ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2006 МАТЕМАТИКА № 4 (527)

УДК 517.926

А.А. ЩЕГЛОВА

ОБ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЯХ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

1. Введение

Рассматривается система алгебро-дифференциальных уравнений (АДС)

$$A(t)x'(t) = B(t)x(t) + f(t), \quad t \in T = [0, +\infty), \tag{1}$$

где $A(t), B(t) \in \mathbf{C}^{\infty}(T)$ — $n \times n$-матрицы, $\det A(t) \equiv 0$, $t \in T$, в условиях, когда поставленная задача Коши

$$x(0) = a \tag{2}$$

неразрешима в пространстве $\mathbf{C}^1(T)$. В частности, положение такого рода возникает в случае несогласованных начальных данных и недостаточно гладкой функции $f(t)$. С подобной ситуацией сталкиваются во многих важных приложениях: в задачах оптимального управления, для которых условие Клебша–Лежандра нарушается на всей экстремали, в задачах управления с импульсными режимами и др. В этом случае предлагается искать решение в пространстве обобщенных функций типа Соболева–Шварца.

Проблема поиска обобщенных решений для АДС ставится не впервые. В [1] на основе теории вырожденных полугрупп операторов исследовалась разрешимость в пространстве Л. Шварца вырожденной задачи Коши для системы с операторными коэффициентами в банаховых пространствах

$$\mathcal{A}[u'] = \mathcal{B}[u] + f, \quad \ker \mathcal{A} \neq 0.$$

Авторы оперировали понятием $\mathcal{A}$-резольвенты оператора $\mathcal{B}: (c\mathcal{A} - \mathcal{B})^{-1}$, существование которой при перенесении результатов на конечномерный случай для систем с постоянными матрицами коэффициентов эквивалентно предположению регулярности пучка $cA - B$. Напомним, что пучок матриц $cA - B$ называется регулярным, если $\det(cA - B) \not\equiv 0$ ([2], с. 313). Для системы с переменными коэффициентами матрица $cA(t) - B(t)$ может оказаться необратимой для любых значений c (в общем случае комплексных) и $t \in T$, поэтому для таких систем аналог резольвентного оператора до сих пор не определен.

Пример 1. АДС

$$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x'(t) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & t \end{pmatrix} x(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}, \quad t \in T,$$

имеет единственное решение

$$x(t) = \begin{pmatrix} f_2(t) - t(f_2'(t) - f_1(t)) \\ f_2'(t) - f_1(t) \end{pmatrix}.$$

При этом $\det(cA(t) + B(t)) = \det\left(\begin{smallmatrix} c & ct \\ 1 & t \end{smallmatrix}\right) = 0$ $\forall t \in T$, $\forall c$.

К настоящему моменту имеется немало работ, посвященных обобщенным решениям АДС с постоянными коэффициентами (напр., [3]–[5]).

Что же касается систем с переменными матрицами коэффициентов, то автору известны лишь результаты, в полном виде изложенные в ([6], с. 63). Решение в пространстве распределений строится для задачи (1), (2) произвольно высокого индекса с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами в случае несогласованных начальных данных и импульсно-гладкой правой части. При этом на матрицу $A(t)$ накладывается существенное ограничение $\operatorname{rank} A(t) = \mathrm{const}$ $\forall t \in T$.

В [7]–[9] обоснована возможность построения обобщенного в смысле Соболева–Шварца решения начальной задачи для АДС вида (1) и для линейной системы функционально-алгебро-дифференциальных уравнений (начальные данные несогласованы, правая часть либо гладкая, либо является регулярной обобщенной функцией) в предположении вещественной аналитичности матричных коэффициентов, поскольку это допущение требовалось для существования у системы (1) центральной канонической формы (ЦКФ) ([10], с. 117), послужившей основой для анализа. В этом случае ранг матрицы $A(t)$ является постоянным на интервале T за исключением, быть может, счетного числа точек.

