ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2005 МАТЕМАТИКА № 1 (512)

УДК 519.632

Г.И. ШИШКИН

О МЕТОДЕ АДАПТИРУЮЩИХСЯ СЕТОК ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ РЕАКЦИИ–ДИФФУЗИИ В ОБЛАСТИ С КРИВОЛИНЕЙНОЙ ГРАНИЦЕЙ

В области с криволинейной границей рассматривается краевая задача для сингулярно возмущенных эллиптических уравнений реакции–диффузии. Монотонные классические разностные схемы для задач такого типа сходятся лишь при условии $\varepsilon \gg N_1^{-1} + N_2^{-1}$, где ε — возмущающий параметр, величины N_1 и N_2 определяют число узлов сетки по переменным x_1 и x_2. Поэтому для сингулярно возмущенных уравнений в области с криволинейной границей необходимо развивать специальные численные методы, ошибки решений которых довольно слабо зависят от параметра ε и, в частности, не зависят от ε (т. е. ε-равномерно сходящиеся методы). Исследуются схемы на адаптивных сетках, локально сгущающихся в окрестности погранслоя. Оказывается, что в классе разностных схем на основе классических аппроксимаций задачи на прямоугольных сетках, априорно, либо апостериорно локально сгущающихся в погранслое, не существует схем, сходящихся ε-равномерно и даже при условии $\varepsilon \approx N_1^{-2} + N_2^{-2}$, если общее число узлов локально сгущающейся сетки порядка $N_1 N_2$. Таким образом, непосредственное использование технологии на основе адаптивных сеток не позволяет существенно расширить область сходимости классических численных методов. Использование техники поперечников по Колмогорову позволило установить условия, необходимые для ε-равномерной сходимости (при $P \to \infty$, где P — общее число узлов сетки) аппроксимаций решений краевых задач; требования, вытекающие из этих условий, кладутся в основу построения специальных сеток. Использование таких сгущающихся (в слое) сеток, однако, в локальной системе координат, адаптирующейся к границе области, позволяет строить схемы, сходящиеся ε-равномерно при $P \to \infty$.

1. Введение

Нередко при исследовании процессов тепломассообмена в средах с малыми коэффициентами теплопроводности/диффузии возникают краевые задачи для сингулярно возмущенных уравнений в частных производных (с возмущающим параметром ε — коэффициентом при старших производных уравнений), в частности, для эллиптических уравнений реакции–диффузии в областях с криволинейными границами. Решения таких задач при малых значениях параметра ε имеют особенности типа пограничных слоев. Эти особенности в сочетании с криволинейностью границ вызывают трудности при численном решении задачи (классическая разностная схема сходится лишь при условии $\varepsilon \gg N_1^{-1} + N_2^{-1}$, см., напр., утверждение теоремы 4.1). Для такого типа задачи в [1] построена специальная разностная (итерационная) схема, сходящаяся ε–равномерно со скоростью $\mathcal{O}(N^{-1} \ln N + q^{-n})$, где $N = \min[N_1, N_2]$, $q < 1$, n — номер итерации. При построении схемы в окрестности границы области использовались сгущающиеся в погранслое сетки, являющиеся прямоугольными в координатах, связанных с границей. При построении таких сеток, согласованных с границей, используются криволинейные координаты, в

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов №№ 04-01-00578, 04-01-89007-НВО_а) и Нидерландской организации научных исследований NWO (проект № 047.016.008).

которых граница области есть координатная линия. В связи с достаточной сложностью этой схемы возникает интерес к альтернативным методам построения специальных схем.

В случае сингулярно возмущенных задач в областях с криволинейными границами при разработке специальных численных методов, погрешность решений которых достаточно слабо зависит от величины параметра ε и, в частности, ε-равномерно сходящихся методов, представляется целесообразным использовать методы на основе локально сгущающихся сеток. Такие методы достаточно хорошо разработаны для ряда сингулярно возмущенных краевых задач на прямоугольных областях (см., напр., [1]–[4] и библиографию там же). Так, в случае регулярных краевых задач, решения которых имеют особенности (большие производные), эффект повышения точности приближенного решения может быть достигнут за счет априорного и/или апостериорного локального сгущения прямоугольной сетки в тех подобластях, где ошибки приближенного решения большие (напр., [5]–[7]). В случае сингулярно возмущенных уравнений в областях с криволинейными границами представляют интерес численные методы на основе (достаточно простых) сеток, локально сгущающихся в пограничном слое, однако не использующих криволинейные координаты, связанные с границей области (или, короче, на основе локально сгущающихся сеток, не согласованных в погранслое с границей).

В данной работе показано, что непосредственное использование такого подхода в случае сингулярно возмущенных задач в областях с криволинейными границами не является достаточно эффективным. Для классических аппроксимаций задачи реакции–диффузии на адаптирующихся, локально сгущающихся сетках (прямоугольных в окрестности погранслоя) сходимость сеточных решений недостижима уже при условии $\varepsilon^{1/2} \approx N_1^{-1} + N_2^{-1}$ (см., напр., утверждение теоремы 5.1). Использование техники поперечников по Колмогорову позволяет для распределения сеточных узлов указать условия, необходимые, а также и достаточные, для ε-равномерной сходимости (с ростом числа узлов сетки, определяющей триангуляцию области) аппроксимаций решений краевой задачи (см. раздел 6). В частности, при построении схем, сходящихся, например, при $N_1^{-1} + N_2^{-1} = \mathcal{O}(\varepsilon^\alpha)$, $\alpha < 4^{-1}$, требуется использовать (сгущающиеся в погранслое) сетки на основе криволинейной системы координат, согласованной с границей области. В то же время локально сгущающиеся сетки, согласованные в погранслое с границей, позволяют построить схему, сходящуюся ε-равномерно со скоростью $\mathcal{O}(N_1^{-2}\ln^2 N_1 + N_2^{-2}\ln^2 N_2)$ (пример построения специальной схемы см. в разделе 7).

Заметим, что в [8] при построении специальных схем для рассматриваемого класса задач применялись локально сгущающиеся сетки, порождаемые прямыми, параллельными координатным осям. Схемы на таких сетках сходятся на $\overline{D}$ — множестве определения решения — при более слабом условии, накладываемом на параметр ε, чем в случае классических разностных схем, а также сходятся ε-равномерно, однако лишь на подмножествах из $\overline{D}$, а именно, вне пограничного слоя и на достаточно узких множествах, "пересекающих" пограничный слой. Как следует из данной работы, достаточно простые специальные сетки, используемые в [8], не позволяют строить схемы, сходящиеся ε-равномерно на всем множестве $\overline{D}$.

2. Постановка задачи. Цель исследования

2.1. В ограниченной области D с достаточно гладкой границей $\varGamma = \overline{D} \setminus D$ рассмотрим задачу Дирихле для сингулярно возмущенного эллиптического уравнения реакции–диффузии

$$Lu(x) = f(x), \quad x \in D; \tag{2.1а}$$

$$u(x) = \varphi(x), \quad x \in \varGamma. \tag{2.1б}$$

Здесь

$$L \equiv \varepsilon^2 L_2 + L_0, \quad L_0 \equiv -c_0(x), \quad L_2 \equiv \sum_{s,k=1}^{2} a_{sk}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_s \partial x_k} + \sum_{s=1}^{2} b_s(x)\frac{\partial}{\partial x_s} - c(x);$$

коэффициенты и правая часть уравнения, а также граничная функция предполагаются достаточно гладкими и удовлетворяющими условию[1]

$$a_0(\xi_1^2+\xi_2^2) \le \sum_{s,k=1}^{2} a_{sk}(x)\xi_s\xi_k \le a^0(\xi_1^2+\xi_2^2), \quad c_0(x) \ge c_{00}, \quad c(x) \ge 0, \tag{2.2}$$
$$|f(x)| \le M, \quad x \in \overline{D}; \quad |\varphi(x)| \le M, \quad x \in \varGamma, \quad a_0, c_{00} > 0;$$

параметр ε принимает произвольные значения из полуинтервала $(0,1]$.

При $\varepsilon \to 0$ в окрестности границы $\varGamma$ появляется (регулярный) пограничный слой, экспоненциально убывающий при удалении от $\varGamma$.

