ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2005 МАТЕМАТИКА № 9 (520)

УДК 517.95

О.А. МАТЕВОСЯН, И.В. ФИЛИМОНОВА

ОБ УСРЕДНЕНИИ СЛАБО-НЕЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ В ПЕРФОРИРОВАННОМ ЦИЛИНДРЕ

Изучению вопросов теории усреднения для перфорированных областей посвящено много работ (см. [1]–[3]), в которых на поведение решений при приближении к дырам ставятся какие-либо ограничения, например, граничные условия. Однако для усреднения решений уравнений с достаточно сильным нелинейным поглощением такие ограничения не нужны. Подобная ситуация была обнаружена и в теории устранения особенностей. В связи с этим отметим работы [4]–[7]. Вопросы усреднения полулинейных эллиптических задач в перфорированных областях были изучены в работах [8], [9] с использованием оценки Кондратьева–Ландиса ([10], § 1, п. 3).

В данной работе для слабо-нелинейного дивергентного параболического уравнения второго порядка с младшим членом, растущим по неизвестной функции степенным образом, доказывается, что последовательность решений в перфорированном цилиндре стремится к решению в неперфорированном цилиндре, если радиусы выброшенных цилиндров стремятся к нулю со скоростью, зависящей от показателя степени в младшем члене. Доказательства теорем данной работы основываются на аналогичной оценке решения полулинейного параболического уравнения через расстояние от точки до границы области в соответствующей метрике, полученной в работе [11].

Будем пользоваться следующими обозначениями:

$$x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\quad n>2,\quad u=(u_1,\dots,u_n),\quad u_x=(u_{x_1},\dots,u_{x_n}),$$
$$|u_x|^2=\sum_{i=1}^n (u_{x_i})^2,\quad u_t=\partial u/\partial t,\quad 0\le t<T<\infty;$$

$\Omega\subset\mathbb{R}^n$ — произвольное открытое подмножество $\mathbb{R}^n$ с границей $\partial\Omega$, $\overline{\Omega}=\Omega\bigcup\partial\Omega$ — замыкание Ω; $Q=\Omega\times(0,T)$ — цилиндр в пространстве точек $(x,t)\in\mathbb{R}^{n+1}$, $x\in\Omega$, $t\in[0,T]$, $0<T<\infty$;

$S(Q)=\partial\Omega\times[0,T]$ — боковая поверхность цилиндра $Q\subset\mathbb{R}^{n+1}$; $\Gamma(Q)=S(Q)\cup\Upsilon_0(\Omega)$ — параболическая граница цилиндра $Q\subset\mathbb{R}^{n+1}$, где $\Upsilon_t(\Omega)=\overline{\Omega}\times\{t\}\quad\forall t\in[0,T]$;

$Q(x_0,t_0,R,T)=B(x_0,R)\times[t_0,t_0+T]$ — цилиндр в $\mathbb{R}^{n+1}$ радиуса R и высоты T, где $B(x_0,R)=\{x\in\mathbb{R}^n:|x-x_0|\le R\}$ — замкнутый шар в $\mathbb{R}^n$ радиуса R с центром в точке x_0;

$\mathcal{C}(Q)$ — совокупность непрерывных в Q функций;

$L_{p,r}(Q)$ — пространство, состоящее из всех измеримых на Q функций с конечной нормой

$$\|u;L_{p,r}(Q)\|=\left(\int_0^T\left(\int_\Omega|u(x,t)|^p dx\right)^{r/p}dt\right)^{1/r},\quad p\ge1,\quad r\ge1;$$

$L_{p,r}(Q)$ будем обозначать через $L_p(Q)$ и норму $\|\cdot;L_{p,r}(Q)\|$ через $\|\cdot;L_p(Q)\|$ при $p=r$; $W_p^{1,1}(Q)$ — пространство Соболева, состоящее из элементов $L_p(Q)$, имеющих обобщенные производные по x и по t с нормой $\|u;W_p^{1,1}(Q)\|=\|u;L_p(Q)\|+\|u_x;L_p(Q)\|+\|u_t;L_p(Q)\|$;

$W_p^{1,0}(Q)$ — пространство Соболева, состоящее из элементов $L_p(Q)$, имеющих обобщенные производные по x с нормой $\|u;W_p^{1,0}(Q)\|=\|u;L_p(Q)\|+\|u_x;L_p(Q)\|$.

Пусть L, $\mathcal{L}$ — операторы вида

$$L \equiv \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\Big), \quad \mathcal{L} \equiv L - \frac{\partial}{\partial t},$$

где $(x,t) = (x_1,\dots,x_n,t) \in \mathbb{R}^{n+1}$, коэффициенты $a_{ij}(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ — ограниченные измеримые функции такие, что $a_{ij}(x) \equiv a_{ji}(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$, и выполняются условия

$$\lambda^{-1}|\xi|^2 \le \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \le \lambda|\xi|^2, \quad \lambda = \mathrm{const} > 0, \tag{1}$$

для всех $\xi = (\xi_1,\dots,\xi_n) \in \mathbb{R}^n$, $|\xi|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i^2$.

Будем изучать решение задачи

$$\mathcal{L}u(x,t) = f(x,t,u(x,t)), \quad (x,t) \in Q = \Omega \times (0,T), \tag{2}$$

$$u(x,t) = \varphi(x,t), \qquad (x,t) \in \Gamma(Q) = S(Q) \cup \Upsilon_0(\Omega), \tag{3}$$

где $\varphi(x,t) \in W_2^{1,1}(Q)$, а функция $f(x,t,u) : \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ предполагается измеримой и такой, что композиция $f(x,t,u(x,t))$ является измеримой локально ограниченной функцией переменных (x,t) при любой функции $u(x,t) \in W_2^{1,1}(Q) \cap C(Q)$.