В данной работе замена требования существования ЦКФ предположением о существовании для АДС (1) левого регуляризирующего оператора (ЛРО) [10] позволяет получить результаты по обобщенным решениям задачи (1), (2) в случае, когда $A(t), B(t) \in \mathbf{C}^\infty(T)$. При этом ранг матрицы $A(t)$ может меняться в пределах интервала T произвольным образом, поскольку на него не накладывается никаких дополнительных ограничений. Под ЛРО понимается линейный дифференциальный оператор, действие которого преобразует систему (1) к виду, разрешенному относительно производной. Показано, что решение задачи (1), (2) совпадает в пространстве распределений с решением системы, полученной из (1) действием ЛРО, что придает результатам конструктивный характер, поскольку нахождение коэффициентов ЛРО является задачей несравненно более простой, нежели преобразование АДС (1) в ЦКФ. Обосновано существование обобщенного решения задачи (1), (2) в случае, когда начальные данные не являются согласованными, а правая часть задана в виде суммы регулярной обобщенной функции и линейной комбинации дельта-функции и ее производных.

Заметим, что для системы из примера 1 на T определен ЛРО

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 0 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \lambda^2 + \begin{pmatrix} t & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \lambda + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

поэтому для нее выполняются все предположения, при которых получены результаты данной статьи.

Здесь и далее λ — оператор дифференцирования в обычном смысле.

2. Некоторые сведения из линейной теории АДС

Определение 1. ЛРО для системы (1) называется оператор

$$\mathcal{L} = \sum_{j=0}^{r} L_j(t)\lambda^j, \quad t \in T \tag{3}$$

($L_j(t)$ — $n \times n$-матрицы из $\mathbf{C}(T)$), если имеет место равенство

$$\mathcal{L}[A(t)x'(t) - B(t)x(t)] = x'(t) - \mathcal{L}[B(t)]x(t) \quad \forall x(t) \in \mathbf{C}^{r+1}(T).$$

Минимальное значение r $(0 \leq r \leq n)$, при котором для системы (1) на T определен ЛРО, называется индексом АДС (1).

Пусть $f(t) \in \mathbf{C}^r(T)$, тогда действие оператора (3) преобразует систему (1) к виду

$$x'(t) = \mathcal{L}[B(t)]x(t) + \mathcal{L}[f(t)], \quad t \in T.$$

Поставим в соответствие системе (1) матрицы

$$\Gamma_r(t) = \begin{pmatrix} C_0^0 A(t) & O & \dots & O \\ C_1^0 A'(t) - C_1^1 B(t) & C_1^1 A(t) & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_r^0 A^{(r)}(t) - C_r^1 B^{(r-1)}(t) & C_r^1 A^{(r-1)}(t) - C_r^2 B^{(r-2)}(t) & \dots & C_r^r A(t) \end{pmatrix},$$

$$D_r(t) = \left(\begin{pmatrix} -C_0^0 B(t) \\ -C_1^0 B'(t) \\ \vdots \\ -C_r^0 B^{(r)}(t) \end{pmatrix},\ \Gamma_r(t) \right), \tag{4}$$

где $C_j^i = j!/(i!(j-i)!)$ — биномиальные коэффициенты.

Одним из необходимых и достаточных условий существования ЛРО порядка $r = \rho + 1$, $\rho = \max\limits_{t\in T} \operatorname{rank} A(t)$, является выполнение соотношения

$$\operatorname{rank} \Gamma_r(t) = \varkappa = \mathrm{const} \geq (\rho+1)n \quad \forall t \in T.$$

При этом в качестве коэффициентов ЛРО можно взять первые n строк полуобратной матрицы $\Gamma_r^-(t)$, разбитые на $n \times n$-блоки ([10], с. 83). Перебирая все матрицы, полуобратные для $\Gamma_r(t)$, получим все возможные ЛРО для системы (1).

Определение 2. Матрица $\Gamma^-(t)$ называется *полуобратной* для матрицы $\Gamma(t)$ на интервале T, если $\forall t \in T$ выполняется равенство $\Gamma(t)\Gamma^-(t)\Gamma(t) = \Gamma(t)$.

Замечание 1. Полуобратная матрица существует для любой прямоугольной матрицы $\Gamma(t)$, однако определяется неединственным образом. Важнейшей из полуобратных является псевдообратная матрица, которая для любой матрицы существует и единственна, кроме того, алгоритмы ее нахождения характеризуются наибольшей конструктивностью. К настоящему моменту написано большое число работ, посвященных различным аспектам теории и приложениям обобщенных обратных матриц (напр., [2], [10]–[12]).