2.2. Ошибки решений разностных схем, построенных на основе классических разностных аппроксимаций задачи (2.1), зависят от величины параметра ε и становятся малыми лишь при значениях параметра ε, существенно превосходящих "эффективные" шаги сеток по x_1, x_2. В силу оценки (4.10) классическая разностная схема (4.5), (4.9) (см. раздел 4) сходится при условии

$$\varepsilon \gg N_1^{-1} + N_2^{-1}, \tag{2.3}$$

где величины N_1, N_2 определяют число узлов сеток по x_1, x_2. При нарушении этого условия решения разностной схемы не сходятся к решению задачи (2.1).

В связи с отмеченным поведением сеточных решений возникает интерес к построению специальных разностных схем, погрешность решений которых не зависит от величины параметра ε. В частности, представляют интерес разностные схемы, сходящиеся при более слабом условии, чем (2.3) — условие сходимости решений сеточных задач (4.5), (4.8) и (4.5), (4.9).

Цель работы — для краевой задачи (2.1) с использованием метода сгущающихся сеток построить разностные схемы, сходящиеся ε-равномерно, а также схемы, близкие к таковым, а именно, сходящиеся при значениях ε, много меньших, чем в условии (2.3). Указываются условия, накладываемые на распределение сеточных узлов, которые обеспечивают построение схем указанного типа.

3. Априорные оценки

Приведем априорные оценки решения задачи (2.1), используемые в дальнейших построениях (см. также [1]–[4]).

С использованием принципа максимума, а также априорных оценок для регулярных краевых задач [9] (внутренних оценок и оценок вплоть до гладких частей границы) устанавливаются оценки

$$|u(x)| \le M, \qquad x \in \overline{D}; \tag{3.1а}$$
$$\left|\frac{\partial^k}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}}\, u(x)\right| \le M\varepsilon^{-k}, \quad x \in \overline{D}, \quad k \le K; \tag{3.1б}$$

при достаточно гладких данных задачи величина K может быть выбрана достаточно большой. Заметим, что в переменных $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2)$, $\zeta_s = \varepsilon^{-1}x_s$, $s = 1, 2$, дифференциальное уравнение является регулярным.

При выводе оценок на основе асимптотики решение задачи представим в виде суммы функций

$$u(x) = U(x) + V(x), \quad x \in \overline{D}, \tag{3.2}$$

[1] Здесь и ниже через M (через m) обозначаем достаточно большие (малые) положительные постоянные, не зависящие от величины параметра ε и от параметров разностных схем. Запись $L_{(j.k)}$ ($M_{(j.k)}$, $D_{h(j.k)}$) означает, что эти операторы (постоянные, сетки) введены в формуле $(j.k)$.

где $U(x)$ и $V(x)$ — регулярная и сингулярная части решения. Функция $U(x)$ — сужение на $\overline{D}$ функции $U^0(x)$, $x \in R^2$, являющейся ограниченным решением уравнения

$$L^0 U^0(x) = f^0(x), \quad x \in R^2;$$

оператор L^0 и функция $f^0(x)$ — продолжения оператора $L_{(2.1)}$ и функции $f_{(2.1)}(x)$ с множества $\overline{D}$ на R^2 с сохранением свойств. Для простоты вне ближайшей окрестности множества $\overline{D}$ функцию $f^0(x)$ считаем равной нулю, а оператор L^0 определяем соотношением $L^0 \equiv \varepsilon^2\Delta - 1$. Функция $V(x)$, $x \in \overline{D}$, — решение задачи

$$\begin{aligned} LV(x) &= 0, & x &\in D, \\ V(x) &= \varphi(x) - U(x), & x &\in \Gamma. \end{aligned}$$

Функцию $U^0(x)$, $x \in R^2$, представим в виде суммы функций

$$U^0(x) = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon^{2k}\, U_k^0(x) + v_U^n(x) \equiv U^{0n}(x) + v_U^n(x), \quad x \in R^2,$$

где $n \geq 0$; $v_U^n(x)$ – остаточный член разложения. Функции $U_k^0(x)$ — компоненты регулярной части решения являются решениями задач

$$\begin{gathered} L_0^0\, U_0^0(x) \equiv -c_0^0(x)\, U_0^0(x) = f^0(x), \quad x \in R^2; \\ L_0^0 U_k^0(x) = -L_2^0\, U_{k-1}^0(x), \quad x \in R^2, \quad 0 < k \leq n, \end{gathered}$$

где

$$L_2^0 \equiv \sum_{s,k=1}^{2} a_{sk}^0(x) \frac{\partial^2}{\partial x_s \partial x_k} + \sum_{s=1}^{2} b_s^0(x) \frac{\partial}{\partial x_s} - c^0(x),$$

функции $a_{sk}^0(x), \ldots, c_0^0(x)$ — продолжения функций $a_{sk}(x), \ldots, c_0(x)$, определяющих оператор L. С учетом оценок компонент $U_k^0(x)$, $v_U^n(x)$ находится оценка для производных функции $U^0(x)$, $x \in \overline{D}$ (остаточный член $v_U^n(x)$ оцениваем с учетом оценки (3.1б), см., напр., [2]). Для функции $U(x)$ получаем оценку

$$\left| \frac{\partial^k}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2}}\, U(x) \right| \leq M[1 + \varepsilon^{2(n+1)-k}], \quad x \in \overline{D}, \quad k \leq K.$$

При $n \geq 2^{-1}K - 1$ имеем

$$\left| \frac{\partial^k}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2}}\, U(x) \right| \leq M, \quad x \in \overline{D}, \quad k \leq K. \tag{3.3а}$$

Для функции $V(x)$ с учетом оценки (3.3а) находим

$$\left| \frac{\partial^k}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2}} V(x) \right| \leq M\varepsilon^{-k} \exp(-m\varepsilon^{-1} r(x, \Gamma)), \qquad x \in \overline{D}, \quad k \leq K, \tag{3.3б}$$

где $r(x, \Gamma)$ — расстояние от точки x до множества Γ.

Уточним оценку (3.3б). Область $\overline{D}$ представим в виде суммы перекрывающихся подобластей

$$\overline{D} = \overline{D}^1 \cup \overline{D}^2, \tag{3.4}$$

где множество $\overline{D}^1$ есть "кольцо" — m_1-окрестность границы Γ, а множество $\overline{D}^2$ не имеет общих точек с Γ. Считаем, что $r(x, \Gamma) \leq m_1$, $x \in \overline{D}^1$, где постоянная m_1 меньше радиуса кривизны границы Γ; $r(x^2, \Gamma) \geq m$, $x^2 \in \overline{D}^2$; $r(x^1, x^2) \geq \delta$, $x^i \in \overline{D}^i$, $i = 1, 2$, $x^1, x^2 \notin D^1 \cap D^2$, δ — ширина минимального перекрытия подобластей.

На множестве $\overline{D}^1$ перейдем к переменным $\xi = (\xi_1, \xi_2)$:

$$\xi_s = \xi_s(x), \quad s = 1, 2,$$

где $\xi_1(x)$ — расстояние от точки x до границы Γ, $\xi_2(x)$ — длина дуги границы Γ (при обходе ее в заданном направлении) от фиксированной точки $x^0 \in \Gamma$ до точки $x^1 \in \Gamma$, ближайшей к точке x. Для функций $v(x)$, $x \in \overline{D}^1$, $W(\xi)$, $\xi \in \overline{\widetilde{D}}^1$, где $\widetilde{D}^1 = \{\xi : \xi = \xi(x),\ x \in D^1\}$, будем использовать обозначения

$$v(x(\xi)) = v_\xi(\xi) = \{v(x)\}_\xi, \quad W(\xi(x)) = W_x(x),$$
$$D^0_\xi = \xi(D^0) = \{\xi : \xi = \xi(x),\ x \in D^0\}, \quad D^0 \subseteq \overline{D}^1.$$

Здесь $x = x(\xi)$ — отображение, обратное $\xi = \xi(x)$. Полагаем

$$\widetilde{D}^0_x = x(\widetilde{D}^0) = \{x : x = x(\xi),\ \xi \in \widetilde{D}^0\},$$

где $\widetilde{D}^0$ — некоторое подмножество из $\overline{\widetilde{D}}^1$.

