УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА.
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

2017, Т. 159, кн. 1 ISSN 2541-7746 (Print)
С. 88–99 ISSN 2500-2198 (Online)

УДК 517.968

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА БУССИНЕСКА С ВЫРОЖДЕННЫМ ЯДРОМ

Т.К. Юлдашев

Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М.Ф. Решетнева, г. Красноярск, 660037, Россия

Аннотация

Рассмотрены вопросы разрешимости и построения решения одной нелокальной краевой задачи для неоднородного интегро-дифференциального уравнения типа Буссинеска четвертого порядка с вырожденным ядром. Использован метод Фурье, основанный на разделение переменных. Получена система алгебраических уравнений. Установлен критерий однозначной разрешимости поставленной задачи и доказана соответствующая теорема.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение, краевая задача, вырожденное ядро, интегральное условие, разрешимость

---

1. Постановка задачи

Математическое моделирование многих процессов, проходящих в реальном мире, приводит к изучению смешанных и краевых задач для уравнений в частных производных. Поэтому теория смешанных и краевых задач в силу ее прикладной важности в настоящее время является одним из важнейших разделов теории дифференциальных уравнений. При исследовании многих задач газовой динамики, теории упругости, теории пластин и оболочек возникают дифференциальные уравнения в частных производных высоких порядков. С точки зрения физических приложений представляют большой интерес, в частности, дифференциальные уравнения четвертого порядка (см., например, [1–5]). В случаях, когда в точках границы области протекания физического процесса невозможно провести измерения характеристик процесса, в качестве дополнительной информации, достаточной для однозначной разрешимости задачи, могут служить нелокальные условия в интегральной форме.

В настоящей работе с помощью метода разделения переменных изучается разрешимость нелокальной краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения типа Буссинеска четвертого порядка с вырожденным ядром. Метод разделения переменных при исследовании дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных применяется в работах многих авторов, в частности в [6–10]. Интегро-дифференциальные уравнения с вырожденным ядром рассматривались в [11, 12].

Итак, в области $\Omega = \{(t,x)\,|\,0<t<T,\ 0<x<l\}$ рассматривается интегро-дифференциальное уравнение вида

$$U_{tt} - U_{ttxx} - U_{xx} + \nu \int\limits_0^T K(t,s)U_{xx}(s,x)\,ds = \alpha(t)\beta(x), \tag{1}$$

где T и l – заданные положительные действительные числа, ν – действительный спектральный параметр, $K(t,s) = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i(t) b_i(s)$, $a_i(t),\, b_i(s) \in C^2[0;T]$, $\alpha(t) \in C^2[0;T]$, $\beta(x)$ – заданная достаточно гладкая функция.

Для исследования интегро-дифференциального уравнения (1) сформулируем следующую задачу.

Задача. Требуется найти в области Ω функцию

$$U(t,x) \in C\left(\overline{\Omega}\right) \bigcap C^1\left(\Omega \bigcup \{x=0\} \bigcup \{x=l\}\right) \bigcap C^2(\Omega) \bigcap C^{2+2}_{t,x}(\Omega),$$

удовлетворяющую уравнению (1) и следующим условиям:

$$U(0,x) = U(T,x), \quad 0 \le x \le l, \tag{2}$$

$$\int\limits_0^T U_t(t,x) t\, dt = \varphi(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{3}$$

$$U(t,0) = U(t,l) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{4}$$

где $C^r(\Omega)$ – класс функций, имеющих непрерывные производные $\dfrac{\partial^r}{\partial t^r}$, $\dfrac{\partial^r}{\partial x^r}$ в области Ω, $C^{r+s}_{t,x}(\Omega)$ – класс функций, имеющих непрерывную производную $\dfrac{\partial^{r+s}}{\partial t^r \partial x^s}$ в области Ω, $r = 1, \ldots, r_0$, $s = 1, \ldots, s_0$, $r \le r_0$, $s \le s_0$ – натуральные числа, $\varphi(x)$ – заданная достаточно гладкая функция, $\overline{\Omega} = \{(t,x) \,|\, 0 \le t \le T,\ 0 \le x \le l\}$.