ЦКФ дает исчерпывающую информацию о структуре решения АДС (1). К сожалению, в случае, когда матричные коэффициенты в системе (1) не являются аналитическими, о преобразовании системы в ЦКФ можно говорить лишь в локальном смысле. Для АДС (1) введем другую структурную форму, существование которой на T обосновано для гладких матриц $A(t)$ и $B(t)$.

Определение 3. Будем говорить, что система (1) имеет на T *расщепленную форму*, если существуют $n \times n$-матрицы $V(t), U(t) \in \mathbf{C}^1(T)$, невырожденные $\forall t \in T$, такие, что замена переменной $x(t) = U(t)z(t)$ и умножение слева на матрицу $V(t)$ преобразует (1) к виду

$$\begin{pmatrix} E_d & K_1(t) \\ O & K_2(t) \end{pmatrix} z'(t) = \begin{pmatrix} J(t) & M_1(t) \\ O & M_2(t) \end{pmatrix} z(t) + V(t)f(t), \quad t \in T, \tag{5}$$

где $J(t)$ — некоторая $d \times d$-матрица; оператор $\widetilde{\Lambda} = K_2(t)\lambda + M_2(t)$ имеет нулевое ядро, и для него на T определен ЛРО; $K_j(t)$, $M_j(t)$, $j = 1, 2,$ — некоторые матрицы подходящих размеров.

Лемма 1 ([7]). *Пусть* $A(t), B(t) \in \mathbf{C}^s(T)$ $(2r+1 \leq s \leq \infty)$. *Система* (1) *имеет на* T *расщепленную форму* (5) *с матрицами* $U(t), V(t) \in \mathbf{C}^{s-r+1}(T)$ *тогда и только тогда, когда для нее на* T *определен ЛРО* (3) *порядка* r.

Лемма 2. *Пусть*
1) $A(t), B(t) \in \mathbf{C}^{2r-1}(T)$,
2) $\operatorname{rank} D_r(t) = n(r+1)$ $\forall t \in T$,
3) $\operatorname{rank} \Gamma_r(t) = \varkappa = \mathrm{const}$ $\forall t \in T$,

4) *система*

$$(X_0(t), X_1(t), \dots, X_r(t))\Gamma_r(t) = (E_n, O_n, \dots, O_n) \qquad (6)$$

имеет на T *решение* $X_i(t)$, X_i, $i=\overline{0,r}$, *—* $n\times n$*-матрицы.*

Тогда на интервале T *существует семейство решений системы* (1) $x(t,c)$ *такое, что* $\operatorname{rank}\partial x(t,c)/\partial c = \varkappa - rn$.

Доказательства лемм опущены.

Теорема 1. *Пусть в АДС* (1) $n\times n$*-матрицы* $A(t)$ *и* $B(t)$ *таковы, что*
1) $A(t), B(t) \in \mathbf{C}^s(T)$ $(2r-1\le s\le\infty)$,
2) $\operatorname{rank} D_r(t) = n(r+1)$ $\forall t\in T$,
3) $\operatorname{rank}\Gamma_r(t) = \varkappa = \mathrm{const}$ $\forall t\in T$,
4) *для системы* (1) *на интервале* T *определен ЛРО* $\mathcal{L}$ (3) *порядка* r,
5) *оператор* $\Lambda : \Lambda = A(t)\lambda - B(t)$ *имеет нулевое ядро.*

Тогда для АДС (1) *на* T *определен оператор* $\mathcal{R} = \sum\limits_{j=0}^{r-1} R_j(t)\lambda^j$ *такой, что* $R_j(t)\in\mathbf{C}^{s-r+1}(T)$ *и*

$$\mathcal{R}[A(t)x'(t) - B(t)x(t)] = x(t) \quad \forall x(t)\in\mathbf{C}^r(T).$$

Доказательство. Условие 4) теоремы гарантирует разрешимость на T алгебраической системы (6), поскольку в качестве решения последней можно взять коэффициенты ЛРО (3), т. е. $X_i(t) = L_i(t)$, $i=\overline{0,r}$. Таким образом, попадаем в условия леммы 2, в соответствии с которой на T определено семейство решений системы (1) $x(t,c)$ и $\operatorname{rank}\partial x(t,c)/\partial c = \varkappa - rn$. Так как оператор Λ имеет нулевое ядро, то $\operatorname{rank}\partial x(t,c)/\partial c = 0$. Следовательно, $\varkappa = rn$.