Определение 1. Функция $u(x,t) \in W_{2,\mathrm{loc}}^{1,1}(Q) \bigcap C(Q)$ называется *обобщенным решением задачи* (2), (3), если для любой функции $\psi(x,t) \in \overset{0}{W}{}_2^{1,0}(Q)$ она удовлетворяет интегральному соотношению

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_Q a_{ij}(x)u_{x_j}\psi_{x_i}dx\,dt + \int_Q u_t(x,t)\psi(x,t)dx\,dt + \int_Q f(x,t,u)\psi(x,t)dx\,dt = 0 \tag{4}$$

и при любой функции $\chi(x,t) \in C^\infty(Q)$, равной нулю в окрестности $\Upsilon_T(\Omega)$, выполнено включение $\chi(x,t)(u(x,t) - \varphi(x,t)) \in \overset{0}{W}{}_2^{1,1}(Q)$.

Вопросы разрешимости, а также единственности решения задачи (2), (3) изучены в ([12], гл. V, § 6, с. 524).

1. Пусть в области Q лежат m цилиндров вида $Q(y_{k,\varepsilon},0,R_\varepsilon,T)$ с центрами в точках $y_{k,\varepsilon}$ одинакового радиуса R_ε и высотами T, $\varepsilon = m^{-1}$ — малый параметр, m — натуральное число; $k = 1,\dots,m$. Будем предполагать, что расстояние между центрами этих шаров не меньше, чем $4R_\varepsilon$. Положим $Q_\varepsilon = Q \setminus Q(R_\varepsilon,T)$, где $Q(R_\varepsilon,T) = \bigcup\limits_{k=1}^{m} Q(y_{k,\varepsilon},0,R_\varepsilon,T)$.

Пусть $u_\varepsilon(x,t)$ – решение задачи

$$\mathcal{L}u_\varepsilon(x,t) = a(x)|u_\varepsilon(x,t)|^{\sigma-1}u_\varepsilon(x,t), \quad (x,t) \in Q_\varepsilon, \tag{5}$$

$$u_\varepsilon(x,t) = \varphi(x,t), \qquad (x,t) \in S(Q), \tag{6}$$

$$u_\varepsilon(x,0) = u_0(x), \qquad x \in \Omega, \tag{7}$$

где $a(x)$ — ограниченная измеримая функция, $a(x) \ge a_0 = \mathrm{const} > 0$, $\varphi(x) \in W_2^{1,1}(Q_\varepsilon)$.

Определение 2. Функция $u_\varepsilon(x,t) \in W_{2,\mathrm{loc}}^{1,1}(Q_\varepsilon) \bigcap C(Q_\varepsilon)$ называется *обобщенным решением задачи* (5)–(7), если для любой функции $\psi(x,t) \in \overset{0}{W}{}_2^{1,0}(Q_\varepsilon)$ она удовлетворяет интегральному соотношению

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_{Q_\varepsilon} a_{ij}(x)u_{x_j}\psi_{x_i}dx\,dt + \int_{Q_\varepsilon} u_t(x,t)\psi(x,t)dx\,dt + \int_{Q_\varepsilon} a(x)|u_\varepsilon(x,t)|^{\sigma-1}u_\varepsilon(x,t)\psi(x,t)dx\,dt = 0,$$

принимает значение $u_0(x)$ при $t = 0$ и при любой функции $\chi(x,t) \in C^\infty(Q)$, равной нулю в окрестностях $Q(R_\varepsilon, T)$ и $\Upsilon_T(\Omega)$, выполнено включение $\chi(x,t)(u_\varepsilon(x,t) - \varphi(x,t)) \in \overset{0}{W}{}_2^{1,1}(Q_\varepsilon)$.

Для задачи (5)–(7) не выполняются, вообще говоря, теоремы единственности, т. к. на границах дырок перфорированной области Q_ε не заданы никакие граничные условия. Покажем, что при некоторых условиях предел решений задачи (5)–(7) будет существовать, причем этот предел не зависит от выбора последовательности $u_\varepsilon(x,t)$; здесь $u_\varepsilon(x,t)$ — любое решение задачи (5)–(7).

Пусть $u(x,t)$ — решение следующей задачи:

$$\mathcal{L}u(x,t) = a(x)|u(x,t)|^{\sigma-1}u(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{8}$$

$$u(x,t) = \varphi(x,t), \quad (x,t) \in S(Q), \tag{9}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega. \tag{10}$$

Теорема 1. *Пусть* $\sigma > \frac{n}{n-2}$ *и*

$$R_\varepsilon \sim \varepsilon^\alpha \quad \textit{при} \quad \varepsilon \to 0, \quad \textit{где} \quad \alpha > \frac{\sigma - 1}{(n-2)\sigma - n}. \tag{11}$$

Тогда решение задачи (5)–(7) *стремится к решению задачи* (8)–(10) *в следующем смысле: для любого положительного постоянного* d

$$\sup_{x \in \Omega_{\varepsilon,d},\ t \in [0,T]} |u_\varepsilon(x,t) - u(x,t)| \to 0 \quad \textit{при} \quad \varepsilon \to 0, \tag{12}$$

где

$$\Omega_{\varepsilon,d} = \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial B(y_{k,\varepsilon}, R_\varepsilon)) > d;\ k = 1, \dots, m\}.$$

Отметим, что при этом общий объем дырок $\operatorname{Vol}[Q(R_\varepsilon, T)]$ стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$.

Следствие 1. Если в перфорированной области Q_ε существует множество, отделенное от всех дырок фиксированной постоянной, то на этом множестве сходимость будет равномерной.

