Известия вузов. Математика *http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/*
2010, № 8, с. 51–58 *Гос. номер статьи по НТЦ "Информрегистр" 0421000123\0073*

В.П. ОРЛОВ

О СИЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ТЕРМОВЯЗКОУПРУГОСТИ

Аннотация. Для одной модели динамики термовязкоупругой сплошной среды в плоском случае установлена нелокальная теорема существования и единственности сильных решений.

Ключевые слова: термовязкоупругость, сильное решение, вполне непрерывный оператор

УДК: 517.958

Abstract. For a certain model of a dynamic thermoviscoelastic continuous medium we obtain a nonlocal theorem on the unique existence of a strong solution.

Keywords: thermoviscoelasticity, strong solution, completely continuous operator.

1. Введение

В $Q = [0,T] \times \Omega$, где $\Omega \in R^n$ – ограниченная выпуклая область с границей $\partial\Omega \subset C^2$ рассматривается начально-краевая задача

$$v_t + \sum_{i=1}^{n} v_i \partial v/\partial x_i - \mu_0 \Delta v(t,x) - \mu_1 \operatorname{Div} \int_0^t \exp(\lambda(s-t))\, E(v)(s, z(s;t,x))\, ds -$$
$$- \operatorname{Div}(\mu(S(v(t,x))\, E(v)(t,x)) + \nabla p + \nabla\theta(t,x) = f(t,x), \quad (t,x) \in Q; \quad (1.1)$$
$$\operatorname{div} v(t,x) = 0, \quad (t,x) \in Q; \quad \int_\Omega p(t,x)\, dx = 0, \quad 0 \le t \le T;$$

$$\theta_t + \sum_{i=1}^{n} v_i \partial\theta/\partial x_i - \mu_2 \triangle\theta - \mu_0^2 \sum_{i,j=1}^{n} e_{ij}^2(v)(t,x) -$$
$$- \mu_0\mu_1 \sum_{i,j=1}^{n} e_{ij}(v)(t,x) \int_0^t \exp(\lambda(s-t)) e_{ij}(v)(s, z(s;t,x)) ds -$$
$$- \mu_0 \mu(S(v(t,x))) \sum_{i,j=1}^{n} e_{ij}^2(v)(t,x) = \varphi(t,x), \quad (t,x) \in Q; \quad (1.2)$$

Поступила 16.09.2008

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 07-01-00137.

$$v(0,x)=v^0(x),\ \ x\in\Omega;\ \ v(t,x)=0,\ \ (t,x)\in[0,T]\times\partial\Omega, \tag{1.3}$$

$$\theta(0,x)=\theta^0(x),\ \ x\in\Omega;\ \ \theta(t,x)=0,\ \ (t,x)\in[0,T]\times\partial\Omega. \tag{1.4}$$

Здесь $v(t,x)=(v_1(t,x),\dots,v_n(t,x))$ и $\theta(t,x)$ — искомые векторная и скалярная функции, означающие скорость движения и температуру среды, $f(t,x)=(f_1(t,x),\dots,f_n(t,x))$ — плотность внешних сил, $\varphi(t,x)$ — плотность внешних источников тепла, $v^0(x)$ и $\theta^0(x)$ — начальное распределение скорости и температуры. Далее, $E(v)=\{e_{ij}(v)\}_{i,j=1}^n$ — тензор скоростей деформаций, т. е. матрица с коэффициентами $e_{ij}(v)=\frac{1}{2}(\partial v_i/\partial x_j+\partial v_j/\partial x_i)$, дивергенция Div матрицы определяется как вектор с компонентами-дивергенциями строк, $S(v)=\sum\limits_{i,j=1}^{2}(\partial v_i/\partial x_i)^2$, $\mu_0>0$, $\mu_2>0$, μ_1, λ — неотрицательные константы, $\mu(s)$ — неотрицательная непрерывно дифференцируемая при $s\geq 0$ функция. Вектор-функция $z(\tau;t,x)$ определяется как решение задачи Коши (в интегральной форме)

$$z(\tau;t,x)=x+\int_t^\tau v(s,z(s;t,x))ds,\quad \tau,t\in[0,T],\quad x\in\Omega. \tag{1.5}$$

Система (1.1)–(1.5) описывает динамику вязкоупругой сплошной среды, которая помнит напряжения вдоль траектории движения частицы среды (функция $z(\tau;t,x)$). При выводе уравнений предполагалось, что тензор напряжений среды — линейная комбинация тензора скоростей деформации, памяти $\int\limits_0^t\exp(\lambda(s-t))E(v)(s,z(s;t,x))ds$, $\mu(S(v(t,x)))E(v)(t,x)$ и шарового тензора θI температурного расширения, а внутренняя энергия линейно зависит от температуры. Уравнение (1.1) является уравнением движения, а уравнение (1.2) — следствие уравнения баланса энергии ([1], с. 7).