В новых переменных уравнение (2.1а) на $\widetilde{D}^1$ принимает вид

$$\widetilde{L}U(\xi) = F(\xi), \quad \xi \in \widetilde{D}^1.$$

Здесь

$$\widetilde{L} = L_\xi \equiv \varepsilon^2 \Big\{ \sum_{s,k=1}^{2} A_{sk}(\xi) \frac{\partial^2}{\partial \xi_s \partial \xi_k} + \sum_{s=1}^{2} B_s(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi_s} - C(\xi) \Big\} - C_0(\xi),$$

коэффициенты оператора $\widetilde{L}$ определяются через коэффициенты оператора $L_{(2.1)}$:

$$A_{sk}(\xi) = \Big\{ \sum_{r,p=1,2} a_{rp}(x) \frac{\partial}{\partial x_r} \xi_s(x) \frac{\partial}{\partial x_p} \xi_k(x) \Big\}_\xi, \qquad s,k = 1,2;$$
$$B_s(\xi) = \Big\{ \sum_{r=1,2} b_r(x) \frac{\partial}{\partial x_r} \xi_s(x) + \sum_{r,p=1,2} a_{rp}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_r \partial x_p} \xi_s(x) \Big\}_\xi, \qquad s = 1,2,$$

функции C, C_0, F, U определяются соотношением $V(\xi) = v_\xi(\xi)$.

Задаче (2.1) в случае разбиения области (3.4) соответствует задача

$$\widetilde{L}U(\xi) = F(\xi), \quad \xi \in \widetilde{D}^1, \tag{3.5а}$$
$$U(\xi) = \begin{cases} \Phi(\xi), & \xi \in \widetilde{\Gamma}^1 \cap \widetilde{\Gamma}; \\ u_\xi(\xi), & \xi \in \widetilde{\Gamma}^1 \setminus \widetilde{\Gamma}, \end{cases}$$
$$Lu(x) = f(x), \quad x \in D^2, \tag{3.5б}$$
$$u(x) = U_x(x), \quad x \in \Gamma^2,$$

где $\Phi(\xi) = \varphi_\xi(\xi)$. Подзадача (3.5а) есть периодическая задача (по переменной ξ_2) на (вертикальной) полосе.

Оценим производную $(\partial/\partial\xi_2)U^S(\xi) \equiv U^S_1(\xi)$ сингулярной компоненты $U^S(\xi)$ в представлении

$$U(\xi) = U^R(\xi) + U^S(\xi), \quad \xi \in \overline{\widetilde{D}}^1; \tag{3.6}$$

здесь $U^R(\xi)$ и $U^S(\xi)$ — регулярная и сингулярная части решения задачи (3.5а), $U^R(\xi) = \{U(x)\}_\xi$, $U^S(\xi) = \{V(x)\}_\xi$, $U(x)$ и $V(x)$ — компоненты из (3.2). В силу оценки (3.3а) функция $U^S_1(\xi)$ ограничена ε-равномерно на множестве $\widetilde{\Gamma}^1 \cap \widetilde{\Gamma}$. Дифференцируя по ξ_2 уравнение

$$\widetilde{L}U^S(\xi) = 0, \quad \xi \in \widetilde{D}^1,$$

и принимая во внимание оценку (3.3б), находим

$$\left| \frac{\partial}{\partial \xi_2} U^S(\xi) \right| \le M \exp(-m\varepsilon^{-1} r(\xi, \widetilde{\Gamma})), \quad \xi \in \overline{\widetilde{D}}^1.$$

Подобным образом оцениваем производные $(\partial^k/\partial\xi_1^{k_1}\partial\xi_2^{k_2})U^S(\xi)$, $\xi \in \overline{\widetilde{D}}^1$.

Для компонент из (3.6) получаются оценки

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial\xi_1^{k_1}\partial\xi_2^{k_2}}U^R(\xi)\right| \le M, \tag{3.7}$$
$$\left|\frac{\partial^k}{\partial\xi_1^{k_1}\partial\xi_2^{k_2}}U^S(\xi)\right| \le M\varepsilon^{-k_1}\exp(-m\varepsilon^{-1}r(\xi,\widetilde{\Gamma})), \quad \xi\in\overline{\widetilde{D}}{}^1, \quad k\le K.$$

В оценках (3.3), (3.7) величина m — произвольная постоянная из интервала $(0,m_0)$, $m_0 = \min\limits_{\overline{D}^1}{}^{1/2}[(a^0)^{-1}c_0(x)]$, $a^0 = a^0_{(2.3)}$.

Таким образом, установлена следующая

Теорема 3.1. *Пусть* $a_{sk}, b_s, c, c_0, f \in C^{l+\alpha}(\overline{D})$, $\varphi\in C^{l+\alpha}(\Gamma)$, $\Gamma\in C^{l+\alpha}$, $l\ge 0$, $\alpha>0$, $s,k = 1,2$. *Тогда для решений задачи* (2.1) *и его компонент из представлений* (3.2), (3.6) *справедливы оценки* (3.1), (3.3), (3.7), *где* $K = 2[(l+2)/4]$; $[\cdot]$ — *целая часть числа.*

4. Классические разностные схемы

Выпишем классическую разностную схему для задачи (2.1) и укажем некоторые трудности, возникающие при численном решении при малых значениях параметра ε.

На плоскости R^2 введем прямоугольные базовые сетки, на основе которых будем строить сетки на $\overline{D}$. Пусть

$$R^2_h = \omega_1\times\omega_2, \tag{4.1}$$

где ω_s — сетка на оси x_s, $s=1,2$; ω_s — сетки с произвольным распределением узлов, удовлетворяющим лишь условию $h\le MN^{-1}$, где $h=\max\limits_s h_s$, $h_s = \max\limits_i h_s^i$, $h_s^i = x_s^{i+1}-x_s^i$, x_s^i, $x_s^{i+1}\in\omega_s$, $N=\min[N_1,N_2]$, N_s+1 — минимальное число узлов сетки ω_s на отрезке единичной длины на оси x_s. Наибольший интерес для нас будут представлять сетки, равномерные по x_1 и x_2

$$R^2_h = R^2_{h(4.1)}, \tag{4.2}$$

где ω_s — равномерные сетки с шагами $h_s = N_s^{-1}$, $s=1,2$. На множестве $\overline{D}$ строим сетку $\overline{D}_h = \overline{D}_h(R^2_{h(4.1)})$ на основе базовой сетки $R^2_{h(4.1)}$ (напр., [10]). Пусть $D_h = D\cap R^2_h$ — множество внутренних узлов и Γ_h — множество граничных узлов, есть множество точек пересечения прямых $x_s = x_s^{i_s}$, $s=1,2$, с границей Γ, $(x_1^{i_1},x_2^{i_2})\in D_h$. Полагаем

$$\overline{D}_h = D_h\cup\Gamma_h; \tag{4.3}$$

для каждого узла $x\in D_h$ имеются ближайшие соседние узлы из $\overline{D}_h$, образующие пятиточечный шаблон типа "прямой крест" с центром в точке x. К строго внутренним узлам $D_h^{(in)} = D^{(in)}_{h(4.3)}$ отнесем те узлы x, для которых все узлы девятиточечного шаблона типа "ящик" (с центром x) принадлежат D_h. Заметим, что величина P — число узлов множества $\overline{D}_h$, порядка N_1N_2.

Оператору $L_{(2.1)}$ на сетке $\overline{D}_{h(4.3)}$ сопоставим сеточный оператор

$$\Lambda = \Lambda(L;\overline{D}_h) \equiv \varepsilon^2\Big\{\sum_{s=1}^2 a_{ss}(x)\delta_{\overline{xs}\,\widehat{xs}} + 2^{-1}\eta(x)\sum_{\substack{s,k=1\\ s\ne k}}^2[a^+_{sk}(x)(\delta_{xs\,xk}+\delta_{\overline{xs}\,\overline{xk}})+$$
$$+a^-_{sk}(x)(\delta_{xs\,\overline{xk}}+\delta_{\overline{xs}\,xk})] + \sum_{s=1}^2 b_s(x)\delta_{\widetilde{xs}} - c(x)\Big\} - c_0(x). \tag{4.4}$$

Здесь $\delta_{\overline{xs}\,\widehat{xs}}z(x) = z_{\overline{xs}\,\widehat{xs}}(x),\ldots,\delta_{\overline{xs}\,xk}z(x) = z_{\overline{xs}\,xk}(x)$ и $\delta_{\widetilde{xs}}z(x) = z_{\widetilde{xs}}(x)$ — вторые и первые (центральные) разностные производные, например, $\delta_{\overline{x1}\,\widehat{x1}}z(x) = 2(h_1^i+h_1^{i-1})^{-1}[\delta_{x1}-\delta_{\overline{x1}}]z(x)$, $\delta_{\overline{x1}\,x2}z(x) = (h_1^{i-1})^{-1}[\delta_{x2}z(x)-\delta_{x2}z(x_1^{i-1},x_2)]$, $\delta_{\overline{x1}}z(x) = (h_1^{i-1})^{-1}[z(x)-z(x_1^{i-1},x_2)]$, $x=(x_1^i,x_2)$, $\eta(x)=1$, $x\in D_h^{(in)}$, $\eta(x)=0$, $x\in D_h\setminus D_h^{(in)}$; $v^+(x) = 2^{-1}(v(x)+|v(x)|)$, $v^-(x)=2^{-1}(v(x)-|v(x)|)$.