Лемма 1. *Для любых* $a, b \in \mathbb{R}$ *и* $\sigma > 1$ *имеет место неравенство*

$$\big||a|^{\sigma-1}a - |b|^{\sigma-1}b\big| \ge C_\sigma |a-b|^\sigma = C_\sigma |a-b|^{\sigma-1}|a-b|,$$

где C_σ *— некоторая положительная постоянная, зависящая от* σ*, но не зависящая от* a *и* b.

Доказательство теоремы 1. Доказательство проводится так же, как в работах [8], [9] для эллиптических операторов. Для разности $w_\varepsilon(x,t) = u_\varepsilon(x,t) - u(x,t)$ имеем

$$\mathcal{L}w_\varepsilon(x,t) - a(x)(|u_\varepsilon(x,t)|^{\sigma-1}u_\varepsilon(x,t) - |u(x,t)|^{\sigma-1}u(x,t)) = 0.$$

Умножим это равенство на $\operatorname{sgn} w_\varepsilon(x,t)$ и применим лемму 1, тогда

$$0 = \operatorname{sgn} w_\varepsilon(x,t)\mathcal{L}w_\varepsilon(x,t) - a(x)\big||u_\varepsilon(x,t)|^{\sigma-1}u_\varepsilon(x,t) - |u(x,t)|^{\sigma-1}u(x,t)\big| \le$$
$$\le \operatorname{sgn} w_\varepsilon(x,t)\mathcal{L}w_\varepsilon(x,t) - C_\sigma a_0|u_\varepsilon(x,t) - u(x,t)|^\sigma = \operatorname{sgn} w_\varepsilon(x,t)\mathcal{L}w_\varepsilon(x,t) - C_\sigma a_0 |w_\varepsilon(x,t)|^\sigma, \quad (x,t) \in Q_\varepsilon.$$

Таким образом, функция $w_\varepsilon(x,t)$ удовлетворяет неравенству

$$\operatorname{sgn} w_\varepsilon(x,t)\mathcal{L}w_\varepsilon(x,t) - b_0|w_\varepsilon(x,t)|^\sigma \ge 0, \quad (x,t) \in Q_\varepsilon, \tag{13}$$

с граничным условием

$$w_\varepsilon(x,t) = 0, \quad (x,t) \in S(Q) = \partial\Omega \times [0,T], \tag{14}$$

и с нулевым начальным условием

$$w_\varepsilon(x,0) = 0, \quad x \in \Omega; \tag{15}$$

здесь $b_0 = C_\sigma a_0$.

Согласно теореме 8.2 работы [11] для решений полулинейных параболических уравнений вида (8) имеет место оценка

$$|w_\varepsilon(x,t)| \le C\big(\min(R^2,T)\big)^{\frac{1}{1-\sigma}},$$

где R, T — соответственно радиус и высота цилиндра, в котором определено решение $u(x,t)$ уравнения (8). Так как коэффициенты оператора не зависят от t, то из последней оценки можно исключить зависимость от T, поскольку $w(x,t)$ обращается в нуль при $t=0$. Действительно, $w(x,t)$ всегда можно считать решением в достаточно высоком цилиндре фиксированного радиуса, если доопределить $w(x,t)$ нулем при $t<0$. Следовательно,

$$|w_\varepsilon(x,t)| \le C\big(\min(R^2,0)\big)^{\frac{1}{1-\sigma}} = CR^{\frac{2}{1-\sigma}}. \tag{16}$$

Аналогично работе [10] эту оценку можно получить и для решений неравенств вида (13). Буквой C здесь и далее будем обозначать любую положительную постоянную, не зависящую от x, t и ε.

Предположим, что $u_\varepsilon(x,t)$ не стремится к $u(x,t)$ в смысле (12) при $\varepsilon\to 0$. Тогда найдется положительная постоянная C_0 такая, что для любого $\varepsilon_0 = m_0^{-1}$ существуют $\varepsilon = m^{-1} < \varepsilon_0$ и $(x_\varepsilon,t)\in\Omega_{\varepsilon,d}\times[0,T]$ такие, что $|w_\varepsilon(x_\varepsilon,t)| > C_0$, т. е. $w_\varepsilon(x_\varepsilon,t) > C_0$ либо $w_\varepsilon(x_\varepsilon,t) < -C_0$. Будем считать, что первый случай реализуется при различных ε бесконечно много раз (для второго случая $w_\varepsilon(x_\varepsilon,t) < -C_0$ рассмотрение аналогично).

Обозначим через $\Gamma(x,x_0)$ фундаментальное решение оператора $\mathcal{L}$, имеющее особенность в точке x_0, т. е. $\mathcal{L}\Gamma(x)=\delta(x_0)$. Известно [13], что такое фундаментальное решение существует и удовлетворяет неравенствам

$$C_1|x-x_0|^{2-n} \le \Gamma(x,x_0) \le C_2|x-x_0|^{2-n}, \tag{17}$$

где положительные постоянные C_1 и C_2 зависят от λ из условия (1).

Положим

$$g_\varepsilon(x) = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\Gamma(x-y_{k,\varepsilon}). \tag{18}$$

Рассмотрим функцию

$$v_\varepsilon(x,t) = w_\varepsilon(x,t) - h_\varepsilon(x), \tag{19}$$

где $h_\varepsilon(x) = \frac{C_0}{2}\frac{g_\varepsilon(x)}{g_\varepsilon(x_\varepsilon)}$. Тогда выполняется $v_\varepsilon(x_\varepsilon,t) = \frac{C_0}{2} > 0$.

