И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

2000 МАТЕМАТИКА № 11 (462)

Посвящается Анатолию Дмитриевичу Ляшко — учителю и наставнику

УДК 519.6

Л.Л. ГЛАЗЫРИНА, М.Ф. ПАВЛОВА

ТЕОРЕМА О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ СОВМЕСТНОГО ДВИЖЕНИЯ РУСЛОВЫХ И ПОДЗЕМНЫХ ВОД

В работе исследуется вопрос единственности обобщенного решения задачи вида

$$\frac{\partial\varphi_1(u)}{\partial t}-\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}(a_i(x,u)k_i(x,\nabla u))=f_1,\quad x\in\Omega_\Pi=\Omega\setminus\Pi, \tag{1}$$

$$\frac{\partial\varphi_2(u)}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial s}\left(a_\Pi(x,u)k_\Pi\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)\right)+\left[\sum_{i=1}^{2}a_i(x,u)k_i(x,\nabla u)\cos(n,x_i)\right]_\Pi=f_2,\quad [u]_\Pi=0,\quad x\in\Pi, \tag{2}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\quad u|_\Gamma=g(x). \tag{3}$$

Здесь Ω — ограниченная область пространства R^2, Π — разрез внутри Ω, делящий ее на две связные области, Γ — граница Ω, $[\cdot]_\Pi$ — скачок функции при переходе через разрез Π, n — нормаль к Π, $\frac{\partial}{\partial s}$ — производная по направлению Π.

Уравнения (1), (2) возникают при моделировании процесса фильтрации подземных вод с учетом уровня воды в открытом русле (напр., [1]). В этом случае Ω — область, в которой происходит процесс фильтрации подземных вод, Π соответствует руслу реки (канала), u определяет высоту свободной поверхности жидкости относительно нулевого непроницаемого основания.

Для задачи (1)–(3) в [2] была доказана теорема существования обобщенного решения. Что касается единственности, то этот вопрос долгое время оставался открытым и для более частного случая, когда [1]

$$\varphi(\xi)=\xi\ \ \forall\xi\in R^1,\quad k_i(x,\xi)=\xi_i\ \ \forall\xi\in R^2.$$

Ситуация изменилась с появлением статьи [3], где была предложена новая методика доказательства единственности для вырождающихся уравнений. С использованием идеи этой статьи в данной работе устанавливается единственность обобщенного решения для случая, когда граничные условия стационарны.

1. Постановка задачи

Обобщенное решение задачи (1)–(3) определим, следуя [2]. При этом будем использовать следующие обозначения. Пусть V, $V(0,\mathrm{T})$, $W(0,T)$ — банаховы пространства функций, полученные замыканием $C^\infty(\Omega)$ и $C^\infty(0,T;C^\infty(\Omega))$ в следующих нормах:

$$\begin{aligned}\|u\|_V&=\|u\|_{W^1_{p_1}(\Omega)}+\|u\|_{W^1_{p_2}(\Pi)},\\ \|u\|_{V(0,T)}&=\|u\|_{L_{p_1}(0,T;W^1_{p_1}(\Omega))}+\|u\|_{L_{p_2}(0,T;W^1_{p_2}(\Pi))},\\ \|u\|_{W(0,T)}&=\|u\|_{V(0,T)}+\|u\|_{L_\infty(0,T;L_{\alpha_1}(\Omega))}+\|u\|_{L_\infty(0,T;L_{\alpha_2}(\Pi))}.\end{aligned}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 98-01-00260).

Соответственно $\overset{\circ}{V}$ ($\overset{\circ}{V}(0,\mathrm{T})$, $\overset{\circ}{W}(0,T)$) — замыкание функций, финитных в Ω (Q_T), в соответствующей норме. Такие пространства в литературе получили название усиленных соболевских пространств. Изучению пространств типа V в гильбертовом случае посвящена работа [4], в [5] исследуется общий случай, включающий пространства V и $V(0,T)$.

Введем далее функционал $J(z(t))$, значение которого при $t \in [0,T]$ на элементах $v \in \overset{\circ}{V}$ определим по правилу

$$\langle J(z(t)), v\rangle_* = \frac{d}{dt}\Big(\int_\Omega \varphi_1(z(t))v(x)dx + \int_\Pi \varphi_2(z(t))v(s)ds\Big);$$

здесь $z \in V(0,T)$.

Определение. Функцию $u(x,t) \in W(0,T)$ такую, что

$$u(x,t) - u^D(x) \in \overset{\circ}{W}(0,T), \quad u(x,0) = u_0(x) \quad \text{п. в. в } \Omega \text{ и в } \Pi,$$
$$\int_0^T \langle J(u), \cdot\rangle_* dt \in (\overset{\circ}{V}(0,T))^*,$$

назовем обобщенным решением задачи (1)–(3), если для любой функции $v \in \overset{\circ}{W}(0,T)$ справедливо интегральное тождество

$$\int_0^T \langle J(u), v\rangle_* dt + \int_0^T \int_\Omega \sum_{i=1}^2 a_i(x,u)k_i(x,\nabla u)\frac{\partial v}{\partial x_i}dx\,dt +$$
$$+ \int_0^T \int_\Pi a_\Pi(x,u)k_\Pi\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)\frac{\partial v}{\partial s}ds\,dt = \int_0^T \langle f_1, v\rangle dt + \int_0^T \langle f_2, v\rangle_\Pi dt. \quad (4)$$

Здесь u^D — продолжение функции g на Q_T, $\langle f,v\rangle$ ($\langle f,v\rangle_\Pi$) — значение функционала $f \in L_{p_1'}(0,T;W_{p_1'}^{-1}(\Omega))$ ($f \in L_{p_2'}(0,T;W_{p_2'}^{-1}(\Pi))$) на элементе v из $\overset{\circ}{W}(0,T)$.

В [2] доказано, что обобщенное решение задачи (1)–(3) существует при любых

$$f_1 \in L_{p_1'}(0,T;W_{p_1'}^{-1}(\Omega)), \quad f_2 \in L_{p_2'}(0,T;W_{p_2'}^{-1}(\Pi)),$$
$$u_0 \in L_{\alpha_1}(\Omega), \quad u_0 \in L_{\alpha_2}(\Pi),$$
$$u^D \in W(0,T), \quad \frac{\partial u^D}{\partial t} \in L_{\alpha_1}(Q_T), \quad \frac{\partial u^D}{\partial t} \in L_{\alpha_2}(\Pi_T),$$
$$u_0 - u^D(0) \in V \bigcap L_{\alpha_1}(\Omega).$$

При этом предполагается, что функции φ_i монотонно возрастающие, $\varphi_i(0) = 0$, удовлетворяющие при любом $\xi \in R^1$ неравенствам

$$b_{0i}|\xi|^{\alpha_i} - b_{1i} \le \Phi_i(\xi) = \int_0^\xi \varphi_i'(\tau)\tau d\tau \le b_{2i}|\xi|^{\alpha_i} + b_{3i}, \quad (5)$$
$$b_{0i} > 0, \ \ b_{1i} > 0, \ \ b_{2i} > 0, \ \ b_{3i} \ge 0, \ \ \alpha_i > 1,$$
$$|\varphi_i(\xi)| \le b_{4i}|\xi|^{\alpha_i - 1} + b_{5i}, \ \ b_{4i} > 0, \ \ b_{5i} > 0. \quad (6)$$