Отметим, что уравнение (1) принадлежит псевдогиперболическому типу, назовем его интегро-дифференциальным уравнением типа Буссинеска. В случае, когда $\nu = 0$, соответствующее дифференциальное уравнение Буссинеска, как и уравнение Кортевега-де Фриза, возникает в приближенных теориях длинных волн на воде. Уравнения Буссинеска описывают движение волн, движущихся как влево, так и вправо [4, с. 16, 444].

2. Формальное решение краевой задачи (1)–(4)

Решение уравнения (1) в области Ω ищется в виде ряда Фурье

$$U(t,x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{n=1}^{\infty} u_n,(t) \sin \frac{\pi n}{l} x, \tag{5}$$

где

$$u_n(t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0^l U(t,x) \sin \frac{\pi n}{l} x\, dx, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{6}$$

Предполагается, что и функция $\beta(x)$ разлагается в ряд Фурье

$$\beta(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \tag{7}$$

где

$$\beta_n = \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0^l \beta(x) \sin \frac{\pi n}{l} x\, dx, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{8}$$

Подставляя ряды (5) и (7) в уравнение (1), получаем

$$u_n''(t) + \lambda_n^2 u_n(t) = \nu \lambda_n^2 \int\limits_0^T \sum_{i=1}^k a_i(t) b_i(s) u_n(s)\, ds + \alpha(t)\beta_n, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{9}$$

где $\lambda_n^2 = \dfrac{\mu_n^2}{1+\mu_n^2}$, $\mu_n = \dfrac{\pi n}{l}$.

Вводя обозначения

$$\tau_{in} = \int\limits_0^T b_i(s) u_n(s)\, ds, \tag{10}$$

уравнения (9) перепишем в виде

$$u_n''(t) + \lambda_n^2 u_n(t) = \nu \lambda_n^2 \sum_{i=1}^k a_i(t)\tau_{in} + \alpha(t)\beta_n. \tag{11}$$

Дифференциальные уравнения (11) решаются методом вариации произвольных постоянных

$$u_n(t) = c_n \cos\lambda_n t + d_n \sin\lambda_n t + \eta_n(t), \tag{12}$$

где

$$\eta_n(t) = \nu \sum_{i=1}^k \tau_{in} h_{in}(t) + \beta_n \delta_{1n}(t),$$

$$h_{in}(t) = \lambda_n \int\limits_0^t \sin\lambda_n(t-s) a_i(s)\, ds, \quad i = 1, \ldots, k,$$

$$\delta_{1n}(t) = \frac{1}{\lambda_n} \int\limits_0^t \sin\lambda_n(t-s)\alpha(s)\, ds.$$

Условие (2) с учетом формулы (6) запишется как

$$u_n(0) = \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0^l U(0,x) \sin\frac{\pi n}{l} x\, dx = \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0^l U(T,x) \sin\frac{\pi n}{l} x\, dx = u_n(T). \tag{13}$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов c_n и d_n в (12), воспользуемся условием (13)

$$u_n(t) = d_n \left[\sin\lambda_n t + \frac{\sin\lambda_n T}{1-\cos\lambda_n T} \cos\lambda_n t\right] + \xi_n(t), \tag{14}$$

где $\xi_n(t) = \dfrac{\eta_n(T)}{1-\cos\lambda_n T} \cos\lambda_n t + \eta_n(t)$.

Воспользуемся интегральным условием (3) и формулой (6)

$$\int\limits_0^T u_n'(t) t\, dt = \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0^l \int\limits_0^T U_t(t,x) t\, dt \, \sin\frac{\pi n}{l} x\, dx =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0^l \varphi(x) \sin\frac{\pi n}{l} x\, dx = \varphi_n. \tag{15}$$

Из (14) и (15) имеем

$$\varphi_n = \int_0^T u_n'(t)t\,dt = d_n \int_0^T \left[\sin\lambda_n t + \frac{\sin\lambda_n T}{1-\cos\lambda_n T}\cos\lambda_n t\right]' t\,dt + \gamma_n =$$

$$= \frac{d_n}{\lambda_n^2}\left[-T\sin\lambda_n T + \frac{1}{\lambda_n}\Big(1-\cos\lambda_n T\Big) + \right.$$

$$\left. + \frac{\sin\lambda_n T}{1-\cos\lambda_n T}\Big(-T\cos\lambda_n T + \frac{1}{\lambda_n}\sin\lambda_n T\Big)\right] + \gamma_n, \quad (16)$$

где $\gamma_n = \int_0^T \xi_n'(t)t\,dt$.