Покажем, используя принцип максимума, что это невозможно. Согласно (16) на границах цилиндров $Q(y_{k,\varepsilon},0,2R_\varepsilon,T) = B(y_{k,\varepsilon},2R_\varepsilon)\times[0,T]$, коаксиальных с $Q(y_{k,\varepsilon},0,R_\varepsilon,T) = B(y_{k,\varepsilon},R_\varepsilon)\times[0,T]$, выполнено неравенство

$$|w_\varepsilon(x,t)| < CR_\varepsilon^{\frac{2}{1-\sigma}}. \tag{20}$$

Из нижней оценки (17) сделаем заключение, что на границах шаров $B(y_{k,\varepsilon},2R_\varepsilon)$ имеет место

$$g_\varepsilon(x) > C_1'\varepsilon R_\varepsilon^{2-n}, \tag{21}$$

где $C_1' = 2^{2-n}C_1$. При этом из (11) следует

$$R_\varepsilon^{\frac{2}{1-\sigma}} = \mathbf{o}(\varepsilon R_\varepsilon^{2-n}) \ \text{ при } \ \varepsilon\to 0. \tag{22}$$

Таким образом, получаем, что при $\sigma > \frac{n}{n-2}$ для выполнения (22) необходимо, чтобы $\alpha > \frac{\sigma-1}{(n-2)\sigma-n}$.

Так как точка $x_\varepsilon\in\Omega_{\varepsilon,d}$, то $g_\varepsilon(x_\varepsilon,) < Cd^{2-n}$. Поэтому в силу (22) на границах цилиндров $Q(y_{k,\varepsilon},0,2R_\varepsilon,T)$ будет выполнено неравенство $w_\varepsilon(x,t) < g_\varepsilon(x)$, т. е. выполнено $v_\varepsilon(x,t) < 0$. При $(x,t)\in\partial\Omega\times[0,T]$ согласно (14) и (18) имеем $w_\varepsilon(x,t)=0$, $g_\varepsilon(x)\ge 0$ и поэтому $v_\varepsilon(x,t)\le 0$ при $(x,t)\in S(Q)$. При $t=0$ имеем $w_\varepsilon(x,t)=0$, $v_\varepsilon(x,t)\le 0$. Кроме того, из оценок (16), (17) с учетом определения (18) следует, что $w_\varepsilon(x,t)\to 0$ и $g_\varepsilon(x)\to 0$ при $|x|\to\infty$. Таким образом, из принципа максимума заключаем, что $v_\varepsilon(x,t)\le 0$ на параболической границе $\Gamma(Q)$.

Определим множество $D\equiv\{(x,t)\in\Omega_\varepsilon\times[0,T]:v_\varepsilon(x,t)>0\}\ne\emptyset$. Обозначим через D_0 компоненту связности множества D, содержащую точку (x_ε,t).

Покажем, что $\mathcal{L}v_\varepsilon(x,t)>0$ при $(x,t)\in D$. Действительно, по определению множества D $u_\varepsilon(x,t)-u(x,t)=w_\varepsilon(x,t)>h_\varepsilon(x)>0$, т. е. $u_\varepsilon(x,t)>u(x,t)$ при $(x,t)\in D$. Тогда

$$\mathcal{L}v_\varepsilon(x,t)=\mathcal{L}(u_\varepsilon(x,t)-u(x,t))-\mathcal{L}h_\varepsilon(x)=a(x)\big(|u_\varepsilon(x,t)|^{\sigma-1}u_\varepsilon(x,t)-|u(x,t)|^{\sigma-1}u(x,t)\big)>0. \tag{23}$$

Поскольку $v_\varepsilon(x_\varepsilon,t)>0$ согласно (19), $v_\varepsilon(x,t)<0$ при $x\in\partial(Q(2R_\varepsilon,T))$, $v_\varepsilon(x,0)<0$ и $v_\varepsilon(x,t)\to 0$ при $|x|\to\infty$, то функция $v_\varepsilon(x,t)$ достигает локального максимума во внутренней точке области D_0, что с учетом (23) противоречит принципу максимума для функции $v_\varepsilon(x,t)$.

Следовательно, наше предположение неверно, т. е. $u_\varepsilon(x,t)$ стремится к $u(x,t)$ в смысле (12) при $\varepsilon\to 0$. $\square$

Для объема шара радиуса R в пространстве $\mathbb{R}^n$ выполнено равенство $\mathrm{Vol}[B(0,R)]=\mu_nR^n$, где постоянная μ_n — объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$, зависит только от n. Оценим общий объем дырок:

$$\Big|\bigcup_{k=1}^m Q(y_{k,\varepsilon},0,R_\varepsilon,T)\Big|\le m\,\mathrm{Vol}[Q(0,0,R_\varepsilon,T)]=T\mu_n mR_\varepsilon^n=\mathbf{o}\big(\varepsilon^{\frac{2\sigma}{(n-2)\sigma-n}}\big)\to 0\ \text{ при }\ \varepsilon\to 0.$$

2. Будем теперь предполагать, что расстояние между центрами этих шаров не менее, чем $8R_\varepsilon$.

Положим $Q(4R_\varepsilon,T)=\bigcup\limits_{k=1}^m Q(y_{k,\varepsilon},0,4R_\varepsilon,T)$.

Лемма 2 (обобщенное неравенство Юнга). *Пусть $a,b,\beta>0$, $0<\alpha<1$. Тогда*

$$ab\le\frac{\alpha}{\beta}a^{\frac{1}{\alpha}}+\frac{1-\alpha}{\beta^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}}b^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

В частности, при $\alpha=\frac12$ имеем $2ab\le\frac{a^2}{\beta}+\beta b^2$.