Движение термовязкоупругой среды с памятью изучалось в [2], [3], где в одномерном случае была установлена локальная теорема существования и единственности и нелокальная при малых данных.

В n-мерном случае вязкоупругая среда с памятью (система уравнений (1.1), (1.3), (1.5)) изучалась в [4], [5], где были установлены локальная и нелокальная при малых данных теоремы существования и единственности сильных решений в $L_q(Q)$ при $q>n$. Оказалось, что для нелокальной разрешимости приходится заменять уравнение (1.5) на регуляризованное уравнение

$$z(\tau;t,x)=x+\int_t^\tau \widehat{v}(s,z(s;t,x))ds,\quad \tau,t\in[0,T],\quad x\in\Omega, \tag{1.6}$$

где $\widehat{v}$ — некоторая регуляризация поля скоростей v. Введение оператора $\widehat{v}$, регуляризующего поле скоростей, объясняется тем фактом, что поле скоростей v, определяемое как слабое или сильное обобщенное решение задачи (1.1)–(1.2) в классах функций, суммируемых с квадратом вместе с производными, не позволяет восстановить траектории z движения частиц, или же траектории не обладают свойствами регулярности, необходимыми для корректности модели [6]. В работе [7] для регуляризованной модели вязкоупругости были установлены нелокальная ($n=2$) и локальная ($n=3$) теоремы существования и единственности сильных решений $L_2(Q)$ с помощью аппроксимационно-топологического метода. В [8] другим методом тот же результат был установлен для более общего случая нелинейной зависимости μ_1 от v_x.

Целью статьи является доказательство теорем существования и единственности сильных решений регуляризованной задачи (1.1)–(1.4), (1.6) в $L_2(Q)$ для $n=2$.

2. Обозначения и основные результаты

Будем использовать обычные обозначения $L_p(\Omega)$, $L_p(Q)$, $W_q^k(\Omega)$, $W_q^{k,m}(Q)$ (k дифференцирований по t и m дифференцирований по x при $(t,x) \in Q$) для вещественных пространств Лебега и Соболева функций на Ω и Q. Эти обозначения используются для скалярных, векторных или матричных функций. Обозначим через (u,v) скалярное произведение в $L_2(\Omega)$ для функций $u,v \in L_2(\Omega)$. Норма функции u в каждом из пространств $L_2(\Omega)$, $L_2(Q)$, $W_2^k(\Omega)$, $W_2^{k,m}(Q)$ обозначается соответственно $|u|_0$, $\|u\|_0$, $|u|_k$, $\|u\|_{k,m}$. В зависимости от контекста будет удобно рассматривать функциональные пространства на Q как соответствующие пространства функций переменной t со значениями в пространствах функций на Ω. Через $|\cdot|$ обозначается норма вектора в R^n и норма $n \times n$-матрицы. Пусть $D(\Omega)$ — множество функций класса C^∞ с компактным носителем в Ω и $D_s(\Omega) = \{u \in D(\Omega) : \operatorname{Div} u = 0\}$. Обозначим через H замыкание $D_s(\Omega)$ в норме пространства $L_2(\Omega)$ и через V — замыкание $D_s(\Omega)$ в норме пространства $W_2^1(\Omega)$. При этом норма $\|u\|_V$ функции в пространстве V определяется равенством $\|u\|_V = |u|_1$. Обозначим через $\mathbf{P}$ ортопроектор в $L_2(\Omega)$ на H. Пусть $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ — замыкание $D(\Omega)$ в норме пространства $W_2^1(\Omega)$.