Из (16) видно, что для определения неизвестных коэффициентов d_n необходимо выполнение следующего условия:

$$\sigma_{1n}(T) = 1 - \cos\lambda_n T \neq 0. \quad (17)$$

При выполнении условия (17) из (16) получаем

$$\varphi_n = \frac{d_n}{\lambda_n^3}\,\frac{2-2\cos\lambda_n T - \lambda_n T\sin\lambda_n T}{\sigma_{1n}(T)} + \gamma_n. \quad (18)$$

Так как $0 < \lambda_n^2 < 1$, то из (18) вытекает, что возможно однозначно определить d_n, если выполняется и следующее условие:

$$\sigma_{2n}(T) = 2 - 2\cos\lambda_n T - \lambda_n T\sin\lambda_n T \neq 0. \quad (19)$$

Согласно 18) имеем

$$d_n = \lambda_n^3\big(\varphi_n - \gamma_n\big)\,\frac{\sigma_{1n}(T)}{\sigma_{2n}(T)}. \quad (20)$$

Подставляя (20) в формулу (14), получим

$$u_n(t) = \lambda_n^3\big(\varphi_n - \gamma_n\big)\delta_{0n}(t)\,\frac{\sigma_{1n}(T)}{\sigma_{2n}(T)} + \xi_n(t),$$

или

$$u_n(t) = \varphi_n B_n(t) + \nu\sum_{i=1}^{k}\tau_{in}D_{in}(t) + \beta_n E_n(t), \quad (21)$$

где

$$B_n(t) = \lambda_n^3\delta_{0n}(t)\,\frac{\sigma_{1n}(T)}{\sigma_{2n}(T)}, \quad \delta_{0n}(t) = \sin\lambda_n t + \frac{\sin\lambda_n T}{\sigma_{1n}(T)}\cos\lambda_n t,$$

$$D_{in}(t) = \frac{h_{in}(T)}{\sigma_{1n}(T)}\left[\cos\lambda_n t + \lambda_n B_n(t)\int_0^T t\sin\lambda_n t\,dt\right] + h_{in}(t) + B_n(t)\int_0^T t h_{in}'(t)\,dt,$$

$$E_n(t) = \frac{\delta_{1n}(T)}{\sigma_{1n}(T)}\left[\cos\lambda_n t + \lambda_n B_n(t)\int_0^T t\sin\lambda_n t\,dt\right] + \delta_{1n}(t) + B_n(t)\int_0^T t\delta_{1n}'(t)\,dt,$$

$$h_{in}(t) = \lambda_n\int_0^t \sin\lambda_n(t-s)a_i(s)\,ds, \quad i = 1,\ldots,k,$$

$$\delta_{1n}(t)=\frac{1}{\lambda_n}\int\limits_0^t \sin\lambda_n(t-s)\alpha(s)\,ds, \quad \lambda_n=\sqrt{\frac{\mu_n^2}{1+\mu_n^2}}, \quad \mu_n=\frac{\pi n}{l}.$$

При подстановке (21) в (10) получаем систему алгебраических уравнений (САУ)

$$\tau_{in}+\nu\sum_{j=1}^{k}\tau_{jn}H_{ij\,n}=\Psi_{in}, \quad i=1,\ldots,k, \tag{22}$$

где

$$H_{ijn}=-\int\limits_0^T b_i(s)D_{jn}(s)\,ds,$$

$$\Psi_{in}=\int\limits_0^T b_i(s)\left[\varphi_n B_n(s)+\beta_n E_n(s)\right]\,ds, \quad i=1,\ldots,k. \tag{23}$$

САУ (22) однозначно разрешима при любых конечных $\Psi_{i\,n}$, если выполняется следующее условие

$$\Delta_n(\nu)=\begin{vmatrix} 1+\nu H_{11n} & \nu H_{12n} & \ldots & \nu H_{1kn} \\ \nu H_{21n} & 1+\nu H_{22n} & \ldots & \nu H_{2kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \nu H_{k1n} & \nu H_{k2n} & \ldots & 1+\nu H_{kkn} \end{vmatrix}\neq 0. \tag{24}$$

Определитель $\Delta_n(\nu)$ в (24) есть многочлен относительно ν степени не выше k. Уравнение $\Delta_n(\nu)=0$ имеет не более чем k различных корней. Для других значений ν условие (24) выполняется, и система (22) имеет единственное решение при любой конечной ненулевой правой части. Поэтому при выполнении условия (24) ниже исследуется разрешимость поставленной нелокальной краевой задачи.