Теорема 2. *При любом $\sigma>1$ и $R_\varepsilon=O(\varepsilon^\gamma)$ при $\varepsilon\to 0$, где $\gamma>\frac{1}{n-2}$, выполнено*

$$\int\limits_{Q\setminus Q(4R_\varepsilon,T)}\frac{|\nabla(u_\varepsilon(x,t)-u(x,t))|^2+|u_\varepsilon(x,t)-u(x,t)|^{\sigma+1}}{1+|u_\varepsilon(x,t)-u(x,t)|^2}dx\,dt\to 0\quad \textit{при}\ \ \varepsilon\to 0.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $\theta_\varepsilon(x)\in C^\infty(\Omega)$ такую, что $0\le\theta_\varepsilon(x)\le 1$, $x\in\Omega$,

$$\theta_\varepsilon(x)=\begin{cases}1, & x\in\Omega\setminus\bigcup\limits_{k=1}^m B(y_{k,\varepsilon},4R_\varepsilon);\\ 0, & x\in\bigcup\limits_{k=1}^m B(y_{k,\varepsilon},2R_\varepsilon),\end{cases}$$

$|\nabla\theta_\varepsilon(x)|<\frac{C_\Omega}{R_\varepsilon}$, $x\in\Omega$; здесь C_Ω зависит от области Ω и не зависит от ε.

Рассмотрим функцию

$$\psi(x,t)=\theta_\varepsilon^p(x)\eta(u_\varepsilon(x,t)-u(x,t)), \tag{24}$$

где $\eta(\tau)=\begin{cases}\tau, & |\tau|\le 1;\\ |\tau|^{q-1}\tau, & |\tau|>1,\end{cases}$ $q>-1$ таков, что $\sigma>\frac{n+2q}{n-2}$; отметим, что такое q можно подобрать при любом $\sigma>1$, $p=p(q)>2$ — решение уравнения $p=\frac{(p-2)(\sigma+q)}{1+q}$, т. е.

$$p=2\frac{\sigma+q}{\sigma-1}, \tag{25}$$

требуемое неравенство $p > 2$ выполнено при требуемом условии на $q > -1$. Отметим также, что функцию $\psi(x,t)$ можно подставлять в интегральное тождество из определения обобщенного решения, т. к. она принадлежит классу $W_2^{1,0}(Q_\varepsilon)$ в силу правила цепного дифференцирования ([14], с. 151) и обращается в нуль на границе области Q_ε, на границе области Q за счет того, что разница $u_\varepsilon(x,t) - u(x,t)$ обращается в нуль на ∂Q, а на границе дырок за счет множителя $\theta_\varepsilon^p(x)$. Отметим также, что поскольку на всех дырках этот множитель равен нулю, в интегральном тождестве мы можем в качестве области интегрирования писать Q.

Как и в доказательстве теоремы 1, обозначим $w_\varepsilon(x,t) = u_\varepsilon(x,t) - u(x,t)$. Для уравнения

$$Lw_\varepsilon(x,t) - \frac{\partial w_\varepsilon(x,t)}{\partial t} = a(x)(|u_\varepsilon(x,t)|^{\sigma-1}u_\varepsilon(x,t) - |u(x,t)|^{\sigma-1}u(x,t))$$

запишем интегральное тождество, взяв в качестве пробной функции $\psi(x,t)$ из (24), получим

$$\int_Q \Big(\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}(x)\frac{\partial w_\varepsilon(x,t)}{\partial x_j}\Big) - \frac{\partial w_\varepsilon(x,t)}{\partial t}\Big)\psi(x,t)dx\,dt =$$
$$= \int_Q a(x)\big(|u_\varepsilon(x,t)|^{\sigma-1}u_\varepsilon(x,t) - |u(x,t)|^{\sigma-1}u(x,t)\big)\psi(x,t)dx\,dt. \quad (26)$$

Обозначим $Q_1 = \{(x,t) \in Q : |u_\varepsilon(x,t) - u(x,t)| \le 1\} \subset Q$ и $Q_2 = \{(x,t) \in Q : |u_\varepsilon(x,t) - u(x,t)| > 1\} \subset Q$.

Оценим правую часть равенства (26), используя лемму 1 при $a = u_\varepsilon(x,t)$, $b = u(x,t)$,

$$\int_Q a(x)\big(|u_\varepsilon(x,t)|^{\sigma-1}u_\varepsilon(x,t) - |u(x,t)|^{\sigma-1}u(x,t)\big)\psi(x,t)dx\,dt =$$
$$= \int_{Q_1} a(x)(|u_\varepsilon(x,t)|^{\sigma-1}u_\varepsilon(x,t) - |u(x,t)|^{\sigma-1}u(x,t))w_\varepsilon(x,t)\theta_\varepsilon^p(x)dx\,dt +$$
$$+ \int_{Q_2} a(x)(|u_\varepsilon(x,t)|^{\sigma-1}u_\varepsilon(x,t) - u(x,t)^{\sigma-1}u(x,t))|w_\varepsilon(x,t)|^{q-1}w_\varepsilon(x,t)\theta_\varepsilon^p(x)dx\,dt \ge$$
$$\ge a_0C_\sigma \int_{Q_1} |w_\varepsilon(x,t)|^{\sigma+1}\theta_\varepsilon^p(x)dx\,dt + a_0C_\sigma \int_{Q_2} |w_\varepsilon(x,t)|^{\sigma+q}\theta_\varepsilon^p(x)dx\,dt. \quad (27)$$