Условия на функции a_i, k_i, a_Π, k_Π таковы, что пространственные операторы

$$L : W_{p_1}^1(\Omega) \to W_{p_1'}^{-1}(\Omega), \quad L_\Pi : W_{p_2}^1(\Pi) \to W_{p_2'}^{-1}(\Pi),$$

определяемые следующим образом:

$$Lu = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}(a_i(x,u)k_i(x,\nabla u)), \quad L_\Pi u = -\frac{\partial}{\partial s}\Big(a_\Pi(x,u)k_\Pi\Big(\frac{\partial u}{\partial s}\Big)\Big),$$

являются непрерывными, ограниченными, коэрцитивными. Кроме того, предполагается, что при любых $x \in \Omega$, $\xi_0, \overline{\xi}_0 \in R^1$, $\xi, \xi^1, \xi^2 \in R^2$ выполнены соотношения

$$0 < \beta_{01} \le a_i(x,\xi_0) \le \beta_{11}, \quad 0 < \beta_{02} \le a_\Pi(x,\xi_0) \le \beta_{12},$$
$$\sum_{i=1}^{2} a_i(x,\xi_0)(k_i(x,\xi^1) - k_i(x,\xi^2))(\xi_i^1 - \xi_i^2) \ge 0,$$
$$(k_\Pi(\xi_0) - k_\Pi(\xi_1))(\xi_0 - \xi_1) \ge 0. \tag{7}$$

Заметим, что из этих условий, в частности, следует монотонность по градиенту операторов L и L_Π.

2. Вспомогательные результаты

Лемма 1. *Пусть функции φ_i строго возрастающие, $\varphi_i(0) = 0$, удовлетворяющие неравенствам (5), (6), η — дифференцируемая функция с неубывающей производной. Тогда для функционалов Φ_η^i, определенных по правилу*

$$\Phi_\eta^i(u,z,v) = \int_v^u \eta'(\xi - v){\varphi_i}'(\xi + z)d\xi \quad \forall u,z,v \in R^1 \quad (i = 1,2),$$

имеют место следующие неравенства:

$$\Phi_\eta^i(u,z,v) - \Phi_\eta^i(\widetilde{u},z,v) \ge \eta'(\widetilde{u} - v)(\varphi_i(u+z) - \varphi_i(\widetilde{u}+z)), \tag{8}$$
$$\Phi_\eta^i(u,z,v) - \Phi_\eta^i(\widetilde{u},z,v) \le \eta'(u - v)(\varphi_i(u+z) - \varphi_i(\widetilde{u}+z)). \tag{9}$$

Доказательство. Запишем два очевидных равенства

$$\Phi_\eta^i(u,z,v) - \Phi_\eta^i(\widetilde{u},z,v) = \int_{\widetilde{u}}^u \eta'(\xi - v){\varphi_i}'(\xi + z)d\xi,$$
$$\eta'(\widetilde{u} - v)(\varphi_i(u+z) - \varphi_i(\widetilde{u}+z)) = \int_{\widetilde{u}}^u \eta'(\widetilde{u} - v){\varphi_i}'(\xi + z)d\xi.$$

Вычтем из первого равенства второе. В результате получим

$$\Phi_\eta^i(u,z,v) - \Phi_\eta^i(\widetilde{u},z,v) - \eta'(\widetilde{u} - v)(\varphi_i(u+z) - \varphi_i(\widetilde{u}+z)) =$$
$$= \int_{\widetilde{u}}^u {\varphi_i}'(\xi + z)(\eta'(\xi - v) - \eta'(\widetilde{u} - v))d\xi, \quad i = 1,2.$$

Неотрицательность последнего интеграла следует из монотонности φ_i и условий на функцию η. Аналогично проверяется неравенство (9). □

Замечание. В случае, когда η' — невозрастающая функция, для функционалов Φ_η^i имеют место неравенства, противоположные (8), (9).

Лемма 2. *Пусть функции φ_i удовлетворяют условиям леммы 1, η определена формулой*

$$\eta(z) = \begin{cases} 0, & z \le 0; \\ z^2/2, & 0 \le z \le 1; \\ z - 1/2, & z \ge 1, \end{cases}$$

$\eta_\delta(z) = \delta\eta(\delta^{-1}z)$, $\overline{\eta}_\delta(z) = \delta\eta(-\delta^{-1}z)$. Тогда при $\delta \to 0$ имеют место предельные соотношения

$$\Phi_{\eta_\delta}^i(u,z,v) \to (\varphi_i(u+z) - \varphi_i(v+z))^+, \tag{10}$$
$$\Phi_{\overline{\eta}_\delta}^i(u,z,v) \to (\varphi_i(v+z) - \varphi_i(u+z))^+. \tag{11}$$

Здесь w^+ — положительная часть функции w.

Доказательство. Пусть $u\leq v$. Тогда по определению функционала $\Phi^i_{\eta_\delta}$ имеем $\Phi^i_{\eta_\delta}(u,z,v)=0$ $\forall z\in R^1$. С другой стороны, из монотонности функции φ_i следует, что $(\varphi_i(u+z)-\varphi_i(v+z))^+=0$. Поэтому (10) справедливо.

Рассмотрим случай, когда $u>v$. Пусть δ таково, что $v+\delta\leq u$. (Это условие, очевидно, не является ограничением, поскольку справедливость (10) устанавливается при $\delta\to 0$.) Имеем

$$\Phi^i_{\eta_\delta}(u,z,v)=\int_v^{v+\delta}\eta_\delta{}'(\xi-v)\varphi_i{}'(\xi+z)d\xi+\int_{v+\delta}^{u}\eta_\delta{}'(\xi-v)\varphi_i{}'(\xi+z)d\xi=$$
$$=\int_v^{v+\delta}\eta_\delta{}'(\xi-v)\varphi_i{}'(\xi+z)d\xi+\varphi_i(u+z)-\varphi_i(v+\delta+z)\to$$
$$\to(\varphi_i(u+z)-\varphi_i(v+z))\quad\text{при}\quad\delta\to 0.$$

Последнее утверждение следует из абсолютной непрерывности интеграла и непрерывности функции φ_i. Заметим также, что при $u>v$

$$\varphi_i(u+z)-\varphi_i(v+z)=(\varphi_i(u+z)-\varphi_i(v+z))^+.$$

Утверждение (10) доказано. Аналогично устанавливается справедливость (11). $\square$

Лемма 3. *Пусть u — обобщенное решение задачи* (1)–(3), $\overline{u}=u-u^D$, $\eta\in C^1(R^1)$, η' — *монотонная функция,* $|\eta''(\xi)|\leq k$, $\gamma(x,t)\in C_0^\infty((-\infty,T],R^2)$ — *знакопостоянная функция,* v — *произвольная функция из* $\overset{\circ}{V}\bigcap L_{\alpha_1}(\Omega)$. *Тогда имеет место равенство*

$$\int_0^T\langle J(u),\eta'(\overline{u}-v)\gamma\rangle_* dt=\int_0^T\int_\Omega(\Phi^1_\eta(\overline{u}_0,u^D,v)-\Phi^1_\eta(\overline{u},u^D,v))\frac{\partial\gamma}{\partial t}dx\,dt+$$
$$+\int_0^T\int_\Pi(\Phi^2_\eta(\overline{u}_0,u^D,v)-\Phi^2_\eta(\overline{u},u^D,v))\frac{\partial\gamma}{\partial t}ds\,dt.\quad(12)$$