Задачу (2.1) аппроксимируем разностной схемой

$$\begin{aligned} \Lambda z(x) &= f(x), \quad x \in D_h, \\ z(x) &= \varphi(x), \quad x \in \Gamma_h. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Разностная схема (4.5), (4.3) (при $N \geq N_0$, где N_0 — достаточно большое число) монотонна [10], если выполняется условие

$$a_{12}(x) \equiv 0, \quad x \in \overline{D}. \tag{4.6}$$

При нарушении этого условия непосредственно убеждаемся, что схема (4.5), (4.3) монотонна, если для распределения узлов $\overline{D}_h$ выполняется условие

$$\min_{s, D_h^{(in)}} \{2(h_s^{i_s} + h_s^{i_s-1})^{-1} a_{ss}(x) - \max[(h_{3-s}^{i_{3-s}})^{-1}, (h_{3-s}^{i_{3-s}-1})^{-1}] |a_{12}(x)| - |b_s(x)|\} \geq 0; \tag{4.7}$$

признаки монотонности см., например, в [10]. Это условие справедливо, например, если максимальный и минимальный шаги сетки ω_s соизмеримы, величины N_1 и N_2 одного порядка, а коэффициент $a_{12}(x)$ мал по сравнению с коэффициентами $a_{11}(x)$, $a_{22}(x)$.

Будем предполагать, что выполняется условие (4.6) либо (4.7).

Принимая во внимание априорные оценки (3.3), (3.7), с использованием техники мажорантных функций в случае сетки

$$\overline{D}_h = \overline{D}_h(R^2_{h(4.1)}) \tag{4.8}$$

устанавливаем оценку

$$|u(x) - z(x)| \leq M(\varepsilon + N^{-1})^{-1} N^{-1}, \quad x \in \overline{D}_h.$$

Здесь в качестве мажорантной используем функцию $w(x) = \text{const}$, $x \in \overline{D}$. На сетке

$$\overline{D}_h = \overline{D}_h(R^2_{h(4.2)}) \tag{4.9}$$

получается оценка

$$|u(x) - z(x)| \leq M \sum_{s=1,2} (\varepsilon + N_s^{-1})^{-2} N_s^{-2}, \quad x \in \overline{D}_h. \tag{4.10}$$

Введем некоторые определения. Пусть на множестве $E_{N,\varepsilon} = E_N \times E_\varepsilon$, где E_N — подмножество из множества пар натуральных чисел N_1, N_2, удовлетворяющих условию $N_1, N_2 \geq M_0$, $E_\varepsilon = \{\varepsilon : \varepsilon \in (0,1]\}$, определены функции $\psi_i(N_1^{-1}, N_2^{-1}, \varepsilon)$, $i = 1,2$; $\psi_i(N_1^{-1}, N_2^{-1}, \varepsilon) > 0$. Запись $\psi_1(N_1^{-1}, N_2^{-1}, \varepsilon) = \widehat{o}(\psi_2(N_1^{-1}, N_2^{-1}, \varepsilon))$ на $E_{N,\varepsilon}$ означает, что найдется такая точка $(\widetilde{N}_1^{-1}, \widetilde{N}_2^{-1}, \widetilde{\varepsilon})$, для которой выполняется соотношение

$$\psi_1(N_1^{-1}, N_2^{-1}, \varepsilon)[\psi_2(N_1^{-1}, N_2^{-1}, \varepsilon)]^{-1} \to 0 \ \text{ при } \ (N_1^{-1}, N_2^{-1}, \varepsilon) \to (\widetilde{N}_1^{-1}, \widetilde{N}_2^{-1}, \widetilde{\varepsilon}),$$
$$(N_1^{-1}, N_2^{-1}, \varepsilon),\ (\widetilde{N}_1^{-1}, \widetilde{N}_2^{-1}, \widetilde{\varepsilon}) \in E_{N,\varepsilon}.$$

Пусть для сеточной функции $z(x)$, $x \in \overline{D}_h$, — решения некоторой разностной схемы, выполняется оценка

$$|u(x) - z(x)| \leq M\mu(N_1^{-1}, N_2^{-1}, \varepsilon), \quad x \in \overline{D}_h.$$

Будем говорить, что эта *оценка неулучшаема* по вхождению величин N_1, N_2, ε, если оценка

$$|u(x) - z(x)| \leq M\mu_0(N_1^{-1}, N_2^{-1}, \varepsilon), \quad x \in \overline{D}_h,$$

вообще говоря, неверна в том случае, когда $\mu_0(N_1^{-1}, N_2^{-1}, \varepsilon) = \widehat{o}(\mu(N_1^{-1}, N_2^{-1}, \varepsilon))$ на $E_{N,\varepsilon}$.

Пусть при $N_1, N_2 \to \infty$, $\varepsilon \in E_\varepsilon$, решение разностной схемы сходится к решению краевой задачи в случае условия $N_1^{-1}, N_2^{-1} = o(\varepsilon^\nu)$, $\varepsilon \in E_\varepsilon$, однако сходимость при условии $N_1^{-1}, N_2^{-1} = \mathcal{O}(\varepsilon^\nu)$, вообще говоря, не имеет места. В этом случае будем говорить, что разностная схема *сходится с дефектом* ν относительно параметра ε (или, короче, сходится с дефектом ν). При $\nu = 0$ сходимость схемы ε-равномерная.

Рассматривая решения модельных задач, убеждаемся, что оценка (4.10) является неулучшаемой по вхождению величин N_1, N_2, ε. Отсюда вытекает, что условие $(\varepsilon^{-1}N_1^{-1}, \varepsilon^{-1}N_2^{-1} \to 0$ при $N_1, N_2 \to \infty$, $(N_1^{-1}, N_2^{-1}, \varepsilon) \in E_{N,\varepsilon})$

$$N_1^{-1},\, N_2^{-1} = o(\varepsilon), \quad N_1, N_2 \to \infty, \tag{4.11}$$

является необходимым и достаточным для сходимости решений разностной схемы (4.5), (4.9); схема сходится с дефектом $\nu = 1$.

Таким образом, справедлива

Теорема 4.1. *Пусть для компонент решений краевой задачи* (2.1) *из представлений* (3.2), (3.6) *выполняются априорные оценки* (3.3), (3.7), *где* $K = 4$, *и пусть выполняется условие* (4.6) *либо* (4.7). *Тогда решение разностной схемы* (4.5), (4.9) *сходится при условии* (4.11); *для сеточных решений справедлива оценка* (4.10).

Замечание 4.1. На основе сетки $\overline{D}_h$ построим триангуляцию области $\overline{D}$; треугольные элементы, получаемые разбиением элементарных четырехугольных элементов диагональю, имеют вершинами узлы из $\overline{D}_h$ (напр., [11]); элементы, примыкающие к границе Γ, имеют криволинейные стороны. В случае разностной схемы (4.5), (4.9) для функции $\overline{z}(x)$, $x \in \overline{D}$, являющейся линейным интерполянтом $z(x)$ на треугольных элементах, выполняется оценка, подобная оценке (4.10):

$$|u(x) - \overline{z}(x)| \le M \sum_{s=1,2} (\varepsilon + N_s^{-1})^{-2} N_s^{-2}, \quad x \in \overline{D},$$

неулучшаемая по вхождению величин N_s, ε.

5. О построении ε-равномерно сходящихся схем на локально сгущающихся сетках

Заметим, что сингулярная компонента решения краевой задачи (2.1) экспоненциально убывает при удалении от границы Γ. Сингулярная компонента при $r(x, \Gamma) \ge \sigma$ не превосходит величины $M\delta$, где δ — достаточно малое число, когда $\sigma = m_1^{-1}\varepsilon \ln \delta^{-1}$, m_1 — произвольное число из интервала $(0, m_0)$, $m_0 = m_{0(3.7)}$. Невязка разностной схемы на решении краевой задачи велика, однако лишь на этой окрестности, являющейся достаточно узкой при малых значениях параметра ε (см. [1], [2], [4]). Это свойство разностной схемы будем использовать при построении схем, сходящихся с возможно малым дефектом.