После тождественных преобразований и интегрирования по частям в левой части равенства (26) получим

$$J_1 + J_2 + J_3 + J_4 \equiv -\int_{Q_1} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial w_\varepsilon(x,t)}{\partial x_j}\frac{\partial w_\varepsilon(x,t)}{\partial x_i}\theta_\varepsilon^p(x)dx\,dt -$$
$$-\int_{Q_1} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial w_\varepsilon(x,t)}{\partial x_j}w_\varepsilon(x,t)p\theta_\varepsilon^{p-1}(x)\frac{\partial \theta_\varepsilon(x)}{\partial x_i}dx\,dt -$$
$$-\int_{Q_2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial w_\varepsilon(x,t)}{\partial x_j}q|w_\varepsilon(x,t)|^{q-1}\frac{\partial w_\varepsilon(x,t)}{\partial x_i}\theta_\varepsilon^p(x)dx\,dt -$$
$$-\int_{Q_2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial w_\varepsilon(x,t)}{\partial x_j}|w_\varepsilon(x,t)|^{q-1}w_\varepsilon(x,t)p\theta_\varepsilon^{p-1}(x)\frac{\partial \theta_\varepsilon(x)}{\partial x_i}dx\,dt. \quad (28)$$

Оценим первое и третье слагаемые правой части тождества (28), учитывая (1),

$$J_1 \le -\frac{1}{\lambda}\int_{Q_1} |\bigtriangledown w_\varepsilon(x,t)|^2\theta_\varepsilon^p(x)dx\,dt; \quad (29)$$

$$J_3 \le -\frac{q}{\lambda}\int_{Q_2} |\bigtriangledown w_\varepsilon(x,t)|^2|w_\varepsilon(x,t)|^{q-1}\theta_\varepsilon^p(x)dx. \quad (30)$$

Для оценки второго и четвертого слагаемых правой части тождества (28) используется неравенство Юнга при $\alpha=\frac{1}{2}$, $a=|\bigtriangledown w_\varepsilon(x,t)|$, $b=|\bigtriangledown \theta_\varepsilon(x)|$. Выбирая $\beta=\frac{p\lambda^2}{\theta_\varepsilon(x)}$ и $\beta=\frac{p\lambda^2|w_\varepsilon(x,t)|}{q\theta_\varepsilon(x)}$ при каждом (x,t), соответственно получаем

$$\begin{aligned}
J_2 &\le p\lambda\int_{Q_1}|\bigtriangledown w_\varepsilon(x,t)||\bigtriangledown \theta_\varepsilon(x)|\theta_\varepsilon^{p-1}(x)dx\,dt\le\\
&\le p\lambda\int_{Q_1}\theta_\varepsilon^{p-1}(x)\left(\frac{\theta_\varepsilon(x)}{2p\lambda^2}|\bigtriangledown w_\varepsilon(x,t)|^2+\frac{p\lambda^2}{2\theta_\varepsilon(x)}|\bigtriangledown \theta_\varepsilon(x)|^2\right)dx\,dt=\\
&=\frac{1}{2\lambda}\int_{Q_1}|\bigtriangledown w_\varepsilon(x,t)|^2\theta_\varepsilon^{p}(x)dxdt+C_4\int_{Q_1}|\bigtriangledown \theta_\varepsilon(x)|^2\theta_\varepsilon^{p-2}(x)dx\,dt; \qquad (31)\\
J_4 &\le p\lambda\int_{Q_2}|\bigtriangledown w_\varepsilon(x,t)||\bigtriangledown \theta_\varepsilon(x)||w_\varepsilon(x,t)|^q\theta_\varepsilon^{p-1}(x)\le\\
&\le p\lambda\int_{Q_2}\theta_\varepsilon^{p-1}(x)|w_\varepsilon(x,t)|^q\left(\frac{q\theta_\varepsilon(x)}{2p\lambda^2|w_\varepsilon(x,t)|}|\bigtriangledown w_\varepsilon(x,t)|^2+\frac{p\lambda^2|w_\varepsilon(x,t)|}{2q\theta_\varepsilon(x)}|\bigtriangledown \theta_\varepsilon(x)|^2\right)dx\,dt=\\
&=\frac{q}{2\lambda}\int_{Q_2}|\bigtriangledown w_\varepsilon(x,t)|^2|w_\varepsilon(x,t)|^{q-1}\theta_\varepsilon^{p}(x)dx+C_5\int_{Q_2}|\bigtriangledown \theta_\varepsilon(x)|^2|w_\varepsilon(x,t)|^{q+1}\theta_\varepsilon^{p-2}(x)dx\,dt, \qquad (32)
\end{aligned}$$

где $C_4=\frac{p^2\lambda^3}{2}$, $C_5=\frac{p^2\lambda^3}{2q}$.

Теперь оценим второе слагаемое правой части неравенства (32). Полагая в неравенстве Юнга $a=|w_\varepsilon(x,t)|^{q+1}\theta_\varepsilon^{p-2}(x)$, $b=|\bigtriangledown \theta_\varepsilon(x)|^2$ при $\alpha=\frac{1+q}{\sigma+q}$ и выбрав $\beta=\frac{2C_5}{a_0C_\sigma}\alpha$, с учетом (25) получаем

$$C_5\int_{Q_2}|\bigtriangledown \theta_\varepsilon(x)|^2|w_\varepsilon(x,t)|^{q+1}\theta_\varepsilon^{p-2}(x)dx\,dt\le\frac{a_0C_\sigma}{2}\int_{Q_2}|w_\varepsilon(x,t)|^{\sigma+q}\theta_\varepsilon^{p}(x)dx\,dt+C_6\int_{Q_2}|\bigtriangledown \theta_\varepsilon(x)|^pdx\,dt, \qquad (33)$$

где $C_6=C_5\frac{\sigma-1}{\sigma+q}\left(\frac{2C_5}{a_0C_\sigma}\frac{1+q}{\sigma+q}\right)^{\frac{q+1}{\sigma-1}}=\frac{\sigma-1}{\sigma+q}\left(\frac{2(1+q)}{a_0C_\sigma(\sigma+q)}\right)^{\frac{q+1}{\sigma-1}}C_5^{\frac{\sigma+q}{\sigma-1}}$.