Здесь $\overline{u}=u-u^D$.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда η' монотонно возрастающая. Обозначим

$$I=\int_0^T\int_\Omega\frac{\varphi_1(u(t))-\varphi_1(u(t-\tau))}{\tau}\eta'(\overline{u}(t)-v)\gamma\,dx\,dt+$$
$$+\int_0^T\int_\Pi\frac{\varphi_2(u(t))-\varphi_2(u(t-\tau))}{\tau}\eta'(\overline{u}(t)-v)\gamma\,ds\,dt.$$

Используя неравенство (9) при $u=\overline{u}$, $\tilde{u}=\overline{u}(t-\tau)$, $z=u^D$, нетрудно получить для I оценку вида

$$I\geq\frac{1}{\tau}\int_0^T\int_\Omega(\Phi^1_\eta(\overline{u}(t),u^D,v)-\Phi^1_\eta(\overline{u}(t-\tau)u^D,v))\gamma\,dx\,dt+$$
$$+\frac{1}{\tau}\int_0^T\int_\Pi(\Phi^2_\eta(\overline{u}(t),u^D,v)-\Phi^2_\eta(\overline{u}(t-\tau)u^D,v))\gamma\,ds\,dt.$$

Полагая $\overline{u}(t)=\overline{u}_0$ при $t\leq 0$, полученное неравенство преобразуем следующим образом:

$$I\geq-\int_0^T\int_\Omega\Phi^1_\eta(\overline{u},u^D,v)\frac{\gamma(t+\tau)-\gamma(t)}{\tau}dx\,dt-\int_0^T\int_\Pi\Phi^2_\eta(\overline{u},u^D,v)\frac{\gamma(t+\tau)-\gamma(t)}{\tau}ds\,dt+$$
$$+\int_\Omega\Phi^1_\eta(\overline{u},u^D,v)\left(\frac{1}{\tau}\int_0^\tau\gamma\,dt\right)dx+\int_\Pi\Phi^2_\eta(\overline{u}_0,u^D,v)\left(\frac{1}{\tau}\int_0^\tau\gamma\,dt\right)ds.\quad(13)$$

Далее докажем справедливость предельного соотношения

$$\int_0^T \left\{\int_\Omega \frac{\varphi_1(u(t))-\varphi_1(u(t-\tau))}{\tau} z\,dx + \int_0^T\int_\Pi \frac{\varphi_2(u(t))-\varphi_2(u(t-\tau))}{\tau} z\,ds\right\}dt \to$$

$$\to \int_0^T \langle J(u), z\rangle_* dt, \quad \tau\to 0 \ \ \forall z \in V(0,T). \quad (14)$$

Для его доказательства рассмотрим последовательность функционалов $\{G_\tau\}$, значение которых на элементе $z \in \overset{\circ}{V}(0,\mathrm{T})$ определено формулой

$$\langle\langle G_\tau(u), z\rangle\rangle = \int_0^T\int_\Omega \frac{\varphi_1(u(t))-\varphi_1(u(t-\tau))}{\tau} z(t)dx\,dt + \int_0^T\int_\Pi \frac{\varphi_2(u(t))-\varphi_2(u(t-\tau))}{\tau} z(t)dx\,dt.$$

Докажем, что

$$\|G_\tau\|_{(\overset{\circ}{V}(0,\mathrm{T}))^*} \le \mathrm{const}\,. \quad (15)$$

Поскольку $u(t)=u(0)\ \forall t\in[-\tau,0]$, то

$$|\langle\langle G_\tau(u), z\rangle\rangle| = \Bigg|\int_\tau^T\int_\Omega \frac{\varphi_1(u(t))-\varphi_1(u(t-\tau))}{\tau} z(t)dx\,dt +$$

$$+ \int_\tau^T\int_\Pi \frac{\varphi_2(u(t))-\varphi_2(u(t-\tau))}{\tau} z(t)dx\,dt\Bigg|.$$

Или

$$|\langle\langle G_\tau(u), z\rangle\rangle| = \Bigg|\frac{1}{\tau}\int_\tau^T\int_{t-\tau}^t \frac{\partial}{\partial\xi}\Big\{\int_\Omega \varphi_1(u(\xi))z(t)dx +$$

$$+ \int_\Pi \varphi_2(u(\xi))z(t)dx\Big\}d\xi\,dt\Bigg| = \Bigg|\frac{1}{\tau}\int_\tau^T\int_{t-\tau}^t \langle J(u(\xi)), z(t)\rangle_* d\xi\,dt\Bigg|.$$

Меняя порядок интегрирования, будем иметь

$$|\langle\langle G_\tau(u), z\rangle\rangle| = \Bigg|\frac{1}{\tau}\int_\tau^T\int_{\max(\xi,\tau)}^{\min(T,\xi+\tau)} \langle J(u(\xi)), z(t)\rangle_* dt d\xi\Bigg| =$$

$$= \Bigg|\int_0^T \langle J(u(\xi)), \frac{1}{\tau}\int_{\max(\xi,\tau)}^{\min(T,\xi+\tau)} z(t)dt\rangle_* d\xi\Bigg| \le \|J(u)\|_{(\overset{\circ}{V}(0,\mathrm{T}))^*}\Bigg\|\frac{1}{\tau}\int_{\max(\xi,\tau)}^{\min(T,\xi+\tau)} z(t)dt\Bigg\|_{V(0,T)}.$$

Нетрудно видеть, что

$$\Bigg\|\frac{1}{\tau}\int_{\max(\xi,\tau)}^{\min(T,\xi+\tau)} z(t)dt\Bigg\|_{V(0,T)} \le c\|z(t)\|_{V(0,T)}.$$

Таким образом, оценка (15) доказана. Следовательно, существует подпоследовательность $\{\tau'\}\subset\{\tau\}$ такая, что

$$G_{\tau'} \rightharpoonup G \quad \text{в} \quad (\overset{\circ}{V}(0,\mathrm{T}))^*. \quad (16)$$

Докажем, что

$$G = \int_0^T \langle J(u(t)), .\rangle_* dt. \quad (17)$$

Для этого запишем следующее легко проверяемое равенство:

$$\langle\langle G_\tau(u), z\rangle\rangle = -\int_0^T \int_\Omega \varphi_1(u(t)) z_t dx\, dt - \int_0^T \int_\Pi \varphi_2(u(t)) z_t dx\, dt + \\ + \frac{1}{\tau}\int_{T-\tau}^T \int_\Omega \varphi_1(u(t)) z(t+\tau) dx\, dt + \frac{1}{\tau}\int_{T-\tau}^T \int_\Pi \varphi_2(u(t)) z(t+\tau) dx\, dt - \\ - \frac{1}{\tau}\int_{-\tau}^0 \int_\Omega \varphi_1(u(t)) z(t+\tau) dx dt - \frac{1}{\tau}\int_{-\tau}^0 \int_\Pi \varphi_2(u(t)) z(t+\tau) dx\, dt. \quad (18)$$

Здесь z — произвольная функция из $C_0^\infty(Q_T)$. Заметим, что по определению функции z

$$\frac{1}{\tau}\int_{T-\tau}^T \int_{\Omega_i} \varphi_i(u(t)) z(t+\tau) dx\, dt = 0, \quad i = 1, 2. \quad (19)$$

Докажем, что при $\tau \to 0$

$$\frac{1}{\tau}\int_{-\tau}^0 \Big(\int_\Omega \varphi_1(u(t)) z(t+\tau) dx + \int_\Pi \varphi_2(u(t)) z(t+\tau) dx\Big) dt \longrightarrow 0. \quad (20)$$

Поскольку $u(t) = u(0)$ для любого $t \in [-\tau, 0]$, а z — гладкая функция, то

$$\Psi(t) = \int_\Omega \varphi_1(u(0)) z(t+\tau) dx + \int_\Pi \varphi_2(u(0)) z(t+\tau) dx$$

непрерывна по t, следовательно, (20) имеет место.