Рассмотрим в H линейный неограниченный оператор A, определенный на области $D(A) = W_2^2(\Omega) \cap H \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ формулой $Av = -\mathbf{P}\triangle v$. Оператор A является ([9], с. 54) положительно определенным самосопряженным оператором. Определим оператор регуляризации как $\widehat{v} \equiv S_\delta v = (I + \delta A)^{-1} v$, $\delta > 0$, и рассмотрим задачу Коши (1.6).

Отметим, что $\lim\limits_{\delta \to 0} S_\delta v = v$ при $v \in H$. Изучим разрешимость задачи (1.1)–(1.4), (1.6).

Определение. Решением задачи (1.1)–(1.4), (1.6) называется тройка функций (v, θ, p),

$$v \in W_2^1(0,T;H) \cap L_2(0,T;H \cap W_2^2(\Omega)), \quad \theta \in W_2^{1,2}(Q), \quad p \in W_2^{0,1}(Q),$$

удовлетворяющая при почти всех (t,x) уравнениям (1.1), (1.2) и условиям (1.3), (1.4).

Сформулируем основной результат.

Теорема 2.1. *Пусть* $f \in L_2(0,T;H)$, $\varphi \in L_2(0,T;L_2(\Omega))$, $v^0 \in V$, $\theta^0 \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. *Пусть функция* $\mu(s)$ *удовлетворяет условиям*

$$\mu(s) + 2\mu'(s) \geq 0, s \geq 0; \quad s|\mu(s)| \leq M, \quad s \geq a > 0.$$

Тогда задача (1.1)–(1.4), (1.6) *имеет единственное решение.*

Возникающие при доказательствах в цепочках неравенств константы, не зависящие от существенных параметров, будем обозначать через M. Кроме того, без ограничения общности, полагаем $\lambda = 0$, $\mu_0 = \mu_1 = \mu_2 = 1$, что не влияет на результаты.

3. Доказательство теоремы 2.1

Применим к обеим частям (1.1) оператор проектирования $\mathbf{P}$:

$$v_t + \mathbf{P}\sum_{i=1}^{2} v_i \partial v / \partial x_i + A\, v(t,x) - \mathbf{P}\operatorname{Div}\int_0^t E(v)(s, z(s;t,x))ds -$$
$$- \mathbf{P}\operatorname{Div}(\mu(S(v(t,x)))\,\mathcal{E}(v)(t,x)) = f(t,x), \quad (t,x) \in Q. \quad (3.1)$$

Теорема 3.1 ([8])**.** *Пусть* $f \in L_2(0,T;H)$, $v^0 \in V$. *Тогда задача* (3.1), (1.6) *имеет единственное решение* $v \in W_2^1(0,T;H) \cap L_2(0,T;H \cap W_2^2(\Omega))$, *удовлетворяющее условиям* (1.3), *и справедлива оценка*

$$\sup_t |v(t,x)|_1 + \|v\|_{1,2} \le M_1(\|f\|_0, |v^0|_1) \equiv M_0. \tag{3.2}$$

Пусть v — решение (3.1) для заданных f и v^0. Подставляя его в (1.2), получаем для определения θ задачу Υ:

$$\theta_t + \Delta\theta = w(t,x), \quad (t,x) \in Q; \tag{3.3}$$

$$\theta(0,x) = \theta^0(x), \quad x \in \Omega; \quad \theta(t,x) = 0, \quad (t,x) \in [0,T] \times \partial\Omega, \tag{3.4}$$

где

$$w(t,x) = \varphi + \mu_3(S(v(t,x))) \sum_{i,j=1}^{2} e_{ij}^2(v)(t,x) +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{2} e_{ij}(v)(t,x) \int_0^t e_{ij}(v)(s,z(s;t,x))ds - \sum_{i=1}^{2} v_i(t,x)\partial\theta(t,x)/\partial x_i \ (\equiv \sum_{i=1}^{4} Z_i). \tag{3.5}$$

Здесь $\mu_3(S(v(t,x))) = 1 + \mu(S(v(t,x)))$. Установим разрешимость задачи Υ. Для этого сведем ее к некоторому операторному уравнению с вполне непрерывным оператором. Рассмотрим сначала вспомогательную задачу

$$\theta_t + \Delta\theta = \Psi(t,x), \quad (t,x) \in Q, \tag{3.6}$$

$$\theta(0,x) = \theta^0(x), \quad x \in \Omega; \quad \theta(t,x) = 0, \quad (t,x) \in [0,T] \times \partial\Omega. \tag{3.7}$$