Решения САУ (22) имеют вид

$$\tau_{in}=\frac{\Delta_{in}(\nu)}{\Delta_n(\nu)}, \quad i=1,\ldots,k, \tag{25}$$

где

$$\Delta_{in}(\nu)=\begin{vmatrix} 1+\nu H_{11n} & \ldots & \nu H_{1(i-1)n} & \Psi_{1n} & \nu H_{1(i+1)n} & \ldots & \nu H_{1kn} \\ \nu H_{21n} & \ldots & \nu H_{2(i-1)n} & \Psi_{2n} & \nu H_{2(i+1)n} & \ldots & \nu H_{2kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \nu H_{k1n} & \ldots & \nu H_{k(i-1)n} & \Psi_{kn} & \nu H_{k(i+1)n} & \ldots & 1+\nu H_{kkn} \end{vmatrix}.$$

Среди элементов определителей $\Delta_{in}(\nu)$ имеются элементы Ψ_{in}. В свою очередь, в них содержатся нам нужные величины φ_n, β_n. Чтобы вывести их из-под знака определителей, выражение в (23) запишем в форме

$$\Psi_{in}=\varphi_n\Psi_{1in}+\beta_n\Psi_{2in},$$

где

$$\Psi_{1in}=\int\limits_0^T b_i(s)B_n(s)\,ds, \quad \Psi_{2in}=\int\limits_0^T b_i(s)E_n(s)\,ds.$$

В этом случае
$$\Delta_{in}(\nu) = \varphi_n \Delta_{1in}(\nu) + \beta_n \Delta_{2in}(\nu),$$
где
$$\Delta_{jin}(\nu) = \begin{vmatrix} 1+\nu H_{11n} & \dots & \nu H_{1(i-1)n} & \Psi_{j1n} & \nu H_{1(i+1)n} & \dots & \nu H_{1k\,n} \\ \nu H_{21n} & \dots & \nu H_{2(i-1)n} & \Psi_{j2n} & \nu H_{2(i+1)n} & \dots & \nu H_{2kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \nu H_{k1n} & \dots & \nu H_{k(i-1)n} & \Psi_{jkn} & \nu H_{k(i+1)n} & \dots & 1+\nu H_{kkn} \end{vmatrix}, \ j = 1, 2.$$

Теперь формула (25) преобразуется следующим образом:
$$\tau_{in} = \varphi_n \frac{\Delta_{1in}(\nu)}{\Delta_n(\nu)} + \beta_n \frac{\Delta_{2in}(\nu)}{\Delta_n(\nu)}, \quad i = 1, \dots, k. \tag{26}$$

Подставляя (26) в (21), имеем
$$u_n(t) = \varphi_n F_n(t) + \beta_n M_n(t), \tag{27}$$
где
$$F_n(t) = B_n(t) + \nu \sum_{i=1}^{k} \frac{\Delta_{1in}(\nu)}{\Delta_n(\nu)} D_{in}(t), \quad M_n(t) = E_n(t) + \nu \sum_{i=1}^{k} \frac{\Delta_{2in}(\nu)}{\Delta_n(\nu)} D_{in}(t).$$

Подставляя (27) в ряд Фурье (5), получим формальное решение задачи (1)–(4)
$$U(t,x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\varphi_n F_n(t) + \beta_n M_n(t)\right] \sin \frac{\pi n}{l} x. \tag{28}$$

3. Обоснование разрешимости краевой задачи (1)–(4)

Рассмотрим случай, когда нарушается условие (17). Пусть при некоторых T $\sigma_{1n}(T) = 1 - \cos \lambda_n T = 0$, то есть
$$\cos \lambda_n T = 1, \tag{29}$$
где, как и ранее, $\lambda_n = \sqrt{\dfrac{\mu_n^2}{1+\mu_n^2}}$, $\mu_n = \dfrac{\pi n}{l}$.