5.1. Имея в виду возможность использования схем на достаточно произвольных локально сгущающихся сетках для решения краевой задачи, будет удобно ввести сбалансированные сетки — сетки с произвольным распределением узлов (по x_1 и x_2), однако, имеющие на $\overline{D}$ общее число узлов порядка $\mathcal{O}(N_1 N_2)$, т. е. такого же порядка, как и в случае равномерных базовых сеток. Таким образом, объем вычислительной работы (пропорциональный числу узлов, в которых требуется найти решение сеточной задачи) одного порядка для сбалансированных и равномерных сеток. Сбалансированные сетки, вообще говоря, не являются прямым произведением сеток по x_1 и x_2. Подстраивание ориентации шаблонов сеточных уравнений к границе Γ не предполагается.

5.2. Рассмотрим краевую задачу (2.1) и класс разностных схем на основе классических аппроксимаций задачи в случае локально сгущающихся “кусочно–равномерных” сеток — сеток, равномерных как в ближайшей окрестности границы Γ, так и вне несколько большей ее окрестности.

5.2.1. Для простоты предполагаем, что граница Γ проходит через начало координат и на множестве D^0 — m^0-окрестности начала координат, задается уравнением $x_2 = x_1$, причем, множеству D принадлежат точки, для которых выполняется соотношение $x_2 < x_1$. Пусть каким–то образом на $\overline{D}$ построена сетка

$$\overline{D}_h^* = \overline{D}_h^*(D_1, D_2) = \overline{D}_h^*(\rho_1), \tag{5.1}$$

где $\rho_1 > 0$ — параметр, определяющий распределение узлов сетки (5.1); этот параметр выбирается ниже. Эта сетка является равномерной на множествах D_1 и D_2, $D_1, D_2 \subset \overline{D}^0$, где $D_1 = D_1(\rho_1) \subset \overline{D}$ есть ρ_1-окрестность границы Γ (из m^0-окрестности начала координат), $D_2 = \{D \cap D^0\} \setminus \overline{D}_1(M\rho_1)$. Сетка $D_{ih} = D_i \cap \overline{D}^*_{h(5.1)}$ имеет шаг h_{is} по x_s, $s = 1, 2$. Считаем для простоты, что шаблоны схем, имеющие центром узлы из D_{ih}, правильные, т. е. их "плечи" равны как по направлению x_1, так и по x_2, и что выполнено условие

$$a_{ss}(x) = c_0(x) \equiv 1, \quad a_{12}(x) = b_s(x) = c(x) \equiv 0, \quad x \in \overline{D}, \quad s = 1, 2.$$

Рассмотрим фрагменты сеточной задачи из класса разностных схем на сетках (5.1), а именно, фрагменты на множествах D_{1h} и D_{2h}. Пусть $z_i(x)$, $x \in \overline{D}_{ih}$, — решение сеточной задачи

$$\begin{aligned} \Lambda_{(4.5)} z_i(x) &= f(x), \quad x \in D_{ih}; \\ z_i(x) &= u(x), \quad x \in \Gamma_{ih}, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \tag{5.2}$$

где $u(x)$, $x \in \overline{D}$, — решение задачи (2.1).

Для функций $z_i(x)$, $x \in \overline{D}_{ih}$, с учетом априорных оценок (3.3), (3.7) получаем оценки

$$|u(x) - z_1(x)| \le M \sum_{s=1,2} (\varepsilon + h_{1s})^{-2} h_{1s}^2, \quad x \in \overline{D}_{1h}; \tag{5.3а}$$

$$|u(x) - z_2(x)| \le M \Big\{ \Big[\sum_{s=1,2} (\varepsilon + h_{2s})^{-2} h_{2s}^2 \Big] \max_{\Gamma_{2h}} |V(x)| + \sum_{s=1,2} h_{2s}^2 \Big\}, \quad x \in \overline{D}_{2h}, \tag{5.3б}$$

где $V(x)$ — сингулярная компонента решения краевой задачи из представления (3.2); оценки (5.3а) и (5.3б) неулучшаемы по вхождению величин h_{1s}, ε и h_{2s}, ε соответственно. Эти оценки устанавливаются подобно оценке (4.10).

В силу оценки (3.3б) для того чтобы функция $z_2(x)$ сходилась ε–равномерно, необходимо, чтобы для величины ρ_1 выполнялось условие ($\rho_1 \gg \varepsilon$)

$$\varepsilon = o(\rho_1), \quad \rho_1 \in (0, m]. \tag{5.4}$$

Оценка для функции $z_1(x)$, оптимальная по порядку сходимости относительно h_{1s}, $s = 1, 2$, при фиксированном и равном MN_1N_2 числе узлов сетки $\overline{D}_{1h}$ получается при условии $h_{11} \approx h_{12}$:

$$|u(x) - z_1(x)| \le M\varepsilon^{-2}\rho_1 (N_1N_2)^{-1} [1 + \varepsilon^{-2}\rho_1 (N_1N_2)^{-1}]^{-1}, \quad x \in \overline{D}_{1h}; \tag{5.5}$$

оценка неулучшаема по вхождению величин ρ_1, $(N_1N_2)^{-1}$ и ε. Из оценки (5.5) следует, что функция $z_1(x)$ не сходится ε-равномерно при $N_1, N_2 \to \infty$ при условии (5.4).

Таким образом, не существует кусочно-равномерных сеток $\overline{D}^*_{h(5.1)}$, на которых решения задач (5.2) при $i = 1, 2$ сходятся ε-равномерно к решению задачи (2.1). В случае вспомогательных задач (5.2) на сетках (5.1) аналогично убеждаемся, что не существует сеток, на которых решения задач (5.2) сходятся даже при условии

$$N_1^{-1} + N_2^{-1} \ge \varepsilon^{1/2}. \tag{5.6}$$

5.2.2. Отсюда вытекает, что в случае семейства сеток (5.1), как и семейства сеток

$$\overline{D}_h^*, \tag{5.7}$$

являющихся равномерными в ρ-окрестности криволинейной границы Γ, где $m\varepsilon \le \rho \le M\varepsilon$, и классических сеточных аппроксимаций задачи, не существует схем, сходящихся при условии (5.6).

Таким образом, справедлива

Теорема 5.1. *Для краевой задачи* (2.1) *в классе сбалансированных разностных схем, строящихся на основе классических сеточных аппроксимаций задачи на локально сгущающихся сетках* (5.7)*, не существует схем, дефект которых меньше, чем* 2^{-1}.

Замечание 5.1. Из приведенных построений вытекает, что в случае задачи (2.1) использование локально сгущающихся сеток не позволяет существенно ослабить условие (4.11) — условие сходимости классических разностных схем; на достаточно общих локально сгущающихся сетках невозможно понизить порядок параметра ε в условии (2.3) больше, чем в 2 раза. Это утверждение согласуется с утверждением замечания 6.1 к теореме 6.1 (имея в виду соотношение $P_{(6.1)} = N_1 N_2$).

6. О построении аппроксимаций решений задачи (2.1)

Рассмотрим некоторые проблемы, связанные с триангуляцией области $\overline{D}$, которые возникают при аппроксимации решений сингулярно возмущенной задачи (2.1). При этом используем аналог поперечников по Колмогорову (см., напр., [12], [13] и библиографию там же).

6.1. Опишем аппроксимации множества $\mathcal{U}$ — множества решений класса краевых задач (2.1) (определяемого условиями (2.2)) в пространстве X — множестве непрерывных функций с равномерной нормой. Решения задач считаем достаточно гладкими на $\overline{D}$; для решений и их компонент из представления (3.2) выполняются оценки (3.3), (3.7).