Известно [11], что задача (3.6), (3.7) однозначно разрешима для любых $\Psi \in L_2(Q)$ и $\theta^0 \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, и справедлива оценка

$$\sup_t |\theta(t,x)|_1 + \|\theta\|_{1,2} \le M_2(\|\Psi\|_0 + |\theta^0|_1). \tag{3.8}$$

Обозначим через L оператор, ставящий в соответствие $\theta \in W_2^{1,2}(Q)$ пару $(\theta_t + \Delta\theta, \theta(0,x)) \in L_2(Q) \times \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Тогда задачу (3.6), (3.7) можно переписать в операторном виде $L\theta = (\Psi, \theta_0)$. Оператор L является в силу (3.8) ограниченным и ограниченно обратимым линейным оператором из $W_2^{1,2}(Q)$ в $L_2(Q) \times \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Поэтому L переводит произвольный шар

$$S_r = \{\theta : \theta \in W_2^{1,2}(Q), \ \|\theta\|_{1,2} \le r\}$$

в некоторый шар

$$S_{\overline{r}} = \{(\Psi, \theta^0) : \ (\Psi, \theta^0) \in L_2(Q) \times \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega), \ \|\Psi\|_0 + |\theta^0|_0 \le \overline{r}\}$$

и наоборот L^{-1} переводит произвольный шар $S_{\overline{r}}$ в некоторый шар S_r.

Рассмотрим задачу Υ. Будем считать правую часть (3.3) известной. Тогда $\theta = L^{-1}(w, \theta^0) = L^{-1}(w, 0) + L^{-1}(0, \theta^0)$. Подставляя полученное для θ выражение в правую часть (3.3), получаем для нахождения w уравнение

$$w + Kw = Z. \tag{3.9}$$

Здесь

$$Z = \varphi(t,x) + \mu_3(S(v(t,x)))\sum_{i,j=1}^{2} e_{ij}^2(v)(t,x) +$$

$$+\sum_{i,j=1}^{2} e_{ij}(v)(t,x)\int_0^t e_{ij}(v)(s,z(s;t,x))\,ds - \sum_{i=1}^{2} v_i(t,x)\partial L^{-1}(0,\theta^0)/\partial x_i \equiv \sum_{i=1}^{4} Z_i; \quad (3.10)$$

$$Kw = \sum_{i=1}^{2} v_i(t,x)\partial L^{-1}(w,0)/\partial x_i.$$

Покажем, что оператор K является вполне непрерывным в $L_2(Q)$, а $Z \in L_2(Q)$. Тогда (3.9) можно рассматривать как уравнение для нахождения $w \in L_2(Q)$.

Лемма 3.1. *Пусть* v *— решение задачи* (3.1), (3.3). *Тогда для* Z, *определяемой формулой* (3.10), *справедлива оценка*

$$\|Z\|_0 \le M_3(\|\varphi\|_0, M_0, |\theta^0|_1). \quad (3.11)$$

Доказательство. Оценим слагаемые Z_i из (3.10). Нетрудно видеть, что

$$|Z_2(t,x)|_0 \le M\left(\int_\Omega |v_x(t,x)|^4 dx\right)^{1/2} \le M\|v_x(t,x)\|^2_{L_4(\Omega)}.$$

Здесь $v_x(t,x)$ — матрица Якоби вектор-функции $v(t,x)$.

Оценим $\|v_x(t,x)\|_{L_4(\Omega)}$. Так как ([12], с. 317) вложение

$$W_2^\alpha(\Omega) \subset L_4(\Omega), \quad \alpha \ge 1/2, \quad (3.12)$$

непрерывно, то (в силу монотонности нормы $W_2^\alpha(\Omega)$ по α) имеем

$$\|v_x\|_{L_4(\Omega)} \le M|v_x|_{1/2} \le M|v|_{3/2}, \quad v \in D(A). \quad (3.13)$$

Пользуясь мультипликативным неравенством ([10], с. 327)

$$|v|_\alpha \le M|v|_\gamma^{(\gamma-\alpha)/(\gamma-\beta)}|v|_\beta^{(\alpha-\beta)/(\gamma-\beta)}, \quad \beta \le \alpha \le \gamma \le 2, \ v \in W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \quad (3.14)$$