Уравнение (29) имеет решения
$$T_k = \frac{2\pi k}{\lambda_n}, \quad k \in \mathbb{N},$$
где $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел.

Рассмотрим теперь случай, когда условие (19) нарушается. Пусть при некоторых T $\sigma_{2n}(T) = 2 - 2\cos\lambda_n T - \lambda_n T \sin \lambda_n T = 0$, а значит,
$$\cos\left(\lambda_n T + \theta_n\right) = \frac{2}{\sqrt{4 + \lambda_n^2 T^2}}, \tag{30}$$
где $\theta_n = \arccos \dfrac{2}{\sqrt{4+\lambda_n^2 T^2}}$.

Так как $0 < \dfrac{2}{\sqrt{4+\lambda_n^2 T^2}} < 1$, то из тригонометрического уравнения (30) получаем формулу

$$\lambda_n T_s + \theta_n = \pm\theta_n + 2\pi s.$$

Отсюда следуют две серии значений для T_s:

$$T_s = \frac{2\pi s}{\lambda_n}, \quad T_s = -\frac{2\theta_n}{\lambda_n} + \frac{2\pi s}{\lambda_n}, \quad s \in N.$$

Другие значения $T > 0$, для которых условия (17) и (19) выполняются, называются регулярными. Следовательно, при выполнении условий (17), (19) и (24) решение краевой задачи (1)–(4) в области Ω представляется в виде ряда (28).

Покажем, что при определенных условиях относительно функций $\varphi(x)$ и $\beta(x)$ ряд (28) сходится абсолютно и равномерно. При $n \in \mathbb{N}$ и регулярных значениях T справедливы оценки

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|u_n(t)\right| \le C_1 \left[\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left|\varphi_n\right|^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left|\beta_n\right|^2}\right], \tag{31}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|u_n''(t)\right| \le C_1 \left[\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left|\varphi_n\right|^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left|\beta_n\right|^2}\right], \tag{32}$$

где $0 < C_1 = \text{const}$.

Действительно, так как для регулярных значений T справедливы неравенства $0 < \left|\sigma_{1n}(T)\right| \le 2$, $0 < \left|\sigma_{2n}(T)\right| < 4 + T$, $0 < \lambda_n < 1$ и $\lambda_n \to 1$ при $n \to \infty$, то на основании формулы (27) из гладкости функций $F_n(t)$, $M_n(t)$ найдем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|u_n(t)\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} \left[\max_{t\in[0,T]} \left|F_n(t)\right| \left|\varphi_n\right| + \max_{t\in[0,T]} \left|M_n(t)\right| \left|\beta_n\right|\right] \le$$

$$\le 2\sum_{n=1}^{\infty} \left[\max_{t\in[0,T]} \left|F(t)\right| \left|\varphi_n\right| + \max_{t\in[0,T]} \left|M(t)\right| \left|\beta_n\right|\right] \le C_{11} \left[\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left|\varphi_n\right|^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left|\beta_n\right|^2}\right],$$

где

$$C_{11} = 2\max\left\{\max_{t\in[0,T]} \left|F(t)\right|;\ \max_{t\in[0,T]} \left|M(t)\right|\right\},$$

$$F(t) = \lim_{n\to\infty} F_n(t), \quad M(t) = \lim_{n\to\infty} M_n(t).$$

Дважды дифференцируя (27), как и выше, получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|u_n''(t)\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} \left[\max_{t\in[0,T]} \left|F_n''(t)\right| \left|\varphi_n\right| + \max_{t\in[0,T]} \left|M_n''(t)\right| \left|\beta_n\right|\right] \le$$

$$\le 2\sum_{n=1}^{\infty} \left[\max_{t\in[0,T]} \left|F''(t)\right| \left|\varphi_n\right| + \max_{t\in[0,T]} \left|M''(t)\right| \left|\beta_n\right|\right] \le$$

$$\le C_{12} \left[\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left|\varphi_n\right|^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left|\beta_n\right|^2}\right],$$

где

$$C_{12} = 2\max\left\{ \max_{t\in[0,T]} \left|F''(t)\right|;\ \max_{t\in[0,T]} \left|M''(t)\right| \right\},$$
$$F''(t) = \lim_{n\to\infty} F_n''(t), \quad M''(t) = \lim_{n\to\infty} M_n''(t).$$

Отсюда следуют оценки (31) и (32), где $C_1 = \max\left\{C_{11};\, C_{12}\right\}$.