Рассмотрим теперь член, содержащий производные по t. Для этого заметим, что функция $\eta(\tau)$, входящая в определение $\psi(x,t)$, обладает первообразной

$$\eta_1(\tau)=\begin{cases}\frac{1}{2}\tau^2, & |\tau|\le 1;\\ \frac{1}{q+1}|\tau|^{q+1}, & |\tau|>1.\end{cases}$$

Действительно,

$$\left(\frac{1}{q+1}|\tau|^{q+1}\right)_\tau=\frac{1}{2}\frac{2}{q+1}(|\tau|^{2\frac{q+1}{2}})_\tau=\frac{1}{2}(|\tau|^2)_\tau(|\tau|^2)^{\frac{q-1}{2}}=\frac{1}{2}\tau(|\tau|^2)^{\frac{q-1}{2}}=\eta(\tau).$$

Поэтому член, содержащий производные по t, можем записать в виде

$$\begin{aligned}
-\int_Q\frac{\partial w_\varepsilon(x,t)}{\partial t}\psi(x,t)dx\,dt&=-\int_Q\frac{\partial w_\varepsilon(x,t)}{\partial t}\eta(w_\varepsilon(x,t))\theta_\varepsilon^p(x)dx\,dt=\\
&=-\int_Q\frac{\partial}{\partial t}(\eta_1(w_\varepsilon(x,t))\theta_\varepsilon^p(x))dx\,dt=-\int_\Omega(\eta_1(w_\varepsilon(x,t))\theta_\varepsilon^p(x))\Big|_0^Tdx\le 0. \qquad (34)
\end{aligned}$$

Последнее выполняется, поскольку $\eta_1(x,t)\theta_\varepsilon^p(x)$ положительно и обращается в нуль при $t=0$. Учитывая равенства (26), (28) и оценки (29)–(34), имеем

$$\begin{aligned}
&\int_Q\left(Lw_\varepsilon(x,t)\psi(x,t)-\frac{\partial w_\varepsilon(x,t)}{\partial t}\psi(x,t)\right)dx\,dt\le\int_Q Lw_\varepsilon(x,t)\psi(x,t)dx\,dt\le\\
&\le-\frac{1}{2\lambda}\int_{Q_1}|\bigtriangledown w_\varepsilon(x,t)|^2\theta_\varepsilon^p(x)dx\,dt-\frac{q}{2\lambda}\int_{Q_2}|\bigtriangledown w_\varepsilon(x,t)|^2|w_\varepsilon(x,t)|^{q-1}\theta_\varepsilon^p(x)dx\,dt+\\
&+C_4\int_{Q_1}|\bigtriangledown \theta_\varepsilon(x)|^2\theta_\varepsilon^{p-2}(x)dx\,dt+\frac{a_0C_\sigma}{2}\int_{Q_2}|w_\varepsilon(x,t)|^{\sigma+q}\theta_\varepsilon^p(x)dx\,dt+C_6\int_{Q_2}|\bigtriangledown \theta_\varepsilon(x)|^pdx\,dt. \qquad (35)
\end{aligned}$$

Объединяя (26), (27) и (35), получаем

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{2\lambda}\int_{Q_1}|\bigtriangledown w_\varepsilon(x,t)|^2\theta_\varepsilon^p(x)dx\,dt-\frac{q}{2\lambda}\int_{Q_2}|\bigtriangledown w_\varepsilon(x,t)|^2|w_\varepsilon(x,t)|^{q-1}\theta_\varepsilon^p(x)dx\,dt+\\
+C_4\int_{Q_1}|\bigtriangledown\theta_\varepsilon(x)|^2\theta_\varepsilon^{p-2}(x)dx\,dt+\frac{a_0C_\sigma}{2}\int_{Q_2}|w_\varepsilon(x,t)|^{\sigma+q}\theta_\varepsilon^p(x)dx\,dt+C_6\int_{Q_2}|\bigtriangledown\theta_\varepsilon(x)|^{2\frac{\sigma+q}{\sigma-1}}dx\,dt\geq\\
\geq a_0C_\sigma\int_{Q_1}|w_\varepsilon(x,t)|^{\sigma+1}\theta_\varepsilon^p(x)dx\,dt+a_0C_\sigma\int_{Q_2}|w_\varepsilon(x,t)|^{\sigma+q}\theta_\varepsilon^p(x)dx\,dt.
\end{aligned}
$$

После элементарных преобразований получаем

$$
\begin{aligned}
&C_4\int_{Q_1}|\bigtriangledown\theta_\varepsilon(x)|^2\theta_\varepsilon^{p-2}(x)dx\,dt+C_6\int_{Q_2}|\bigtriangledown\theta_\varepsilon(x)|^p dx\,dt\geq\\
&\geq a_0C_\sigma\int_{Q_1}|w_\varepsilon(x,t)|^{\sigma+1}\theta_\varepsilon^p(x)dx\,dt+\frac{1}{2\lambda}\int_{Q_2}|\bigtriangledown w_\varepsilon(x,t)|^2\theta_\varepsilon^p(x)dx\,dt+\\
&+\frac{a_0C_\sigma}{2}\int_{Q_2}|w_\varepsilon(x,t)|^{\sigma+q}\theta_\varepsilon^p(x)dx\,dt+\frac{q}{2\lambda}\int_{Q_2}|\bigtriangledown w_\varepsilon(x,t)|^2|w_\varepsilon(x,t)|^{q-1}\theta_\varepsilon^p(x)dx\,dt\geq\\
&\geq C_7\int_Q\frac{|w_\varepsilon(x,t)|^{\sigma+1}}{1+|w_\varepsilon(x,t)|^2}\theta_\varepsilon^p(x)dx\,dt+C_8\int_Q\frac{|\bigtriangledown w_\varepsilon(x,t)|^2}{1+|w_\varepsilon(x,t)|^2}\theta_\varepsilon^p(x)dx\,dt\geq\\
&\geq C_9\int\limits_{Q\setminus Q(4R_\varepsilon,T)}\frac{|\bigtriangledown w_\varepsilon(x,t)|^2+|w_\varepsilon(x,t)|^{\sigma+1}}{1+|w_\varepsilon(x,t)|^2}dx\,dt,
\end{aligned}
\tag{36}
$$