при $\beta = 1$, $\alpha = 3/2$, $\gamma = 2$ и оценкой (3.8), имеем

$$\|v_x(t,x)\|_{L_4(\Omega)} \le M|v(t,x)|_2^{1/2}|v(t,x)|_1^{1/2} \le M|v(t,x)|_2^{1/2}\sup_t |v(t,x)|_1^{1/2} \le MM_0^{1/2}|v(t,x)|_2^{1/2}. \quad (3.15)$$

Так как $\det|z_x(\tau;t,x)| = 1$ в силу соленоидальности $\widehat{v}$, то с помощью замены переменной $y = z(s;t,x)$ получаем

$$\|v_x(s,z(s;t,x))\|^4_{L_4(\Omega)} = \int_\Omega |v_x(s,z(s;t,x))|^4\,dx = \int_\Omega |v_x(s,y)|^4\,dy = \|v_x(s,x)\|^4_{L_4(\Omega)}. \quad (3.16)$$

Отсюда в силу (3.15) и ограниченности $\mu(s)$ (а следовательно, и $\mu_3(s)$) получаем, что $|Z_2(t,x)|_0 \le MM_0|v(t,x)|_2$. Поэтому

$$\|Z_2(t,x)\|_0 \le M_0^2. \quad (3.17)$$

Для Z_3 имеем

$$|Z_3(t,x)|_0 \le M\|v_x(t,x)\|_{L_4(\Omega)}\int_0^t \|v_x(s,z(s;t,x))\|_{L_4(\Omega)}\,ds.$$

Используя (3.16) и те же соображения, что и при оценке Z_1, имеем

$$|Z_3(t,x)|_0 \le MM_0|v(t,x)|_2^{1/2}\int_0^t |v(s,x)|_2^{1/2}\,ds \le$$
$$\le MM_0|v(t,x)|_2^{1/2}\left(\int_0^t |v(s,x)|_2^2\,ds\right)^{1/4} \le MM_0|v(t,x)|_2^{1/2}\|v(s,x)\|_{0,2}^{1/2} \le MM_0^{3/2}|v(t,x)|_2^{1/2}.$$

Отсюда следует

$$\|Z_3(t,x)\|_0 \le M_0^2. \tag{3.18}$$

Рассмотрим Z_4. Пусть $\widehat{\theta} = L^{-1}(0,\theta^0)$. Из свойств оператора L вытекает, что $\widehat{\theta} \in W_2^{1,2}(Q)$ и

$$\|\widehat{\theta}\|_{1,2} \le M|\theta^0|_1. \tag{3.19}$$

В силу соотношений (3.12) и (3.14) имеем

$$|Z_4(t,x)|_0 \le M|\widehat{\theta}_x(t,x)|_{L_4(\Omega)}|v(t,x)|_{L_4(\Omega)} \le M|\widehat{\theta}_x(t,x)|_{1/2}|v(t,x)|_{1/2} \le$$
$$\le M|\widehat{\theta}(t,x)|_{3/2}|v(t,x)|_{1/2} \le M|\widehat{\theta}(t,x)|_2^{3/4}|\widehat{\theta}(t,x)|_0^{1/4}|v(t,x)|_2^{1/4}|v(t,x)|_0^{3/4}.$$

Используя элементарные выкладки, получаем

$$|Z_4(t,x)|_0 \le M(|\widehat{\theta}(t,x)|_2 + |\widehat{\theta}(t,x)|_0|v(t,x)|_2|v(t,x)|_0^3).$$

Отсюда и из (3.2) следует

$$\|Z_4(t,x)\|_0 \le M(\|\widehat{\theta}(t,x)\|_{0,2} + \sup_t|\widehat{\theta}(t,x)|_0\|v(t,x)\|_{0,2}\sup_t|v(t,x)|_0^3) \le$$
$$\le M(\|\widehat{\theta}(t,x)\|_{0,2} + \sup_t|\widehat{\theta}(t,x)|_0\|v(t,x)\|_{0,2}\|v(t,x)\|_{1,2}^3). \tag{3.20}$$

Используя (3.19), имеем

$$\|Z_4(t,x)\|_0 \le M(|\theta^0|_1, \|v(t,x)\|_{0,2}). \tag{3.21}$$

Принимая во внимание (3.17), (3.18) и (3.21), получаем оценку (3.11). □

Из леммы 3.1 вытекает, что $Z \in L_2(Q)$.