Условия А. Пусть функция $\varphi(x) \in C^2[0;l]$ на сегменте $[0;l]$ имеет кусочно-непрерывные производные третьего порядка и

$$\varphi(0) = \varphi(l) = \varphi_{xx}(0) = \varphi_{xx}(l) = 0.$$

Интегрируя три раза по частям по переменной x интеграл в (15):

$$\varphi_n = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \varphi(x) \sin\frac{\pi n}{l} x\, dx,$$

получаем, что

$$\varphi_n = -\left(\frac{l}{\pi}\right)^3 \frac{p_n}{n^3}, \tag{33}$$

где

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n^2 \le \frac{2}{l} \int_0^l \left[\varphi_{xxx}(x)\right]^2 dx < \infty. \tag{34}$$

Условия Б. Пусть функция $\beta(x) \in C^2[0;l]$ на сегменте $[0;l]$ имеет кусочно-непрерывные производные третьего порядка и

$$\beta(0) = \beta(l) = \beta_{xx}(0) = \beta_{xx}(l) = 0.$$

Интегрируя по частям три раза по переменной x интеграл в (8):

$$\beta_n = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \beta(x) \sin\frac{\pi n}{l} x\, dx,$$

получаем, что

$$\beta_n = -\left(\frac{l}{\pi}\right)^3 \frac{q_n}{n^3}, \tag{35}$$

где

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_n^2 \le \frac{2}{l} \int_0^l \left[\beta_{xxx}(x)\right]^2 dx < \infty. \tag{36}$$

Учитывая формул (31), (33)–(36) и применяя неравенства Минковского и Гельдера, для ряда (28) получим

$$|U(t,x)| \le \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{n=1}^{\infty} \left|u_n(t)\right| \left|\sin\frac{\pi n}{l} x\right| \le C_1 \sqrt{\frac{2}{l}} \left[\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left|\,\varphi_n\right|^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left|\beta_n\right|^2} \right] \le$$

$$\le \gamma_1 \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \left|p_n\right| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \left|q_n\right| \right] \le \gamma_1 \left[\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} p_n^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} q_n^2} \right] \le$$

$$\le \gamma_1 \sqrt{\frac{2}{l}} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}} \left[\sqrt{\int_0^l \left[\varphi_{xxx}(x)\right]^2 dx} + \sqrt{\int_0^l \left[\beta_{xxx}(x)\right]^2 dx} \right] < \infty, \tag{37}$$

где $\gamma_1 = \sqrt{\frac{2}{l}}\, C_1 \left(\frac{l}{\pi}\right)^3$.

Из (37) следует, что ряд (28) абсолютно и равномерно сходится в области $\overline{\Omega}$. Для функции (28) докажем непрерывность всех производных, входящих в уравнение (1). С этой целью функцию (28) формально дифференцируем нужное число раз:

$$U_{tt}(t,x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\varphi_n F_n''(t) + \beta_n M_n''(t)\right] \sin\frac{\pi n}{l}\, x, \tag{38}$$

$$U_{xx}(t,x) = -\sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \left[\varphi_n F_{nm}(t) + \beta_n M_n(t)\right] \sin\frac{\pi n}{l}\, x, \tag{39}$$

$$U_{ttxx}(t,x) = -\sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \left[\varphi_n F_n''(t) + \beta_n M_n''(t)\right] \sin\frac{\pi n}{l}\, x. \tag{40}$$