Далее, в равенстве (18), учитывая соотношения (16), (19), (20), перейдем к пределу при $\tau \to 0$, В результате получим

$$\langle\langle G, z\rangle\rangle = -\int_0^T \Big(\int_\Omega \varphi_1(u)\frac{\partial z}{\partial t} dx + \int_\Pi \varphi_2(u)\frac{\partial z}{\partial t} dx\Big) dt.$$

Из последнего равенства следует (17), а следовательно, и (14).

Далее, учитывая (14), в неравенстве (13) перейдем к пределу при $\tau \to 0$. В результате будем иметь

$$\int_0^T \langle J(u), \eta'(\overline{u} - v)\gamma\rangle_* dt \geq -\int_0^T \Big\{\int_\Omega \Phi_\eta^1(\overline{u}, u^D, v)\frac{\partial \gamma}{\partial t} dx + \int_\Pi \Phi_\eta^2(\overline{u}, u^D, v)\frac{\partial \gamma}{\partial t} ds\Big\} dt + \\ + \int_\Omega \Phi_\eta^1(\overline{u}_0, u^D, v)\gamma(x, 0) dx + \int_\Pi \Phi_\eta^2(\overline{u}_0, u^D, v)\gamma(s, 0) ds. \quad (21)$$

Для получения обратного (21) неравенства рассмотрим выражение

$$I_1 = \int_0^T \int_\Omega \frac{\varphi_1(u(t+\tau)) - \varphi_1(u(t))}{\tau}\eta'(\overline{u}(t) - v)\gamma\, dx\, dt + \\ + \int_0^T \int_\Pi \frac{\varphi_2(u(t+\tau)) - \varphi_2(u(t))}{\tau}\eta'(\overline{u}(t) - v)\gamma\, ds\, dt.$$

Оценим I_1 с помощью неравенства (8), полагая при этом $\widetilde{u} = \overline{u}(t)$, $u = \overline{u}(t+\tau)$. Остальная часть доказательства повторяет предыдущий случай. В случае, когда η' монотонно убывающая, рассуждения аналогичные. □

Лемма 4. *Пусть u — обобщенное решение задачи (1)–(3), тогда при любых функциях $z \in \mathring{V} \bigcap L_{\alpha_1}$, η, γ, удовлетворяющих условиям леммы 3, имеет место равенство*

$$\int_0^T \int_\Omega (\Phi_\eta^1(\overline{u}_0, u^D, z) - \Phi_\eta^1(\overline{u}, u^D, z))\frac{\partial \gamma}{\partial t} dx\, dt +$$
$$+ \int_0^T \int_\Pi (\Phi_\eta^2(\overline{u}_0, u^D, z) - \Phi_\eta^2(\overline{u}, u^D, z))\frac{\partial \gamma}{\partial t} ds\, dt +$$
$$+ \int_0^T \int_\Omega \sum_{i=1}^2 a_i(x,u)k_i(x,\nabla u)\frac{\partial}{\partial x_i}(\eta'(\overline{u}-z)\gamma)dx\, dt +$$
$$+ \int_0^T \int_\Pi a_\Pi(x,u)k_\Pi\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)\frac{\partial}{\partial s}(\eta'(\overline{u}-z)\gamma)ds\, dt =$$
$$= \int_0^T \langle f_1, \eta'(\overline{u}-z)\gamma\rangle dt + \int_0^T \langle f_2, \eta'(\overline{u}-z)\gamma\rangle_\Pi dt. \quad (22)$$

Доказательство. Из условий леммы следует, что функция $\eta'(\overline{u}-z)\gamma(x,t) \in \mathring{W}(0,T)$. Поэтому в равенстве (4) выберем $v = \eta'(\overline{u}-z)\gamma(x,t)$ и воспользуемся утверждением леммы 3. В результате получим (22). □

Лемма 5. *Пусть u — обобщенное решение задачи (1)–(3), v — гладкая неотрицательная функция. Тогда при $\varepsilon \to 0$ справедливы предельные соотношения*

$$\sum_{i=1}^2 \int_0^{t'} \int_{\Omega_i} (\varphi_i(u(\varepsilon t)) - \varphi_i(u_0))^+ v\, dx\, dt \to 0,$$
$$\sum_{i=1}^2 \int_0^{t'} \int_{\Omega_i} (\varphi_i(u_0) - \varphi_i(u(\varepsilon t)))^+ v\, dx\, dt \to 0 \quad \forall t \in [0,T].$$

Здесь $\Omega_1 = \Omega$, $\Omega_2 = \Pi$.

Доказательство. Рассмотрим сумму интегралов

$$I = \sum_{i=1}^2 \int_0^{t'} \int_{\Omega_i} \Phi_{\eta_\delta}^i(\overline{u}(\varepsilon t), u^D, \overline{u}_0) v\, dx\, dt, \quad t' \in [0,T];$$

здесь $\overline{u} = u - u^D$, η_δ имеет тот же вид, что и в лемме 2. Используя вид функционалов $\Phi_{\eta_\delta}^i$, запишем I в виде

$$I = \sum_{i=1}^2 \left\{ \int_0^{t'} \int_{\Omega_i^+} \int_{\overline{u}_0}^{\overline{u}(\varepsilon t)} {\eta_\delta}'(\xi - \overline{u}_0){\varphi_i}'(\xi + u^D) v\, d\xi\, dx\, dt + \right.$$
$$+ \int_0^{t'} \int_{\Omega_i^-} \int_{\overline{u}_0}^{\overline{u}(\varepsilon t)} {\eta_\delta}'(\xi - \overline{u}_0){\varphi_i}'(\xi + u^D) v\, d\xi\, dx\, dt +$$
$$\left. + \int_0^{t'} \int_{\Omega_i^\delta} \int_{\overline{u}_0}^{\overline{u}(\varepsilon t)} {\eta_\delta}'(\xi - \overline{u}_0){\varphi_i}'(\xi + u^D) v\, d\xi\, dx\, dt \right\} \equiv \sum_{i=1}^2 (I_{1,i} + I_{2,i} + I_{3,i}), \quad (23)$$

где

$$\Omega_i^+ = \{x \in \Omega_i \mid \overline{u}(x,\varepsilon t) - \overline{u}_0(x) \geq \delta > 0\},$$
$$\Omega_i^- = \{x \in \Omega_i \mid \overline{u}(x,\varepsilon t) - \overline{u}_0(x) < 0\},$$
$$\Omega_i^\delta = \{x \in \Omega_i \mid 0 < \overline{u}(x,\varepsilon t) - \overline{u}_0(x) \leq \delta\}.$$

Ясно, что $\Omega_i = \Omega_i^+ \bigcap \Omega_i^- \bigcap \Omega_i^\delta$. Из определения функции η_δ и областей Ω_i^-, Ω_i^+ следует

$$I_{1,i} = \int_0^{t'} \int_{\Omega_i^+} (\varphi_i(u(\varepsilon t)) - \varphi_i(u_0))^+ v \, dx \, dt,$$
$$I_{2,i} = \int_0^{t'} \int_{\Omega_i^-} (\varphi_i(u(\varepsilon t)) - \varphi_i(u_0))^+ v \, dx \, dt.$$