Лемма 3.2. *Оператор K является вполне непрерывным в $L_2(Q)$.*

Доказательство. Рассмотрим операторы $K_i : W_2^{0,1}(Q) \to L_2(Q)$, определяемые формулой $K_i g = v_i g$, $i = 1,2$, $g \in L_2(Q)$. Так же, как при оценке Z_4, имеем

$$|(K_i g)(t,x)|_0 \le M|g(t,x)|_{L_4(\Omega)}|v(t,x)|_{L_4(\Omega)} \le M|g(t,x)|_1|v(t,x)|_1 \le$$
$$\le M|g(t,x)|_1\sup_t|v(t,x)|_1 \le M|g(t,x)|_1\|v(t,x)\|_{1,2} \le M|g(t,x)|_1.$$

Отсюда следует

$$\|K_i g\|_0 \le M\|g\|_{0,1}.$$

Таким образом, операторы K_i являются ограниченными. Представим теперь оператор K как суперпозицию операторов $K = \sum_{i=1}^{2} K_i \circ D_i \circ L^{-1}$, $D_i = \partial/\partial x_i$. Операторы $D_i : W_2^{1,2}(Q) \to W_2^{0,1}(Q)$ являются вполне непрерывными. Для доказательства этого достаточно воспользоваться теоремой 2.1 ([10], с. 217), положив $X_0 = W_2^2(\Omega)$, $X = W_2^1(\Omega)$, $X_1 = L_2(\Omega)$, $\alpha_0 = 2$, $\alpha = 2$. Оператор L^{-1} является ограниченным как оператор из $L_2(Q)$ в $W_2^{1,2}(Q)$. Поэтому оператор K является суммой суперпозиций ограниченных и вполне непрерывного операторов. Следовательно, оператор K вполне непрерывен. □

Лемма 3.3. *Однородное уравнение* (3.9) *имеет только нулевое решение.*

Доказательство. Действительно, пусть w — решение уравнения $w + Kw = 0$. Тогда $\theta = L^{-1}(w, 0)$ является решением задачи

$$\theta_t + \Delta\theta = \sum_{i=1}^{2} v_i \partial\theta(t,x)/\partial x_i, \tag{3.22}$$

$$\theta(0,x) = 0, \quad x \in \Omega; \quad \theta(t,x) = 0, \quad (t,x) \in [0,T] \times \partial\Omega. \tag{3.23}$$

Нетрудно показать, что если рассматривать задачу (3.6), (3.7) на $Q_\tau = [0,\tau] \times \Omega$, $0 < \tau \le T$, то оценка (3.8) справедлива и для Q_τ с не зависящей от τ константой (нормы при этом берутся по Q_τ). Пользуясь для задачи (3.22), (3.23) неравенством (3.8) для Q_t и непрерывностью вложения $W_2^2(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$, получаем

$$|\theta(t,x)|_1^2 \le M \left\| \sum_{i=1}^{2} v_i(t,x) \partial\theta(t,x)/\partial x_i \right\|^2_{L_2(0,t:L_2(\Omega))} \le$$

$$\le M \int_0^t \max_{x\in\Omega} |v(s,x)|^2 |\theta_x(s,x)|_0^2 \, ds \le M \int_0^t |v(s,x)|_2^2 |\theta(s,x)|_1^2 \, ds, \; 0 \le t \le T.$$

Из полученного интегрального неравенства в силу суммируемости $|v(t,x)|_2^2$ вытекает, что $|\theta(t,x)|_1^2 \equiv 0$. Следовательно, $\theta(t,x) \equiv 0$. □

Лемма 3.4. *Уравнение* (3.9) *однозначно разрешимо при любом* $Z \in L_2(Q)$.