Пусть $\overline{D}^h$ — набор точек ("сетка") на $\overline{D}$. Сетки $\overline{D}^h$ могут быть как структурными (порождаемыми некоторым регулярным семейством линий), так и неструктурными. Число узлов сетки $\overline{D}^h$ обозначим через P. Пусть T_P есть триангуляция $\overline{D}$, порождаемая сеткой $\overline{D}^h$ (напр., [11]). Для простоты считаем, что узлы сетки $\overline{D}^h$ являются вершинами треугольных элементов, причем, треугольные элементы образованы отрезками прямых, проходящих через узлы $\overline{D}^h$. Пусть на множестве $\overline{D}^h$ определена некоторая сеточная функция $u^h(x)$, $x \in \overline{D}^h$, через $\overline{u}^h(x)$, $x \in \overline{D}$, обозначим ее линейный интерполянт. Совокупность таких интерполянтов при фиксированной триангуляции T_P обозначим через U_P^h; совокупность всевозможных допустимых сеточных множеств $\overline{D}^h$ и триангуляции T_P на их основе обозначим через $\mathcal{T}_P$. Эта совокупность $\mathcal{T}_P$ и совокупность интерполянтов U_P^h (для каждой триангуляции из $\mathcal{T}_P$) определяют пространство X. Определим величину $d_P(\mathcal{U}, X)$ (поперечник) соотношением

$$d_P(\mathcal{U}, X) = \inf_{\mathcal{T}_P} \sup_{u \in \mathcal{U}} \inf_{\overline{u}^h \in U_P^h} \|u - \overline{u}^h\|, \tag{6.1}$$

где $\|\cdot\|$ — норма в C (определение поперечника по Колмогорову см., напр., в [13], гл. 3).

Введем обозначения и определения. Через $\rho_1(T_P^j)$ и $\rho_2(T_P^j)$, где T_P^j — треугольный элемент из разбиения T_P, обозначим радиусы вписанной и описанной окружностей для элемента T_P^j, $j = 1, \dots, J$; здесь $J = J(P)$ — число треугольных элементов разбиения T_P (считаем выполненным условие $J \approx P$). Триангуляцию T_P назовем *изотропной*, если выполняется условие

$$\rho_1^{-1}(T_P^j)\rho_2(T_P^j) \le M, \quad j = 1, \dots, J,$$

однако величины $\rho_1^{-1}(T_P^j)$, $\rho_2(T_P^j)$ могут сильно отличаться от элемента к элементу, и *анизотропной* (с коэффициентом анизотропии $\eta \ge M_0$, где M_0 может быть достаточно большим), если выполняется условие

$$\rho_1^{-1}(T_P^j)\rho_2(T_P^j) \le M\eta, \quad j = 1, \dots, J;$$

постоянная M не зависит от параметров ε, P. Считаем, что совокупность $\mathcal{T}_P$ определяется величиной η; $d_P(\mathcal{U}, X) = d_P(\mathcal{U}, X; \eta)$. Подобным образом вводятся изотропная и анизотропная триангуляции на подмножествах из $\overline{D}$. В том случае, когда поперечники рассматриваются на множестве $\overline{D}^0 \subset \overline{D}$ (в этом случае поперечник обозначаем через $d_P(\mathcal{U}, X; \overline{D}^0)$), величина $\|u - \overline{u}^h\|$ в (6.1) вычисляется лишь по треугольным элементам, целиком принадлежащим $\overline{D}^0$. Элементы триангуляции, для которых выполняется условие

$$\eta \to \infty, \quad \text{например, при} \quad P \to \infty \quad \text{и/или} \quad \varepsilon \to 0,$$

назовем *существенно анизотропными.*

Величина $d_P(\mathcal{U}, X)$ стремится к нулю при $P \to \infty$, однако, эта сходимость к нулю не является ε-равномерной. Вообще говоря, приближения сходятся при $P \to \infty$ лишь при некоторых соотношениях между величинами P и ε.

Пусть при $P \to \infty$ поперечник $d_P(\mathcal{U}, X)$ (погрешность при оптимальной точности приближения множества $\mathcal{U}$ в пространстве X, или, короче, погрешность оптимальной аппроксимации) стремится к нулю в случае $P^{-1/2} = o(\varepsilon^\nu)$, $\varepsilon \in E_\varepsilon$, однако, сходимость при условии $P^{-1/2} = \mathcal{O}(\varepsilon^\nu)$, вообще говоря, не имеет места. В этом случае будем говорить, что поперечник *сходится* к нулю *с дефектом* ν.

Наибольший интерес представляют приближения, сходящиеся с возможно меньшим дефектом и, в частности, сходящиеся ε-равномерно.

6.2. Получим оценку поперечника, когда граница Γ на $\overline{D}^0_{(5.1)}$ является отрезком прямой.

Исследование модельных задач, подобное приведенному в разделе 5, показывает, что в случае изотропных разбиений области $\overline{D}$ для поперечника выполняется оценка снизу

$$d_P(\mathcal{U}, X) \geq m(1 + \varepsilon P)^{-1}. \tag{6.2}$$

На множестве

$$\overline{D}^1 = \overline{D}_{1(5.1)}(\rho_1), \quad \rho_1 = M\varepsilon, \tag{6.3}$$

— ρ_1-окрестности границы Γ (из $\overline{D}^0_{(5.1)}$), получается оценка

$$d_P(\mathcal{U}, X; \overline{D}^1_{(6.3)}) \geq m(1 + \varepsilon P)^{-1}, \tag{6.4}$$

неулучшаемая по вхождению величин P, ε.

В случае анизотропных разбиений справедлива оценка

$$d_P(\mathcal{U}, X) \geq m(1 + \varepsilon\eta P)^{-1}. \tag{6.5}$$

На множестве $\overline{D}^1_{(6.3)}$ имеем оценку

$$d_P(\mathcal{U}, X; \overline{D}^1) \geq m(1 + \varepsilon\eta P)^{-1}; \tag{6.6}$$

оценка неулучшаема по вхождению величин P, ε, η.

Теорема 6.1. *Пусть для компонент решений краевой задачи* (2.1) *из их представлений* (3.2), (3.6) *выполняются оценки* (3.3), (3.7), *где* $K = 2$. *Тогда в случае прямолинейной границы* Γ *на* $\overline{D}^0$ *для поперечников* $d_P(\mathcal{U}, X)$, $d_P(\mathcal{U}, X; \overline{D}^1)$ *на изотропной* (*анизотропной*) *триангуляции* T_P *выполняются оценки* (6.2), (6.4) (*оценки* (6.5), (6.6)); *оценки* (6.4) *и* (6.6) *неулучшаемы по вхождению величин* P, ε *и* P, ε, η *соответственно.*

Замечание 6.1. В силу оценки (6.4), а также оценки (6.6) при условии, что величина η не зависит от P и ε, неулучшаемый дефект сходимости погрешности оптимальной аппроксимации на множестве $\overline{D}^1_{(6.3)}$ не меньше, чем 2^{-1}; дефект сходимости поперечников $d_P(\mathcal{U}, X)$ на изотропной и анизотропной триангуляциях не меньше, чем 2^{-1}.

Замечание 6.2. Условие

$$\eta \to \infty \ \text{ при } \ P \to \infty, \quad \varepsilon \in E_\varepsilon, \quad \varepsilon P = \mathcal{O}(1)$$

является необходимым и достаточным для того, чтобы дефект сходимости на анизотропной триангуляции T_P был меньше, чем 2^{-1}. Таким образом, использование существенно анизотропных триангуляций является необходимым для того чтобы поперечник $d_P(\mathcal{U}, X)$ сходился ε-равномерно либо с дефектом меньшим, чем 2^{-1}.

Замечание 6.3. Условие

$$\eta = \eta(P, \varepsilon) = \varepsilon^{-1}\eta_0(P) \tag{6.7}$$

является необходимым для ε-равномерной ограниченности поперечника, рассматриваемого на $\overline{D}^1$. При дополнительном условии $(\eta_0(P)\, P \gg 1)$:

$$\eta_0^{-1}(P) = o(P), \quad P \geq M, \tag{6.8}$$

имеем оценку сверху

$$d_P(\mathcal{U}, X; \overline{D}^1) \leq M\, P^{-1}\eta_0^{-1}(P),$$

т. е. поперечник $d_P(\mathcal{U},\, X;\ \overline{D}^1)$ сходится ε-равномерно. Для поперечника $d_P(\mathcal{U}, X; \overline{D}^0 \cap \overline{D})$ при условии (6.7) получается оценка

$$d_P(\mathcal{U}, X; \overline{D}^0 \cap \overline{D}) \leq M[\eta_0^{-1}(P)P^{-1}\ln P + P^{-1/2}];$$

при условии $(\eta_0^{-1}(P)\, P^{-1}\, \ln P \ll 1)$:

$$\eta_0^{-1}(P) = o(P \ln^{-1} P), \quad P \to \infty, \tag{6.9}$$

поперечник $d_P(\mathcal{U}, X; \overline{D}^0 \cap \overline{D})$ сходится ε-равномерно. Таким образом, условия (6.7), (6.8) являются необходимыми, а условия (6.7), (6.9) — достаточными для ε-равномерной сходимости (при $P \to \infty$) поперечника $d_P(\mathcal{U}, X; \overline{D}^0 \cap \overline{D})$ при анизотропном разбиении.

