^1$, $f^2(a,b) = a^2 + b^2$ и $e = (0,0)$ — единица группы. Отсюда получаем координатное представление дифференциала левого сдвига L_a:

$$\underset{*}{L}_a : L^i_j(a) = \left.\frac{\partial f^i(a,b)}{\partial b^j}\right|_{b=e} = \delta^i_j.$$

Компоненты левоинвариантной метрики ($\underset{*}{L}g = g$) вычисляются по формуле [4]

$$g_{ij}(a) = g_{pq}(e)V^p_i(a)V^q_j(a), \quad V^i_j L^j_k = \delta^i_k, \tag{2}$$

где $g_{pq}(e)$ (компоненты метрики в единице группы) могут выбираться произвольно. Возьмем их канонические значения $g_{pq}(e) = \delta_{pq}$ и в дальнейшем соответствующие римановы инвариантные метрики g на M^2 будем называть каноническими. Так как для случая I $V^i_j(a) = \delta^i_j$, то каноническая левоинвариантная риманова метрика имеет компоненты $g_{ij} = \delta_{ij}$.

Аналогично рассматриваются правые сдвиги $R_b : x \to xb$, и получается координатное представление дифференциала

$$\underset{*}{R}_b : R^i_j(b) = \left.\frac{\partial f^i(a,b)}{\partial a^j}\right|_{a=e} = \delta^i_j.$$

Компоненты правоинвариантной метрики ($\underset{*}{R}g = g$) вычисляются по формуле

$$g_{ij}(a) = g_{pq}(e)U^p_i(a)U^q_j(a), \quad U^i_j L^j_k = \delta^i_k. \tag{3}$$

В случае I $U^i_j(b) = \delta^i_j$ и для канонической правоинвариантной метрики получаем $g_{ij}(a) = \delta_{ij}$. Таким образом, существует биинвариантная каноническая метрика $g_{ij}(a) = \delta_{ij}$ и (M^2, g) с этой метрикой является римановым многообразием нулевой кривизны $K = 0$. Отметим, что M может быть гомеоморфно плоскости, цилиндру или тору (1), 2), 3) соответственно).

В случае II групповые функции имеют вид

$$f^1(a,b) = a^1 + a^2 b^1, \quad f^2(a,b) = a^2 b^2, \quad a^2, b^2 > 0.$$

Отсюда $e = (0,1)$, и

$$L^i_j(a) = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} = a^2\delta^h_i, \quad V^i_j(a) = \frac{1}{a^2}\delta^i_j,$$

$$R^i_j(b) = \begin{pmatrix} 1 & b^1 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}, \qquad U^i_j(b) = \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{b^1}{b^2} \\ 0 & \dfrac{1}{b^2} \end{pmatrix},$$

поэтому левоинвариантная каноническая метрика в соответствии с (2) имеет компоненты

$$g_{ij}(a) = \delta_{pq}\frac{1}{a^2}\delta^p_i\frac{1}{a^2}\delta^q_j = \frac{1}{(a^2)^2}\delta_{ij}.$$

Полученная метрика имеет постоянную кривизну $K = -1$, и риманово многообразие (M, g) может быть отождествлено с моделью Пуанкаре плоскости Лобачевского на верхней полуплоскости. Из $(1')$ вытекает, что в данном случае ИЭП — геодезические окружности плоскости Лобачевского. Известно [5], что последние в модели Пуанкаре состоят из двух семейств:

1. прямые $y = kx + b$, $k_1 = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$ или $x = x_0$, $k_1 = 0$;
2. окружности (или их части) $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$, $k_1 = y_0/r$.

В силу (3) в данном случае правоинвариантная метрика имеет компоненты

$$(g_{ij}(b)) = \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{b^1}{b^2} \\ -\dfrac{b^1}{b^2} & \dfrac{1+(b^1)^2}{(b^2)^2} \end{pmatrix}.$$

Эта метрика имеет также постоянную отрицательную кривизну $K = -1$. Как видно из вышеизложенного, на группе $\mathrm{Aff}^0\,\Re^1$ не существует биинвариантной канонической римановой метрики.

Отметим в заключение, что выбор не канонического значения $g_{ij}(e)$ приводит к инвариантным римановым метрикам, которые будут получаться из канонических инвариантных метрик аффинным преобразованием координат. Тем самым получено описание ИЭП с точностью до таких преобразований.

Литература

1. Лейко С.Г. *Вариационные задачи для функционалов поворота и спин-отображения псевдоримановых пространств* // Изв. вузов. Математика. – 1990. – № 10. – С. 9–17.
2. Лейко С.Г. *Изопериметрические экстремали поворота на поверхностях в евклидовом пространстве E^3* // Изв. вузов. Математика. – 1996. – № 6. – С. 25–31.
3. Винберг Э.Б., Горбацевич В.В., Онищик А.Л. *Строение групп и алгебр Ли* // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Современ. пробл. матем. – 1990. – Т. 41. – 254 с.
4. Шапуков Б.Н. *Задачи по группам Ли.* Учеб. пособие. – Изд-во. Казанск. ун-та, 1989. – 152 с.
5. Букреев Б.Я. *Планиметрия Лобачевского в аналитическом изложении.* – М.-Л.: ГИТЛ, 1951. – 127 с.

Одесский государственный университет (Украина)

Поступила 08.06.1998