Поэтому (23) можно записать в виде

$$I = \sum_{i=1}^{2} \left\{ \int_0^{t'} \int_{\Omega_i} (\varphi_i(u(\varepsilon t)) - \varphi_i(u_0))^+ v \, dx \, dt + \right.$$
$$\left. + \int_0^{t'} \int_{\Omega_i^\delta} \int_{\overline{u}_0}^{\overline{u}(\varepsilon t)} ({\eta_\delta}'(\xi - \overline{u}_0) - 1){\varphi_i}'(\xi + u^D) v \, d\xi \, dx \, dt \right\}$$

или

$$\sum_{i=1}^{2} \int_0^{t'} \int_{\Omega_i} ((\varphi_i u(\varepsilon t)) - \varphi_i(u_0))^+ v \, dx \, dt = \sum_{i=1}^{2} \int_0^{t'} \int_{\Omega_i} \Phi_{\eta_\delta}^i(\overline{u}(\varepsilon t), u^D, \overline{u}_0) v \, dx \, dt +$$
$$+ \sum_{i=1}^{2} \int_0^{t'} \int_{\Omega_i^\delta} \int_{\overline{u}_0}^{\overline{u}(\varepsilon t)} (1 - {\eta_\delta}'(\xi - \overline{u}_0)){\varphi_i}'(\xi + u^D) v \, d\xi \, dx \, dt \equiv J_1 + J_2.$$

Покажем, что каждое J_i может быть сделано сколь угодно малым за счет выбора параметров ε и δ. Заметим, что из определения области Ω_i^δ, монотонности функций φ_i и неравенства $0 \le {\eta_\delta}' \le 1$ следует

$$0 \le J_2 \le \sum_{i=1}^{2} \int_0^{t'} \int_{\Omega_i^\delta} \left(\int_{\overline{u}_0}^{\overline{u}_0 + \delta} {\varphi_i}'(\xi + u^D) d\xi \right) v \, dx \, dt = \sum_{i=1}^{2} \int_0^{t'} \int_{\Omega_i^\delta} (\varphi_i(u_0 + \delta) - \varphi_i(u_0))^+ v \, dx \, dt \le$$
$$\le \sum_{i=1}^{2} \int_0^{t'} \int_{\Omega_i} (\varphi_i(u_0 + \delta) - \varphi_i(u_0))^+ v \, dx \, dt.$$

Поскольку функции φ_i непрерывны, то J_2 может быть сделан сколь угодно малым за счет выбора δ.

Для оценки J_1 запишем равенство (12) при $v = \overline{u}_0$, $\eta = \eta_\delta$, $\gamma(x,t) = v(x)w(t)$, где $v \in C^\infty(R^2)$ и неотрицательна, $w \in C_0^\infty(-\infty, t')$:

$$\int_0^{t'} \langle J(u), {\eta_\delta}'(\overline{u} - \overline{u}_0) v \rangle_* w \, dt = - \sum_{i=1}^{2} \int_0^{t'} \int_{\Omega_i} \Phi_{\eta_\delta}^i(\overline{u}, u^D, \overline{u}_0) v \frac{dw}{dt} dx \, dt. \tag{24}$$

Очевидно, это равенство будет иметь место и для любой функции $w \in W_\infty^1(0, t')$ такой, что $w(t') = 0$. Положим в (24)

$$w(t) = \begin{cases} t' - t, & 0 < t < t'; \\ 0, & t \ge t', \end{cases}$$

а $t' = \varepsilon t^*$. В результате, учитывая, что $w' = -1 \; \forall t \in (0, \varepsilon t^*)$, будем иметь

$$\sum_{i=1}^{2} \int_0^{\varepsilon t^*} \int_{\Omega_i} \Phi_{\eta_\delta}^i(\overline{u}, u^D, \overline{u}_0) v \, dx \, dt = \int_0^{\varepsilon t^*} \langle J(u), {\eta_\delta}'(\overline{u} - \overline{u}_0) v \rangle_* w \, dt \equiv \widetilde{I}. \tag{25}$$

Используя оценку $|w(t)| \le \varepsilon \; \forall t \in (0, \varepsilon t^*)$, оценим правую часть неравенства (25):

$$|\widetilde{I}| \le \varepsilon \int_0^{\varepsilon t^*} \int_{\Omega_i} |\langle J(u), {\eta_\delta}'(\overline{u} - \overline{u}_0) v \rangle_*| dt.$$

Заметим, что

$$|\langle J(u), \eta_\delta{}'(\overline{u}-\overline{u}_0)v\rangle_*| \leq \|J(u(t))\|_{V^*}\|\eta_\delta{}'(\overline{u}-\overline{u}_0)v\|_V,$$

$$\|\eta_\delta{}'(\overline{u}-\overline{u}_0)v\|_V \leq c/\delta\Big\{\max_{x\in\Omega}\Big\{|v(x)|, \Big|\frac{\partial v}{\partial x_1}\Big|, \Big|\frac{\partial v}{\partial x_2}\Big|, \Big|\frac{\partial v}{\partial s}\Big|\Big\}(\|\overline{u}\|_V + \|\overline{u}_0\|_V)\Big\}.$$

Поэтому

$$|\widetilde{I}| \leq \frac{\varepsilon}{\delta}\int_0^{\varepsilon t^*}\Big\{\max_{x\in\Omega}\Big\{|v(x)|, \Big|\frac{\partial v}{\partial x_1}\Big|, \Big|\frac{\partial v}{\partial x_2}\Big|, \Big|\frac{\partial v}{\partial s}\Big|\Big\}(\|\overline{u}\|_V + \|\overline{u}_0\|_V)\Big\}dt.$$

Поскольку в последнем неравенстве выражение, стоящее в фигурных скобках, является функцией из $L_1(0,T)$, то для $\widetilde{I}$ справедлива оценка

$$|\widetilde{I}| \leq \frac{\varepsilon}{\delta}\nu(\varepsilon),$$

причем $\nu(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Таким образом, из (25) будем иметь

$$\frac{1}{\varepsilon}\sum_{i=1}^{2}\int_0^{\varepsilon t^*}\int_{\Omega_i}\Phi^i_{\eta_\delta}(\overline{u}, u^D, \overline{u}_0)v\,dx\,dt \leq \frac{\nu(\varepsilon)}{\delta}.$$

Левая часть полученного неравенства, очевидно, совпадает с J_1, а правая часть стремится к нулю, если выбрать, например, $\delta = \sqrt{\nu(\varepsilon)}$. $\square$

3. Теорема единственности

Теорема. *Пусть функции φ_i, a_i, k_i, a_Π, k_Π удовлетворяют перечисленным выше условиям, кроме того, для любых $\xi_1, \xi_2 \in R^1$ имеют место неравенства*

$$\begin{aligned} |a_i(x,\xi_1) - a_i(x,\xi_2)| &\leq \mu_1|\xi_1 - \xi_2|, \\ |a_\Pi(x,\xi_1) - a_\Pi(x,\xi_2)| &\leq \mu_2|\xi_1 - \xi_2|. \end{aligned} \tag{26}$$

Тогда при любых $f_1 \in L_1(Q_T)$, $f_2 \in L_1(\Pi_T)$, $u_0 \in V\bigcap L_{\alpha_1}(\Omega)$, $u^D \in V\bigcap L_{\alpha_1}(\Omega)$ обобщенное решение задачи (1)–(3) *из пространства $W(0,T)$ определяется единственным образом.*