Рассмотрим алгебраическую систему

$$(R_0(t), R_1(t), \dots, R_r(t))\ D_r(t) = (E_n, O_n, \dots, O_n) \qquad (7)$$

с неизвестными $R_j(t)$, $j=\overline{0,r}$. Теорема Кронекера–Капелли предоставляет необходимое и достаточное условие ее совместности

$$\operatorname{rank} D_r(t) = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} D_r(t) \\ (E_n,\ O)\end{pmatrix} \quad \forall t\in T.$$

Отсюда с учетом (4)

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} D_r(t) \\ (E_n,\ O)\end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} O & \Gamma_r(t) \\ E_n & O\end{pmatrix}.$$

Поскольку $\operatorname{rank}\Gamma_r(t) = rn$ для всех $t\in T$, то $\operatorname{rank}\left(\begin{smallmatrix} O & \Gamma_r(t) \\ E_n & O\end{smallmatrix}\right) = (r+1)n = \operatorname{rank} D_r(t)$ для всех $t\in T$. Таким образом, система (7) имеет на T решение, причем в предположениях 1), 2) $R_j(t)\in\mathbf{C}^{s-r}(T)$, $j=\overline{0,r}$. Условие 2) обеспечивает однозначную разрешимость уравнения (7)

$$(R_0(t), R_1(t), \dots, R_r(t)) = (E_n, O_n, \dots, O_n) D_r^T(t)\left(D_r(t)D_r^T(t)\right)^{-1}.$$

Покажем, что $R_r(t)\equiv 0$ на T.

Построим оператор $\mathcal{R} = \sum\limits_{j=0}^{r} R_j(t)\lambda^j$. Тогда

$$\mathcal{R}[A(t)x'(t) - B(t)x(t)] = (R_0(t), R_1(t), \dots, R_r(t))D_r(t)\begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \dots \\ x^{(r+1)}(t)\end{pmatrix} =$$

$$= (E_n, O_n, \dots, O_n)\begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \dots \\ x^{(r+1)}(t)\end{pmatrix} = x(t) \quad \forall x(t)\in\mathbf{C}^{r+1}(T).$$

На основании последнего равенства можно заключить, что $\mathcal{R} = \Lambda^{-1}$. Можно построить ЛРО $\mathcal{L} = \lambda \circ \mathcal{R}$ для системы (1). По построению его порядок равен $r+1$ и является наименьшим из возможных. Но по условию 4) теоремы на T имеется ЛРО порядка r, что необходимо требует тождества $R_r(t) \equiv O$. В этом случае из уравнения (7) и предположений 1), 2) теоремы следует $R_j(t) \in \mathbf{C}^{s-r+1}(T)$, $j = \overline{0, r-1}$. $\square$

3. Вспомогательные сведения об обобщенных функциях

Обозначим через $\mathbf{D}$ пространство финитных функций класса $\mathbf{C}^\infty(\mathbf{R})$, а через $\mathbf{D}'$ — пространство обобщенных функций на $\mathbf{D}$.

Для любой обобщенной функции $g(t) \in \mathbf{D}'$ и функции $h(t) \in \mathbf{C}^\infty(\mathbf{R})$ определено произведение [13]

$$\langle h(t)g(t), \phi(t)\rangle = \langle g(t), h(t)\phi(t)\rangle \quad \forall \phi(t) \in \mathbf{D}, \tag{8}$$

а для любой функции $h(t) \in \mathbf{C}^\infty(\mathbf{R})$ имеет место равенство

$$h(t)\delta(t) = h(0)\delta(t), \tag{9}$$

где $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака: $\langle \delta(t), \phi(t)\rangle = \phi(0)$ $\forall \phi(t) \in \mathbf{D}$.