Учитывая соотношения (32)–(36) и применяя неравенства Минковского и Гельдера для оценки ряда в (38), получим

$$\left|U_{tt}(t,x)\right| \le \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{n=1}^{\infty} \left|u_n''(t)\right| \left|\sin\frac{\pi n}{l}\, x\right| \le C_1 \sqrt{\frac{2}{l}} \left[\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left|\varphi_n\right|^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left|\beta_n\right|^2}\right] \le$$

$$\le \gamma_1 \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \left|p_n\right| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \left|q_n\right|\right] \le$$

$$\le \gamma_1 \sqrt{\frac{2}{l}} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}} \left[\sqrt{\int_0^l \left[\varphi_{xxx}(x)\right]^2 dx} + \sqrt{\int_0^l \left[\beta_{xxx}(x)\right]^2 dx}\right] < \infty. \tag{41}$$

Аналогично оценкам (37) и (41) для ряда (39) получаем

$$\left|U_{xx}(t,x)\right| \le \frac{2\pi^2}{l^2\sqrt{l}} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left|u_n(t)\right| \left|\sin\frac{\pi n}{l} x\right| \le$$

$$\le \gamma_2 \left[\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left|\varphi_n\right|^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left|\beta_n\right|^2}\right] \le \gamma_2 \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left|p_n\right| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left|q_n\right|\right] \le$$

$$\le \frac{2\gamma_2}{l} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}} \left[\sqrt{\int_0^l \left[\varphi_{xxx}(x)\right]^2 dx} + \sqrt{\int_0^l \left[\beta_{xxx}(x)\right]^2 dx}\right] < \infty, \tag{42}$$

где $\gamma_2 = \frac{2\pi^2}{l^2\sqrt{l}}\, C_1$.

Для ряда в (40), аналогично (41) и (42), легко показать, что

$$\left|U_{ttxx}(t,x)\right| < \infty.$$

Следовательно, в области Ω функция $U(t,x)$, определяемая рядом (28), удовлетворяет условиям задачи.

Таким образом нами доказано, что справедлива следующая теорема.

Теорема. *Пусть выполняются условия А и Б. Тогда краевая задача* (1)–(4) *разрешима в области* Ω, *если выполняются условия* (17), (19) *и* (24). *Это решение определяется рядом* (28). *При этом возможно почленное дифференцирование ряда* (28) *по переменным* t, x *и полученные ряды будут сходиться абсолютно и равномерно.*

Литература

1. *Турбин М.В.* Исследование начально-краевой задачи для модели движения жидкости Гершель – Балкли // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика. Математика. – 2013. – № 2. – С. 246–257.
2. *Ахтямов А.М., Аюпова А.Р.* О решении задачи диагностирования дефектов в виде малой полости в стержне // Журн. Средневолжского матем. о-ва. – 2010. – Т. 12, № 3. – С. 37–42.
3. *Шабров С.А.* Об оценках функции влияния одной математической модели четвертого порядка // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика. Математика. – 2015. – № 2. – С. 168–179.
4. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. – М.: Мир, 1977. – 622 с.
5. *Benney D.J., Luke J.C.* Interactions of permanent waves of finite amplitude // J. Math. Phys. – 1964. – V. 43. – P. 309–313.
6. *Ильин В.А.* О разрешимости смешанных задач для гиперболического и параболического уравнений // Усп. матем. наук. – 1960. – Т. 15, Вып. 2. – С. 97–154.
7. *Моисеев Е.И.* О решении спектральным методом одной нелокальной краевой задачи // Дифференц. уравнения. – 1999. – Т. 35, № 8. – С. 1094–1100.
8. *Сабитов К.Б.* Нелокальная задача для уравнения параболо-гиперболического типа в прямоугольной области // Матем. заметки. – 2011. – Т. 89, Вып. 4. – С. 596–602.
9. *Чернятин В.А.* Обоснование метода Фурье в смешанном задаче для уравнений в частных производных. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1991. – 112 с.
10. *Юлдашев Т.К.* Об одной краевой задаче для трехмерного аналога дифференциального уравнения Буссинеска // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2016. – Т. 158, кн. 3. – С. 424–433.
11. *Юлдашев Т.К.* Об одном интегро-дифференциальном уравнении Фредгольма в частных производных третьего порядка // Изв. вузов. Матем. – 2015. – № 9. – С. 74–79.
12. *Юлдашев Т.К.* Обратная задача для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений типа Benney-Luke с вырожденным ядром // Изв. вузов. Матем. – 2016. – № 9. – С. 59–67.