Доказательство. Предположим, что существуют два обобщенных решения u_1, u_2. Очевидно, для каждого из них справедливо равенство (22). Пусть $\widetilde{\gamma}(t_1,t_2)$ — произвольная неотрицательная функция из $C_0^\infty((-\infty,T]^2)$. Запишем (22) для $u_1(x,t_1)$, полагая $\gamma(x,t_1) = \widetilde{\gamma}(t_1,t_2)$, $\eta(\xi) = \eta_\delta(\xi)$, $z = \overline{u}_2(x,t_2)$. Полученное равенство проинтегрируем по параметру t_2. По аналогии запишем (22) для $u_2(x,t_2)$, выбирая $\gamma(x,t_2) = \widetilde{\gamma}(t_1,t_2)$, $\eta(\xi) = \overline{\eta}_\delta(\xi)$, $z = \overline{u}_1(x,t_1)$, и проинтегрируем по переменной t_1. Складывая полученные равенства и учитывая, что $\overline{\eta}_\delta{}'(\xi) = -\eta_\delta{}'(\xi)$, нетрудно получить

$$\int_0^T\int_0^T\int_\Omega(\Phi^1_{\eta_\delta}(\overline{u}_0, u^D, \overline{u}_2(t_2)) - \Phi^1_{\eta_\delta}(\overline{u}_1(t_1), u^D, \overline{u}_2(t_2)))\frac{\partial\widetilde{\gamma}}{\partial t_1}dx\,dt_1\,dt_2 +$$
$$+\int_0^T\int_0^T\int_\Omega(\Phi^1_{\overline{\eta}_\delta}(\overline{u}_0, u^D, \overline{u}_1(t_1)) - \Phi^1_{\overline{\eta}_\delta}(\overline{u}_2(t_2), u^D, \overline{u}_1(t_1)))\frac{\partial\widetilde{\gamma}}{\partial t_2}dx\,dt_1\,dt_2 +$$
$$+\int_0^T\int_0^T\int_\Pi(\Phi^2_{\eta_\delta}(\overline{u}_0, u^D, \overline{u}_2(t_2)) - \Phi^2_{\eta_\delta}(\overline{u}_1(t_1), u^D, \overline{u}_2(t_2)))\frac{\partial\widetilde{\gamma}}{\partial t_1}ds\,dt_1\,dt_2 +$$
$$+\int_0^T\int_0^T\int_\Pi(\Phi^2_{\overline{\eta}_\delta}(\overline{u}_0, u^D, \overline{u}_1(t_1)) - \Phi^2_{\overline{\eta}_\delta}(\overline{u}_2(t_2), u^D, \overline{u}_1(t_1)))\frac{\partial\widetilde{\gamma}}{\partial t_2}ds\,dt_1\,dt_2 +$$
$$+\int_0^T\int_0^T\int_\Omega\sum_{i=1}^{2}(a_i(x,u_1(t_1))k_i(x,\nabla u_1(t_1)) -$$
$$-\,a_i(x,u_2(t_2))k_i(x,\nabla u_2(t_2)))\frac{\partial}{\partial x_i}(\eta_\delta{}'(u_1(t_1) - u_2(t_2)))\widetilde{\gamma}\,dx\,dt_1\,dt_2 +$$

$$+\int_0^T\int_0^T\int_\Pi\biggl(a_\Pi(x,u_1(t_1))k_\Pi\Bigl(\frac{\partial u_1(t_1)}{\partial s}\Bigr)-$$
$$-a_\Pi(x,u_2(t_2))k_\Pi\Bigl(\frac{\partial u_2(t_2)}{\partial s}\Bigr)\biggr)\frac{\partial}{\partial s}(\eta_\delta{}'(u_1(t_1)-u_2(t_2)))\widetilde{\gamma}\,ds\,dt_1\,dt_2=$$
$$=\int_0^T\int_0^T\langle f_1(t_1)-f_1(t_2),\eta_\delta{}'(u_1(t_1)-u_2(t_2))\rangle\widetilde{\gamma}\,dt_1\,dt_2+$$
$$+\int_0^T\int_0^T\langle f_2(t_1)-f_2(t_2),\eta_\delta{}'(u_1(t_1)-u_2(t_2))\rangle_\Pi\widetilde{\gamma}\,dt_1\,dt_2. \quad (27)$$

Дальнейшее доказательство теоремы состоит из двух этапов. На первом этапе в равенстве (27) совершаем предельный переход при $\delta\to 0$. При обосновании предельного перехода в слагаемых, содержащих функционалы $\Phi^i_{\eta_\delta}$ или $\Phi^i_{\overline{\eta}_\delta}$, воспользуемся леммой 2 и теоремой Лебега о предельном переходе под знаком интеграла. В результате, например, получим

$$\int_0^T\int_0^T\int_{\Omega_i}\Phi^i_{\eta_\delta}(\overline{u}_0,u^D,\overline{u}_k(t_k))\frac{\partial\widetilde{\gamma}}{\partial t_{3-k}}dx\,dt_1\,dt_2\to\int_0^T\int_0^T\int_{\Omega_i}(\varphi_i(u_0)-\varphi_i(u_k(t_k)))^+\frac{\partial\widetilde{\gamma}}{\partial t_{3-k}}dx\,dt_1\,dt_2,$$
$$\int_0^T\int_0^T\int_{\Omega_i}\Phi^i_{\overline{\eta}_\delta}(\overline{u}_0,u^D,\overline{u}_k(t_k))\frac{\partial\widetilde{\gamma}}{\partial t_{3-k}}dx\,dt_1\,dt_2\to\int_0^T\int_0^T\int_{\Omega_i}(\varphi_i(u_k(t_k))-\varphi_i(u_0))^+\frac{\partial\widetilde{\gamma}}{\partial t_{3-k}}dx\,dt_1\,dt_2,$$
$k=1,2.$

Рассмотрим далее слагаемые, содержащие пространственные операторы. Имеем

$$I=\int_\Omega\sum_{i=1}^2(a_i(x,u_1(t_1))k_i(x,\nabla u_1(t_1))-$$
$$-a_i(x,u_2(t_2))k_i(x,\nabla u_2(t_2)))\frac{\partial}{\partial x_i}\eta_\delta{}'(u_1(t_1)-u_2(t_2))dx=$$
$$=\int_\Omega\sum_{i=1}^2 a_i(x,u_1(t_1))(k_i(x,\nabla u_1(t_1))-$$
$$-k_i(x,\nabla u_2(t_2)))\frac{\partial}{\partial x_i}(u_1(t_1)-u_2(t_2))\eta_\delta{}''(u_1-u_2)dx+$$
$$+\int_\Omega\sum_{i=1}^2(a_i(x,u_1(t_1))-a_i(x,u_2(t_2)))k_i(x,\nabla u_2(t_2))\frac{\partial}{\partial x_i}(u_1(t_1)-$$
$$-u_2(t_2))\eta_\delta{}''(u_1-u_2)dx=I_1+I_2.$$

Из (7) и неотрицательности $\eta_\delta{}''$ следует, что $I_1\geq 0$. Тогда для I имеет место неравенство

$$I\geq-|I_2|.$$

Далее, используя (26) и условия на рост функций k_i, получим

$$|I_2|\leq c\mu\int_\Omega\sum_{i=1}^2|u_1(t_1)-u_2(t_2)|\eta_\delta{}''(u_1(t_1)-u_2(t_2))\biggl(1+$$
$$+\sum_{i=1}^2\left|\frac{\partial u_2(t_2)}{\partial x_i}\right|^{p_1-1}\biggr)\left|\frac{\partial}{\partial x_i}(u_1(t_1)-u_2(t_2))\right|dx. \quad (28)$$