Кроме того, любая функция $g(t) \in \mathbf{D}'$ бесконечное число раз дифференцируема в обобщенном смысле ([14], с. 23)

$$\Big\langle \Big(\frac{d}{dt}\Big)^j g(t), \phi(t) \Big\rangle = (-1)^j \langle g(t), \phi^{(j)}(t)\rangle.$$

Здесь и далее ϕ' и $\phi^{(j)}$ — обычная производная функции $\phi(t) \in \mathbf{C}^j(T)$, $(\frac{d}{dt})^j g(t)$ – обобщенная производная функции $g(t) \in \mathbf{D}'$.

Опираясь на свойство (9), несложно получить формулу

$$h(t)\Big(\frac{d}{dt}\Big)^k \delta(t) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^k C_k^i h^{(i)}(0) \Big(\frac{d}{dt}\Big)^{k-i} \delta(t), \tag{10}$$

где k — любое натуральное число, C_k^i — биномиальные коэффициенты.

Если $g(t)$ — n-мерный вектор, компонентами которого являются функции из $\mathbf{D}'$, то

$$\langle g(t), \phi(t)\rangle = \Big\langle \begin{pmatrix} g_1(t) \\ \dots \\ g_n(t) \end{pmatrix}, \phi(t) \Big\rangle = \begin{pmatrix} \langle g_1(t), \phi(t)\rangle \\ \dots \\ \langle g_n(t), \phi(t)\rangle \end{pmatrix} \quad \forall \phi(t) \in \mathbf{D}.$$

Пусть $T = [0, +\infty)$. Возьмем произвольную n-мерную функцию $z(t) \in \mathbf{C}^1(T)$ и продолжим ее нулем при $t < 0$. Продолженную функцию обозначим

$$\widetilde{z}(t) = z(t)\theta(t),$$

где $\theta(t)$ — функция Хевисайда: $\langle \theta(t), \phi(t)\rangle = \int\limits_0^{+\infty} \phi(t)dt$ $\forall \phi(t) \in \mathbf{D}$. При этом имеет место формула обобщенного дифференцирования

$$\frac{d}{dt}\widetilde{z}(t) = z(0)\delta(t) + z'(t)\theta(t). \tag{11}$$

Замечание 2. Формула (11) остается справедливой, если функция $z(t)$ абсолютно непрерывна на T. При этом обычная производная $z'(t)$ будет определена почти всюду и, следовательно, локально интегрируема на T.

Таким образом, регулярная обобщенная функция $\widetilde{z}(t)$ действует по правилу

$$\langle \widetilde{z}(t), \phi(t)\rangle = \int_0^{+\infty} z(t)\phi(t)dt.$$

Обозначим через $\mathbf{K}'_+$ ($\mathbf{K}'_+ \subset \mathbf{D}'$) пространство обобщенных функций с носителем, ограниченным слева.

Формулы (8)–(10) имеют место для $h(t) \in \mathbf{C}^\infty(\mathbf{R})$. В случае, когда $g(t) \in \mathbf{K}'_+$, равенства (8)–(10) будут иметь смысл и для $h(t) \in \mathbf{C}^\infty(T)$.

Лемма 3. *Уравнение*

$$\frac{d}{dt}\widetilde{z}(t) = 0 \tag{12}$$

имеет в пространстве $\mathbf{K}'_+$ *единственное решение* $\widetilde{z}(t) = 0$.

Доказательство. В ([13], с. 58) показано, что уравнение (12) имеет в классе $\mathbf{D}'$ своим общим решением $\widetilde{z} = c$ ($c = \mathrm{const}$). Повторяя рассуждения для обобщенных решений с носителем, ограниченным слева, убедимся в том, что решение уравнения (12) должно иметь вид $\widetilde{z}(t) = c\theta(t)$. Учитывая (12) и $\frac{d}{dt}\widetilde{z}(t) = c\delta(t)$, получим $c = 0$. $\square$

4. Построение обобщенного решения

Предположим, что $A(t), B(t) \in \mathbf{C}^\infty(T)$, $T = [0, +\infty)$. Рассмотрим обобщенную задачу Коши

$$A(t)\frac{d}{dt}\widetilde{x}(t) = A(0)a\delta(t) + B(t)\widetilde{x}(t) + \widetilde{f}(t), \tag{13}$$

где $\det A(t) \equiv 0$, $\widetilde{f}(t)$ — заданная, а $\widetilde{x}(t)$ — искомая обобщенные n-мерные вектор-функции класса $\mathbf{K}'_+$.