6.3. Пусть множество $\varGamma$ — криволинейная граница из $\overline{D}^0_{(5.1)}$ (с ограниченной кривизной) и триангуляция T_P является анизотропной (стороны треугольных элементов — отрезки прямых). Определим поперечник $d^*_P(\mathcal{U}, X)$ соотношением

$$d^*_P(\mathcal{U},\, X) = \inf_\eta d_P(\mathcal{U}, X; \eta). \tag{6.10}$$

Справедлива

Теорема 6.2. *Пусть выполняется условие теоремы* 6.1. *Тогда в случае криволинейной границы $\varGamma$ на $\overline{D}^0_{(5.1)}$ для поперечника $d^*_{P(6.10)}(\mathcal{U}, X; \overline{D}^1)$, где $\overline{D}^1 = \overline{D}^1_{(6.3)}$, выполняется оценка*

$$d^*_P(\mathcal{U}, X; \overline{D}^1) \geq m(1 + \varepsilon^{1/2}P)^{-1},$$

неулучшаемая по вхождению величин P, ε.

Замечание 6.4. Дефект сходимости для поперечника $d^*_P(\mathcal{U}, X; \overline{D}^1)$ (в случае криволинейной границы $\varGamma$ на $\overline{D}^0$) равен 4^{-1}. Таким образом, на треугольных элементах с прямолинейными сторонами дефект сходимости для поперечника $d^*_P(\mathcal{U}, X)$ меньше, чем 4^{-1}, недостижим. Для построения аппроксимаций с дефектом сходимости для поперечника $d^*_P(\mathcal{U}, X)$ меньше, чем 4^{-1}, необходимо использовать треугольные элементы, являющиеся в окрестности пограничного слоя криволинейными и существенно анизотропными с локальной направленностью анизотропии (направлением наибольшей стороны треугольных элементов), согласованной с границей $\varGamma$.

Замечание 6.5. На множестве $\overline{D}$ в окрестности погранслоя можно ввести локальные координаты, в которых множество Γ становится прямолинейным, и построить триангуляцию (на треугольных элементах с прямолинейными сторонами), на которой поперечник сходится в окрестности переходного слоя ε-равномерно (см., напр., замечание 6.3 к теореме 6.1). В исходных переменных такая триангуляция порождается криволинейными треугольными элементами. На основе этой локальной триангуляции строится триангуляция множества $\overline{D}$, на которой поперечник, рассматриваемый на $\overline{D}$, сходится ε-равномерно.

Свойства поперечников, подобные приведенным в теореме 6.2 и замечаниях 6.4, 6.5, сохраняются и в том случае, когда для аппроксимации решений задачи (2.1) используются интерполянты, приближающие решения задачи (2.1) с более высоким порядком точности по сравнению с линейными интерполянтами.

Замечания 6.4, 6.5 к теореме 6.2 устанавливают необходимые условия (замечание 6.4), при которых погрешность оптимальной аппроксимации решения краевой задачи слабо зависит от параметра ε, и достаточные условия (замечание 6.5) для ε-равномерной сходимости такой погрешности. Требования, вытекающие из этих условий, полагаются в основу при построении специальных схем.

7. Схема на сетках, согласованных в погранслое с границей

Чтобы продемонстрировать использование результатов раздела 6, приведем ε-равномерно сходящуюся разностную схему для задачи (2.1). При построении схемы для краевой задачи (2.1) (с лучшим условием сходимости по сравнению с (4.11)) переформулируем задачу, перейдя (в окрестности погранслоя) к связанным с границей Γ переменным, в которых граница является уже прямолинейной. Для задачи в новых переменных построим разностную схему на прямоугольных сетках (в частности, схему, сходящуюся ε-равномерно) и затем вернемся к старым переменным. В исходных переменных получающиеся сетки (сетки, согласованные с границей) уже не будут прямоугольными, что, вообще говоря, влечет некоторые неудобства при построении сеточных областей и численном решении задачи. Однако в силу результатов раздела 6, использование "криволинейных" сеток, согласованных с границей Γ, является необходимым. Рассмотрим разностную схему на основе такого подхода.

7.1. Построим разностную схему на основе аппроксимации задачи (3.5), (3.4). Для простоты считаем выполненным условие

$$r(x,\Gamma) = m_2, \quad x \in \Gamma^2, \tag{7.1}$$

т. е. расстояние между границами Γ и Γ^2 равно m_2; $\overline{D}^2 = D^2 \cup \Gamma^2$. На множестве $\overline{\widetilde{D}}^1$ введем прямоугольную сетку

$$\overline{\widetilde{D}}^1 = \overline{\widetilde{\omega}}_1 \times \widetilde{\omega}_2, \tag{7.2а}$$

где $\overline{\widetilde{\omega}}_1$ и $\widetilde{\omega}_2$ — сетки на отрезке $[0, m_1]$, $m_1 = m_{1(3.4)}$ (на оси ξ_1) и на оси ξ_2 соответственно; сетка $\widetilde{\omega}_2$ является периодической (с периодом равным длине границы Γ). Пусть $\widetilde{N}_1 + 1$ и $\widetilde{N}_2$ — число узлов соответственно сеток $\overline{\widetilde{\omega}}_1$ и $\widetilde{\omega}_2$ (на интервале периодичности). На множестве $\overline{D}^2$ строим сетку

$$\overline{D}^2_h \tag{7.2б}$$

подобно построению сетки (4.8) на $\overline{D}$; $\overline{D}^2_h = \overline{D}^2_h(R^2_{h(4.1)})$, где $R^2_{h(4.1)}$ — базовая сетка.

Приведем интерполянты сеточных функций, используемые при построении схемы. Сеточные множества $\overline{\widetilde{D}}^1_h$ и $\overline{D}^2_h$ определяют некоторые разбиения множеств $\overline{\widetilde{D}}^1$ и $\overline{D}^2$ на треугольные элементы. Стороны треугольных элементов, соединяющих узлы из $\overline{\widetilde{D}}^1_h$, а также внутренние узлы из D^2, являются отрезками прямых (такие элементы назовем прямолинейными); стороны элементов из $\overline{D}^2$, примыкающих к границе Γ^2, могут быть криволинейными (такие элементы назовем криволинейными). Пусть на множествах $\overline{\widetilde{D}}{}^1_h$ и $\overline{D}^2_h$ определены некоторые сеточные функции $Z(\xi)$ и $z(x)$ соответственно. На $\overline{\widetilde{D}}{}^1$ строим интерполянт $\overline{Z}(\xi)$ (линейный на треугольных элементах). На множестве $\overline{D}^2$ строим интерполянт $\widehat{z}(x)$ следующим образом. На прямолинейных треугольных элементах из $\overline{D}^2$ строим линейный интерполянт $\overline{z}(x)$ и полагаем $\widehat{z}(x)=\overline{z}(x)$. На криволинейных элементах перейдем к переменным $\xi=(\xi_1,\xi_2)$ и по значениям функции $z_\xi(\xi)=z(x(\xi))$ в вершинах элементов построим линейные (по ξ_1, ξ_2) интерполянты $z^0(\xi)=\overline{(z_\xi)}(\xi)$. Положим $\widehat{z}(x)=z^0_x(x)$. На отрезках прямых, являющихся общими сторонами прямолинейных и криволинейных элементов, функция $\widehat{z}(x)$, вообще говоря, терпит разрыв. Для определенности функцию $\widehat{z}(x)$ на таких сторонах считаем равной полусумме пределов из прилегающих треугольников. Интерполянт $\widehat{z}(x)$, $x\in\overline{D}^2$, построен.