Нетрудно видеть, что

$$|z|\eta_\delta{}''(z)=\frac{|z|}{\delta}\eta''\Bigl(\frac{z}{\delta}\Bigr),\quad |z|\eta_\delta{}''(z)\leq 1\ \ \forall z\in R^1.$$

Поэтому подинтегральная функция в правой части неравенства (28) имеет мажоранту из $L_1(\Omega)$. Кроме того, при $\delta \to 0$

$$\frac{z}{\delta}\eta''\left(\frac{z}{\delta}\right) \to 0 \quad \text{п. в. в} \quad R^1.$$

Тогда по теореме Лебега о предельном переходе будем иметь

$$\lim_{\delta\to 0} I_2 = 0.$$

При обосновании предельного перехода в правой части равенства (27) следует учесть, что при $\delta \to 0$

$$\eta'_\delta(\xi) \to H(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi > 0; \\ 0, & \xi \le 0 \end{cases} \quad \forall \xi \in R^1.$$

В результате предельного перехода по δ в (27) получаем неравенство вида

$$-\sum_{i=1}^{2}\int_0^T\int_{\Omega_i}(\varphi_i(u_0)-\varphi_i(u_2(t_2)))^+\widetilde{\gamma}(0,t_2)dx\,dt_2 -$$
$$-\sum_{i=1}^{2}\int_0^T\int_{\Omega_i}(\varphi_i(u_0)-\varphi_i(u_1(t_1)))^+\widetilde{\gamma}(t_1,0)dx\,dt_1 -$$
$$-\sum_{i=1}^{2}\int_0^T\int_0^T\int_{\Omega_i}(\varphi_i(u_1(t_1))-\varphi_i(u_2(t_2)))^+\left(\frac{\partial\widetilde{\gamma}}{\partial t_1}+\frac{\partial\widetilde{\gamma}}{\partial t_2}\right)dx\,dt_1\,dt_2 \le$$
$$\le \sum_{i=1}^{2}\int_0^T\int_0^T\int_{\Omega_i}(f_i(t_1)-f_i(t_2))H(u_1-u_2)\widetilde{\gamma}\,dx\,dt_1\,dt_2. \quad (29)$$

Далее, пусть γ, q — неотрицательные функции такие, что $\gamma \in C_0^\infty(-\infty, T/2)$, $q \in C_0^\infty(R^1)$, $q(-\xi) = q(\xi)$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} q(\xi)d\xi = 1$. В неравенстве (29) выберем

$$\widetilde{\gamma}(t_1,t_2) = \frac{1}{\varepsilon}q\left(\frac{t_1-t_2}{\varepsilon}\right)\gamma\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right),$$

введем новые переменные

$$t = t_1, \quad \tau = \frac{t_1-t_2}{\varepsilon}.$$

В результате, учитывая

$$\frac{\partial\widetilde{\gamma}}{\partial t_1}+\frac{\partial\widetilde{\gamma}}{\partial t_2} = \frac{1}{\varepsilon}q\left(\frac{t_1-t_2}{\varepsilon}\right)\frac{d\gamma(\xi)}{d\xi}\bigg|_{\xi=\frac{t_1+t_2}{2}},$$

будем иметь

$$-\sum_{i=1}^{3} I_i \equiv -\sum_{i=1}^{2}\int_0^{T/\varepsilon}\int_{\Omega_i}(\varphi_i(u_0)-\varphi_i(u_2(\varepsilon\tau)))^+q(\tau)\gamma\left(\frac{\varepsilon\tau}{2}\right)dx\,d\tau -$$
$$-\sum_{i=1}^{2}\int_0^{T/\varepsilon}\int_{\Omega_i}(\varphi_i(u_0)-\varphi_i(u_1(\varepsilon\tau)))^+q(\tau)\gamma\left(\frac{\varepsilon\tau}{2}\right)dx\,d\tau -$$
$$-\sum_{i=1}^{2}\int_{-T/\varepsilon}^{T/\varepsilon}\int_{\max(0,\varepsilon\tau)}^{\min(T,T+\varepsilon\tau)}\int_{\Omega_i}(\varphi_i(u_1(t))-\varphi_i(u_2(t-\varepsilon\tau)))^+q(\tau)\gamma'\left(t-\frac{\varepsilon\tau}{2}\right)dx\,dt\,d\tau \le$$
$$\le \sum_{i=1}^{2}\int_{-T/\varepsilon}^{T/\varepsilon}\int_{\max(0,\varepsilon\tau)}^{\min(T,T+\varepsilon\tau)}\int_{\Omega_i}H(u_1(t)-u_2(t-\varepsilon\tau))(f_i(t)-f_i(t-\varepsilon\tau))q(\tau)\gamma\left(t-\frac{\varepsilon\tau}{2}\right)dx\,dt\,d\tau. \quad (30)$$

Следующий этап доказательства — предельный переход по параметру ε в неравенстве (30). Докажем, что

$$I_1 \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0.$$

Для этого представим I_1 в виде следующей суммы:

$$I_1 = \sum_{i=1}^{2} \int_0^M q(\tau) \int_{\Omega_i} (\varphi_i(u_0) - \varphi_i(u_2(\varepsilon\tau)))^+ \gamma\left(\frac{\varepsilon\tau}{2}\right) dx\, d\tau +$$
$$+ \sum_{i=1}^{2} \int_M^{T/\varepsilon} q(\tau) \int_{\Omega_i} (\varphi_i(u_0) - \varphi_i(u_2(\varepsilon\tau)))^+ \gamma\left(\frac{\varepsilon\tau}{2}\right) dx\, d\tau \equiv I_{1,1} + I_{1,2}.$$

Покажем, что каждое $I_{1,i}$ может быть сделано сколь угодно малым за счет выбора M и ε. Учитывая, что $(\varphi_i(u_0) - \varphi_i(u_2(\varepsilon\tau)))^+$ принадлежит $L_\infty(0, T/\varepsilon; L_{\alpha_i}(\Omega_i))$, для $I_{1,2}$ получим оценку

$$I_{1,2} \le c \int_M^{T/\varepsilon} q(\tau) d\tau. \tag{31}$$

Выберем M так, что правая часть (31) была не больше наперед заданной малой величины ρ. Рассмотрим $I_{1,1}$. Имеем

$$I_{1,1} = \sum_{i=1}^{2} \int_0^M q(\tau) \int_{\Omega_i} (\varphi_i(u_0) - \varphi_i(u_2(\varepsilon\tau)))^+ \left(\gamma\left(\frac{\varepsilon\tau}{2}\right) - \gamma(0)\right) dx\, d\tau +$$
$$+ \sum_{i=1}^{2} \int_0^M q(\tau) \int_{\Omega_i} (\varphi_i(u_0) - \varphi_i(u_2(\varepsilon\tau)))^+ \gamma(0) dx\, d\tau.$$

Используя непрерывность функций γ, q и лемму 5, нетрудно доказать, что существует малое ε_0 такое, что

$$I_{1,1} \le \rho \ \ \forall \varepsilon \le \varepsilon_0.$$

Из сказанного выше следует, что и $I_1 \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Аналогичный результат имеет место для I_2.