Доказательство. Из лемм 3.1 и 3.2 вытекает, что $Z \in L_2(Q)$, а K вполне непрерывен в $L_2(Q)$. Для доказательства однозначной разрешимости уравнения (3.9) с вполне непрерывным оператором K достаточно установить ([13], с. 186), что однородное уравнение (3.9) имеет только нулевое решение. Это доказано в лемме 3.3. □

Пусть w — решение уравнения (3.9). Тогда $\theta = L^{-1}(w,\theta^0) = L^{-1}(w,0) + L^{-1}(0,\theta^0)$ является решением задачи (3.2), (3.4). Очевидно, из однозначной разрешимости уравнения (3.9) следует и однозначная разрешимость задачи (3.2), (3.4). Таким образом, справедлива

Теорема 3.2. *Пусть* $\varphi \in L_2(Q)$, $\theta^0 \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, $v \in W_2^{1,2}(Q)$ *— решение задачи* (3.1), (3.3). *Тогда задача* (3.2), (3.4) *имеет единственное решение.*

Пусть v и θ — найденные в теоремах 3.1 и 3.2 функции. Для определения $p(t,x)$ перепишем (3.1) в виде

$$-\mu_0 \Delta v(t,x) + \nabla p(t,x) = F(t,x), \quad 0 \le t \le T, \quad x \in \Omega, \tag{3.24}$$

где

$$F(t,x) = f(t,x) - v_t - \sum_{i=1}^{n} v_i \partial v/\partial x_i + \mathrm{Div}(\mu(S(v(t,x)))E(v)(t,x)) +$$

$$+ \mu_1 \,\mathrm{Div} \int_0^t \exp(\lambda(s-t)) E(v)(s, z(s;t,x)) ds - \nabla\theta(t,x).$$

Легко видеть, $F(t,x) \in L_2(Q)$. Из предложений 1.1 и 1.2 ([10], с. 214–215) и замечания 1.4 (ii) ([10], с. 21) вытекает существование единственной $p \in W_2^{0,1}(Q)$, удовлетворяющей уравнению (3.24) и условию $\int_\Omega p(t,x)dx = 0$. Очевидно, тройка (v,θ,p) является единственным решением задачи (1.1)–(1.4), (1.6). □

Литература

[1] Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. *Краевые задачи механики неоднородных жидкостей* (Наука, Новосибирск, 1983).

[2] Орлов В.П. *Исследование математических моделей термовязкоупругости*, Докл. РАН **343**, 41–46 (1995).

[3] Orlov V.P. *Local solvability of onedimensional problem of termoviscoelastisity*, Israel J. Math. **78** (1), 51–54 (1992).

[4] Orlov V.P., Sobolevskii P.E. *On mathematical models of a viscoelasticity with a memory*, Differ. Integral Equat. **4** (1), 103–115 (1991).

[5] Орлов В.П., Соболевский П.Е. *Исследование математических моделей вязкоупругости*, Докл. АН УССР. Сер. А, № 10, 31–35 (1989).

[6] Звягин В.Г., Дмитриенко В.Т. *О слабых решениях регуляризованной модели вязкоупругой жидкости*, Дифференц. уравнения **38** (12), 1633–1645 (2002).

[7] Звягин В.Г., Дмитриенко В.Т. *О сильных решениях начально–краевой задачи для регуляризованной модели несжимаемой вязкоупругой жидкости*, Изв. вузов. Математика, № 9, 24–40 (2004).

[8] Орлов В.П. *О сильных решениях регуляризованной модели несжимаемой нелинейно-вязкоупругой среды*, Матем. заметки **84** (2), 238–253 (2008).

[9] Ладыженская О.А. *Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости* (Наука, М., 1970).

[10] Соболевский П.Е. *Неравенства коэрцитивности для абстрактных параболических уравнений*, ДАН СССР **157**, 52–54 (1964).

[11] Трибель Х. *Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы* (Мир, М., 1980).

[12] Темам Р. *Уравнения Навье–Стокса* (Мир, М., 1981).

[13] Соболев В.И., Люстерник Л.А. *Краткий курс функционального анализа* (Высш. школа, М., 1981).

В.П. Орлов

профессор, кафедра математического моделирования,
Воронежский государственный университет,
Университетская пл., д. 1, г. Воронеж, 394006,

e-mail: orlov_vp@mail.ru

V.P. Orlov

professor, Chair of Mathematical Modelling,
Voronezh State University,
1 Universitetskaya sq., Voronezh, 394006 Russia,

e-mail: orlov_vp@mail.ru