где $C_7=\frac{a_0C_\sigma}{2}$, $C_8=\min\{\frac{1}{2\lambda},\frac{q}{2\lambda}\}$, $C_9=\min\{C_7,C_8\}$.

Предпоследнее неравенство получено из следующего утверждения. Если $0\leq a\leq 1$, то выполнено неравенство $1\geq\frac{1}{1+a^2}$; если же $a>1$, то выполнено $a^{q-1}>\frac{1}{a^2}>\frac{1}{1+a^2}$ при $q>-1$.

Теперь докажем, что

$$
\int_{Q_1}|\bigtriangledown\theta_\varepsilon(x)|^2\theta_\varepsilon^{p-2}(x)dx\,dt\to 0\ \text{ при }\ \varepsilon\to 0 \tag{37}
$$

и

$$
\int_{Q_2}|\bigtriangledown\theta_\varepsilon(x)|^p dx\,dt\to 0\ \text{ при }\ \varepsilon\to 0. \tag{38}
$$

Действительно, т. к. $p>2$, то

$$
\int_{Q_1}|\bigtriangledown\theta_\varepsilon(x)|^2\theta_\varepsilon^{p-2}(x)dx\,dt\leq\int_Q|\bigtriangledown\theta_\varepsilon(x)|^2dx\,dt\leq C_{10}mR_\varepsilon^n\left(\frac{1}{R_\varepsilon}\right)^2=O(\varepsilon^{-1+(n-2)\gamma})\to 0
$$

при $\varepsilon\to 0$, если только $\gamma>\frac{1}{n-2}$, где $C_{10}=TC_\Omega^2\mu_n2^n$;

$$
\int_{Q_2}|\bigtriangledown\theta_\varepsilon(x)|^p dx\,dt\leq\int_Q|\bigtriangledown\theta_\varepsilon(x)|^p dx\,dt\leq C_{11}mR_\varepsilon^n\left(\frac{1}{R_\varepsilon}\right)^p=C_{11}\varepsilon^{-1}R_\varepsilon^{n-p}=O(\varepsilon^{-1+(n-p)\gamma})\to 0
$$

при $\varepsilon\to 0$, т. к. $\gamma>\frac{1}{n-p}>\frac{1}{n-2}$; здесь $C_{11}=TC_\Omega^{2\frac{\sigma+q}{\sigma-1}}\mu_n2^n$, μ_n — объем единичного n-мерного шара.

Из (36), (37) и (38) следует справедливость теоремы 2. □

Литература

1. Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G. *Asymtotic analysis for periodic structures.* – Amsterdam: North-Holland, 1978. – 700 p.
2. Жиков В.В., Козлов С.М., Олейник О.А. *Усреднение дифференциальных операторов.* – М.: Физматлит, 1993. – 464 с.
3. Марченко В.А., Хруслов Е.Я. *Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей.* – Киев: Наук. думка, 1974. – 280 с.
4. Brezis H., Friedman A. *Nonlinear parabolic equation involving measures as initial conditions* // J. Math. Pures Appl. – 1983. – V. 62. – № 1. – P. 73–97.
5. Brezis H., Peletier L.A., Terman D. *A very singular solutions of the heat equation with absorption* // Arch. Ration. Mech. Anal. – 1986. – V. 95. – № 3. – P. 185–209.
6. Kamin S., Peletier L.A. *Singular solutions of the heat equation with absorption* // Proc. Amer. Math. Society. – 1985. – V. 95. – № 2. – P. 205–210.
7. Ильин А.М., Олейник О.А., Калашников А.С. *Линейные уравнения второго порядка параболического типа* // УМН. – 1962. – Т. 17. – № 3. – С. 3–146.
8. Матевосян О.А., Пикулин С.В. *Об усреднении слабонелинейных дивергентных эллиптических операторов в перфорированном кубе* // Матем. заметки. – 2000. – Т. 68. – № 3. – С. 390–398.
9. Матевосян О.А., Пикулин С.В. *Об усреднении полулинейных эллиптических операторов в перфорированных областях* // Матем. сб. – 2002. – Т. 193. – № 3. – С. 101–114.
10. Кондратьев В.А., Ландис Е.М. *О качественных свойствах решений одного нелинейного уравнения второго порядка* // Матем. сб. – 1988. – Т. 135. – № 3. – С. 346–360.
11. Чистяков В.В. *О свойствах решений полулинейных параболических уравнений второго порядка* // Тр. семинара И.Г. Петровского. – 1991. – Вып. 15. – С. 70-107.
12. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.* – М.: Наука, 1967. – 736 с.
13. Littman W., Stampacchia G., Weinberger B. *Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients* // Ann. Scuola Norm. Super. Pisa. Ser. 3. – 1963. – V. 17. – № 1–2. – P. 43–77.
14. Гилбарг Д., Трудингер Н. *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка.* – М.: Наука, 1989. – 464 с.

Московский государственный университет

Поступила 30.06.2003