Докажем далее, что

$$I_3 \to \sum_{i=1}^{2} \int_0^T \int_{\Omega_i} (\varphi_i(u_1) - \varphi_i(u_2))^+ \frac{d\gamma(t)}{dt} dx\, dt\, d\tau \equiv I_4.$$

Заметим, что

$$I_4 = \sum_{i=1}^{2} \int_{-\infty}^{\infty} q(\tau) \int_0^T \int_{\Omega_i} (\varphi_i(u_1) - \varphi_i(u_2))^+ \frac{d\gamma(t)}{dt} dx\, dt\, d\tau.$$

Рассмотрим разность $I_3 - I_4$. Имеем

$$I_3 - I_4 = -\sum_{i=1}^{2} \int_{-\infty}^{\mathrm{M}} q(\tau) \int_0^T \int_{\Omega_i} (\varphi_i(u_1(t)) - \varphi_i(u_2(t)))^+ \frac{d\gamma}{dt} dx\, dt\, d\tau -$$
$$- \sum_{i=1}^{2} \int_M^{\infty} q(\tau) \int_0^T \int_{\Omega_i} (\varphi_i(u_1(t)) - \varphi_i(u_2(t)))^+ \frac{d\gamma}{dt} dx\, dt\, d\tau +$$
$$+ \sum_{i=1}^{2} \int_{-T/\varepsilon}^{-\mathrm{M}} q(\tau) \int_{\max(0,\varepsilon\tau)}^{\min(T, T+\varepsilon\tau)} \int_{\Omega_i} (\varphi_i(u_1(t)) - \varphi_i(u_2(t-\varepsilon\tau)))^+ \frac{d}{dt}\gamma\left(t - \frac{\varepsilon\tau}{2}\right) dx\, dt\, d\tau +$$
$$+ \sum_{i=1}^{2} \int_M^{T/\varepsilon} q(\tau) \int_{\max(0,\varepsilon\tau)}^{\min(T, T+\varepsilon\tau)} \int_{\Omega_i} (\varphi_i(u_1(t)) - \varphi_i(u_2(t-\varepsilon\tau)))^+ \frac{d}{dt}\gamma\left(t - \frac{\varepsilon\tau}{2}\right) dx\, dt\, d\tau +$$
$$+ \sum_{i=1}^{2} \int_{-M}^{M} q(\tau) \int_0^{\max(0,\varepsilon\tau)} \int_{\Omega_i} (\varphi_i(u_1(t)) - \varphi_i(u_2(t-\varepsilon\tau)))^+ \frac{d}{dt}\gamma\left(t - \frac{\varepsilon\tau}{2}\right) dx\, dt\, d\tau +$$

$$+\sum_{i=1}^{2}\int_{-M}^{M}q(\tau)\int_{\min(T,T+\varepsilon\tau)}^{T}\int_{\Omega_i}(\varphi_i(u_1(t))-\varphi_i(u_2(t-\varepsilon\tau)))^+\frac{d}{dt}\gamma\Big(t-\frac{\varepsilon\tau}{2}\Big)dx\,dt\,d\tau+$$

$$+\sum_{i=1}^{2}\int_{-M}^{\mathrm{M}}q(\tau)\int_{0}^{T}\int_{\Omega_i}\Big\{(\varphi_i(u_1(t))-\varphi_i(u_2(t-\varepsilon\tau)))^+\frac{d}{dt}\gamma\Big(t-\frac{\varepsilon\tau}{2}\Big)dx\,dt\,d\tau-$$

$$-(\varphi_i(u_1(t))-\varphi_i(u_2(t)))^+\frac{d\gamma(t)}{dt}\Big\}dx\,dt\,d\tau. \quad (32)$$

Нетрудно показать по аналогии с предыдущим случаем, что первые четыре интеграла в правой части (32) могут быть сделаны сколь угодно малыми за счет выбора M. Что касается следующих двух слагаемых, то их значения малы при малом ε. Последнее слагаемое (обозначим его $\widetilde{J}$) в правой части (32) представим в виде

$$\widetilde{J}=\sum_{i=1}^{2}\int_{-M}^{\mathrm{M}}q(\tau)\int_{0}^{T}\int_{\Omega_i}(\varphi_i(u_1(t))-\varphi_i(u_2(t-\varepsilon\tau)))^+\Big(\frac{d}{dt}\gamma\Big(t-\frac{\varepsilon\tau}{2}\Big)-\frac{d\gamma(t)}{dt}\Big)dx\,dt\,d\tau+$$

$$+\sum_{i=1}^{2}\int_{-M}^{\mathrm{M}}q(\tau)\int_{0}^{T}\int_{\Omega_i}[(\varphi_i(u_1(t))-\varphi_i(u_2(t-\varepsilon\tau)))^+-(\varphi_i(u_1(t))-\varphi_i(u_2(t)))^+]\frac{d\gamma(t)}{dt}dx\,dt\,d\tau.$$

Первый интеграл правой части последнего равенства стремится к нулю, поскольку функция γ гладкая, а функции $\varphi_i(u_1)$ и $\varphi_i(u_1)$ принадлежат пространствам $L_\infty(0,T;L_{\alpha_i}(\Omega_i))$. Второй интеграл также стремится к нулю по свойству непрерывности в целом интегрируемых по Лебегу функций. Таким образом,

$$I_3-I_4\to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon\to 0.$$

Аналогично доказывается, что слагаемые, содержащие функции f_i, стремятся к нулю.

Таким образом, в результате предельного перехода в (30) по параметру ε получим неравенство

$$-\sum_{i=1}^{2}\int_{0}^{T}\int_{\Omega_i}(\varphi_i(u_1)-\varphi_i(u_2))^+\frac{d\gamma(t)}{dt}dx\,dt\le 0. \quad (33)$$

Ясно, что (33) будет иметь место и для $\gamma(t)\in W^1_\infty(0,T)$, $\gamma(T)=0$. Выберем в (33)

$$\gamma(t)=\begin{cases}t^*-t, & 0\le t\le t^*;\\ 0, & t\ge t^*,\end{cases}$$

где $t^*\in[0,T]$. В результате будем иметь

$$\int_0^{t^*}\int_{\Omega}(\varphi_1(u_1)-\varphi_1(u_2))^+dx\,dt+\int_0^{t^*}\int_{\Pi}(\varphi_2(u_1)-\varphi_2(u_2))^+ds\,dt\le 0.$$

Из последнего неравенства в силу монотонности φ_i и произвольности t^* следует, что $u_1\le u_2$ почти всюду в $Q_{T/2}$. Поскольку функции u_1, u_2 во всех рассуждениях можно поменять местами, то из последнего неравенства следует единственность обобщенного решения задачи (1)–(3). Чтобы получить единственность на $[0,T]$, нужно уравнения (1), (2) рассмотреть на $[0,2T]$, полагая $f_i(t)=0$ при $t>T$. $\square$

Авторы выражают искреннюю благодарность А.Д. Ляшко за внимание к работе.

Литература

1. Антонцев С.Н., Мейрманов А.М. *Математические модели совместного движения поверхностных и подземных вод.* – Новосибирск, 1979. – 80 с.
2. Глазырина Л.Л., Павлова М.Ф. *О разрешимости одной задачи совместного движения поверхностных и подземных вод* // Изв. вузов. Математика. – 1994. – № 9. – С. 16–27.
3. Felix Otto *L-contraction and uniqueness for quasilinear elliptic-parabolic equation* // Reprinted for J. Different. Equat., New York–London, Academic Press. – 1996. – V. 131. – № 1. – P. 20–38.
4. Дьяконов Е.Г. *Оценки N-поперечников в смысле Колмогорова для некоторых компактов в усиленных просранствах Соболева* // Изв. вузов. Математика. – 1997. – № 4. – С. 32–50.
5. Тимербаев М.Р. *Об усиленных пространствах Соболева* // Препринт. Казанск. матем. о-во. – Казань, 1998. – 35 с.

Казанский государственный университет

Поступила
01.03.2000