Задачу (3.5), (3.4) аппроксимируем сеточной задачей

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Lambda} Z(\xi) &= F(\xi), \quad \xi\in\widetilde{D}^1_h, \\
Z(\xi) &= \begin{cases}\Phi(\xi), & \xi\in\widetilde{\Gamma}^1_h\cap\widetilde{\Gamma};\\ (\widehat{z})_\xi(\xi), & \xi\in\widetilde{\Gamma}^1_h\setminus\widetilde{\Gamma},\end{cases}
\end{aligned}\tag{7.3а}$$

$$\begin{aligned}
\Lambda z(x) &= f(x), \quad x\in D^2_h, \\
z(x) &= (\overline{Z})_x(x), \quad x\in\Gamma^2_h.
\end{aligned}\tag{7.3б}$$

Здесь $\Lambda=\Lambda_{(4.4)}(L_{(2.1)};\overline{D}^2_h)$; оператор $\widetilde{\Lambda}$ строится на сетке $\overline{\widetilde{D}}{}^1_h$ по оператору $\widetilde{L}_{(3.5)}$ подобно оператору $\Lambda_{(4.4)}$ ($\widetilde{\Lambda}=\widetilde{\Lambda}(\widetilde{L}_{(3.5)};\overline{\widetilde{D}}{}^1_h)$, причем $\eta(\xi)=1$ при $\xi\in\overline{\widetilde{D}}{}^1_h$); $(\widehat{z})_\xi(\xi)$ и $(\overline{Z})_x(x)$ суть соответственно интерполянты $\widehat{z}(x)$ и $\overline{Z}(\xi)$, переписанные в переменных ξ и x; $\widehat{z}(x)$, $x\in\overline{D}^2$, и $\overline{Z}(\xi)$, $\xi\in\overline{\widetilde{D}}{}^1$, — интерполянты на треугольных элементах разбиений областей $\overline{D}^2$ и $\overline{\widetilde{D}}{}^1$, порождаемых сетками $\overline{D}^2_h$ и $\overline{\widetilde{D}}{}^1_h$ соответственно.

Функцию

$$u^h(x)=\begin{cases}(\overline{Z})_x(x), & x\in\{\overline{\widetilde{D}}{}^1\}_x;\\ \widehat{z}(x), & x\in\overline{D}\setminus\{\overline{\widetilde{D}}{}^1\}_x,\end{cases}\qquad x\in\overline{D},$$

назовем решением разностной схемы (7.3), (7.2) — схемы метода декомпозиции области в случае перекрывающихся подобластей.

Операторы $\widetilde{\Lambda}$ и Λ являются монотонными (на множествах $\widetilde{D}^1_h$ и D^2_h) в том случае, когда выполняются соответственно условия

$$\min_{s,\widetilde{D}^1_h}\{2(\widetilde{h}^{i_s}_s+\widetilde{h}^{i_s-1}_s)^{-1}A_{ss}(\xi)-\max[(\widetilde{h}^{i_{3-s}}_{3-s})^{-1},(\widetilde{h}^{i_{3-s}-1}_{3-s})^{-1}]|A_{12}(\xi)|-|B_s(\xi)|\}\ge 0; \tag{7.4а}$$

$$\min_{s,D^{2(in)}_h}\{2(h^{i_s}_s+h^{i_s-1}_s)^{-1}a_{ss}(x)-\max[(h^{i_{3-s}}_{3-s})^{-1},(h^{i_{3-s}-1}_{3-s})^{-1}]|a_{12}(x)|-|b_s(x)|\}\ge 0. \tag{7.4б}$$

Здесь $D^{2(in)}_h$ — множество строго внутренних узлов (определяемых для множества D^2_h), строящихся подобно множеству $D^{(in)}_{h(4.3)}$; $\widetilde{h}^i_1$ и $\widetilde{h}^j_2$ — шаги сеток $\overline{\widetilde{\omega}}_{1(7.2)}$ и $\widetilde{\omega}_{2(7.2)}$ соответственно.

Заметим, что условия (7.4) выполняются, например, когда коэффициенты при смешанных производных равны нулю

$$A_{12}(\xi)\equiv 0,\ \ \xi\in\overline{\widetilde{D}}{}^1,\quad a_{12}(x)\equiv 0,\ \ x\in\overline{D}^2,$$

либо когда эти коэффициенты достаточно малы (по сравнению с коэффициентами $A_{ss}(\xi)$, $a_{ss}(x)$) и шаги сеток ω_1, ω_2, а также $\overline{\widetilde{\omega}}_1$, $\widetilde{\omega}_2$ одного порядка; такое условие имеет место, например, в случае задачи (2.1) на круге при условии $L_2=\triangle$ в окрестности границы Γ и малости коэффициента $a_{12}(x)$ по сравнению с $a_{11}(x)$, $a_{22}(x)$ вне этой окрестности.

В случае условий (7.4) разностная схема (7.3), (7.2) является монотонной. В том случае, когда условия (7.4) нарушаются, при построении монотонных сеточных аппроксимаций задачи (2.1) можно воспользоваться техникой работы [1].

Для решения задачи (2.1) используем разностную схему (7.3), (7.2) на сетках, сгущающихся в пограничном слое. Сеточную задачу рассматриваем на сетках

$$\overline{\widetilde{D}}{}^1_h, \quad \overline{D}{}^2_h = \overline{D}{}^2_h(R^2_h), \tag{7.5а}$$

где $\overline{\widetilde{D}}{}^1_h$, R^2_h — равномерные сетки. Для простоты считаем выполненным условие

$$N_s = \widetilde{N}_s = N, \quad s = 1, 2. \tag{7.5б}$$

Параметры подобластей $\overline{D}^k$ определим соотношениями

$$m_{2(7.1)} = \sigma, \quad m_{1(3.4)} = \sigma + \delta, \tag{7.5в}$$
$$\sigma = \sigma(\varepsilon, N) = \min[2^{-1}r^0, 2m_3^{-1}\varepsilon \ln N], \quad \delta = \delta(\varepsilon) = m_4\varepsilon,$$

где r^0 — минимальный радиус кривизны границы Γ, $m_3 = m_{(3.7)}$.

С учетом априорных оценок решений задачи (2.1) находим оценку для решения схемы (7.3), (7.5)

$$|u(x) - u^h(x)| \le MN^{-2}\ln^2 N, \quad x \in \overline{D}. \tag{7.6}$$

Таким образом, разностная схема сходится ε-равномерно со скоростью сходимости $\mathcal{O}(N^{-2}\ln^2 N)$.

Теорема 7.1. *Пусть для решения краевой задачи* (2.1) *выполняются условие теоремы* 4.1 *и условия* (7.4). *Тогда решение разностной схемы* (7.3), (7.5) *при* $N \to \infty$ *сходится к решению краевой задачи* ε*-равномерно. Для решения разностной схемы справедлива оценка* (7.6).

Автор выражает глубокую признательность Н.С. Бахвалову за внимание к исследованиям, приведенным в работе, и предложение использовать подход на основе поперечников по Колмогорову.

Литература

1. Шишкин Г.И. *Сеточные аппроксимации сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений.* – Екатеринбург: УрО РАН, 1992. – 233 с.
2. Miller J.J.H., O'Riordan E., Shishkin G.I. *Fitted numerical methods for singular perturbation problems: error estimates in the maximum norm for linear problems in one and two dimensions.* – Singapore: World Scientific, 1996. – 166 p.
3. Roos H.-G., Stynes M., Tobiska L. *Numerical methods for singularly perturbed differential equations. Convection-diffusion and flow problems.* – Berlin: Springer, 1996. – 348 p.
4. Farrell P.A., Hegarty A.F., Miller J.J.H., O'Riordan E., Shishkin G.I. *Robust computational techniques for boundary layers.* — Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2000. – 254 p.
5. Shishkin G.I., Vabishchevich P.N. *Interpolation finite difference schemes on grids locally refined in time* // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 2000. – V. 190. – № 8–10. – P. 889–901.
6. Марчук Г.И., Шайдуров В.В. *Повышение точности решений разностных схем.* – М.: Наука, 1979. – 318 с.
7. Birkhoff G., Lynch R.E. *Numerical solution of elliptic problems.* – Philadelphia: SIAM, 1984. – 319 p.
8. Шишкин Г.И. *Численные методы на адаптивных сетках для сингулярно возмущенных эллиптических уравнений в области с криволинейной границей* // Изв. вузов. Математика. – 2003. – № 1. – С. 74–85.

9. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.* – М.: Наука, 1973. – 576 с.
10. Самарский А.А. *Теория разностных схем.* – М.: Наука, 1989. – 616 с.
11. Марчук Г.И. *Методы вычислительной математики.* – М.: Наука, 1989. – 608 с.
12. Бахвалов Н.С. *Численные методы.* – М.: Наука, 1973. – 632 с.
13. Бабенко К.И. *Основы численного анализа.* – М.: Наука, 1986. – 744 с.

Институт математики и механики
Уральского отделения
Российской Академии наук

Поступила
22.04.2004