Поступила в редакцию
07.11.16

Юлдашев Турсун Камалдинович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики

Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М.Ф. Решетнева

пр. им. газеты Красноярский рабочий, д. 31, г. Красноярск, 660037, Россия

E-mail: *tursun.k.yuldashev@gmail.com*

ISSN 2541-7746 (Print)
ISSN 2500-2198 (Online)

**UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)**

2017, vol. 159, no. 1, pp. 88–99

On a Nonlocal Problem for the Nonhomogeneous Boussinesq Type Integro-Differential Equation with Degenerate Kernel

T.K. Yuldashev

Reshetnev Siberian State Aerospace University, Krasnoyarsk, 660037 Russia
E-mail: *tursun.k.yuldashev@gmail.com*

Received November 7, 2016

Abstract

This paper considers the questions of solvability and constructing the solution of a nonlocal boundary value problem for the fourth-order Boussinesq type nonhomogeneous partial integro-differential equation with degenerate kernel. The Fourier method based on separation of variables has been used. The system of algebraic equations has been obtained. The criterion of unique solvability of the considered problem has been revealed. The theorem of solvability of the problem has been proved under this criterion.

Keywords: integro-differential equation, boundary value problem, degenerate kernel, integral conditions, solvability

References

1. Turbin M.V. Investigation of initial boundary value problem for the Herschel-Bulkley mathematical fluid model. *Vestn. Voronezh. Gos. Univ., Ser. Fiz. Mat.*, 2013, no. 2, pp. 246–257. (In Russian)
2. Akhtyamov A.M., Ayupova A.P. On solving the problem of diagnosing defects in a small cavity in the rod. *Zh. Srednevolzh. Mat. O-va.*, 2010, vol. 12, no. 3, pp. 37–42. (In Russian)
3. Shabrov S.A. About the estimates of the influence function of a mathematical model of the fourth order. *Vestn. Voronezh. Gos. Univ., Ser. Fiz. Mat.*, 2015, no. 2, pp. 168–179. (In Russian)
4. Whitham G. Linear and Nonlinear Waves. New York, John Wiley & Sons, 629 p.
5. Benney D.J., Luke J.C. Interactions of permanent waves of finite amplitude. *J. Math. Phys.*, 1964, vol. 43, pp. 309–313.
6. Il'in V.A. The solvability of mixed problems for hyperbolic and parabolic equations. *Russ. Math. Surv.*, 1960, vol. 15, no. 1, pp. 85–142.
7. Moiseev E.I. On the solution of a nonlocal boundary value problem by the spectral method. *Differ. Equations*, 1999, vol. 35, no. 8, pp. 1105–1112.
8. Sabitov K.B. Nonlocal problem for a parabolic-hyperbolic equation in a rectangular domain. *Math. Notes*, 2011, vol. 89, no. 4, pp. 562–567.
9. Chernyatin V.A. Substantiation of the Fourier Method in Mixed Problems for Partial Differential Equations. Moscow, Izd. Mosk. Univ., 1991. 112 p. (In Russian)
10. Yuldashev T.K. On a boundary value problem for a three dimensional analog of the Boussinesq type differential equation. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2016, vol. 158, no. 3, pp. 424–433. (In Russian)
11. Yuldashev T.K. A certain Fredholm partial integro-differential equation of the third order. *Russ. Math.*, 2015, vol. 59, no. 9, pp. 62–66. doi: 10.3103/S1066369X15090091.

12. Yuldashev T.K. Inverse problem for a nonlinear Benney-Luke type integro-differential equations with degenerate kernel. *Russ. Math.*, 2016, vol. 60, no. 9, pp. 53–60. doi: 10.3103/S1066369X16090061.

Для цитирования: *Юлдашев Т.К.* Об одной нелокальной задаче для неоднородного интегро-дифференциального уравнения типа Буссинеска с вырожденным ядром // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2017. – Т. 159, кн. 1. – С. 88–99.

For citation: Yuldashev T.K. On a nonlocal problem for the nonhomogeneous Boussinesq type integro-differential equation with degenerate kernel. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2017, vol. 159, no. 1, pp. 88–99. (In Russian)