Допустим также, что для АДС (1) на T определен ЛРО $\mathcal{L}$ (3) с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами. Определим оператор $\widetilde{\mathcal{L}} : \mathbf{K}'_+ \to \mathbf{K}'_+$:

$$\widetilde{\mathcal{L}} = \sum_{j=0}^{r} L_j(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^j. \tag{14}$$

Результатом действия оператора (14) на уравнение (13) будет система

$$\frac{d}{dt}\widetilde{x}(t) = \widehat{B}(t)\widetilde{x}(t) + \sum_{j=0}^{r} L_j(t)A(0)a\left(\frac{d}{dt}\right)^j\delta(t) + \sum_{j=0}^{r} L_j(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^j\widetilde{f}(t), \tag{15}$$

где $\widehat{B}(t) = \sum\limits_{j=0}^{r} L_j(t)B^{(j)}(t)$.

Оказывается, что системы уравнений (13) и (15) эквивалентны в смысле решения в пространстве $\mathbf{K}'_+$.

Теорема 2. *Пусть*
1) $A(t), B(t) \in \mathbf{C}^\infty(T)$,
2) $\operatorname{rank} D_r(t) = n(r+1)\ \forall t \in T$,
3) $\operatorname{rank} \Gamma_r(t) = \varkappa = \mathrm{const}\ \forall t \in T$,
4) *для системы* (1) *на* T *определен ЛРО* (3).

Тогда обобщенные задачи (13) *и* (15) *разрешимы одновременно в пространстве* $\mathbf{K}'_+$, *и их решения, если они существуют, совпадают.*

Доказательство. При сделанных предположениях справедлива лемма 1, в соответствии с которой найдутся $n \times n$-матрицы $U(t), V(t) \in \mathbf{C}^\infty(T)$, неособенные для любого $t \in T$ и такие, что замена переменной $x(t) = U(t)z(t)$ и умножение слева на матрицу $V(t)$ преобразуют АДС (1) к виду

$$z_1'(t) + K_1(t)z_2'(t) = J(t)z_1(t) + M_1(t)z_2(t) + f_1(t), \tag{16}$$

$$K_2(t)z_2'(t) = M_2(t)z_2(t) + f_2(t), \quad t \in T, \tag{17}$$

где $\binom{z_1(t)}{z_2(t)} = z(t)$, $\binom{f_1(t)}{f_2(t)} = V(t)f(t)$, $J(t) \in \mathbf{C}^\infty(T)$ — некоторая $d \times d$-матрица, $K_j(t), M_j(t) \in \mathbf{C}^\infty(T)$ $(j = 1, 2)$ — матрицы подходящих размеров, оператор $\Lambda = K_2(t)\lambda + M_2(t)$ имеет нулевое ядро и для него на T определен ЛРО.

Сделаем в (13) замену переменной $\widetilde{x}(t) = U(t)\widetilde{z}(t)$ и умножим систему слева на матрицу $V(t)$, в результате будем иметь

$$\frac{d}{dt}\widetilde{z}_1(t) + K_1(t)\frac{d}{dt}\widetilde{z}_2(t) = a_1\delta(t) + J(t)\widetilde{z}_1(t) + M_1(t)\widetilde{z}_2(t) + \widetilde{f}_1(t), \tag{18}$$

$$K_2(t)\frac{d}{dt}\widetilde{z}_2(t) = a_2\delta(t) + M_2(t)\widetilde{z}_2(t) + \widetilde{f}_2(t). \tag{19}$$

Здесь $\binom{\widetilde{z}_1(t)}{\widetilde{z}_2(t)} = U^{-1}\widetilde{x}(t)$, $\binom{a_1}{a_2} = \begin{pmatrix} E_d & K_1(0) \\ O & K_2(0) \end{pmatrix} U^{-1}(0)a$, $\binom{\widetilde{f}_1(t)}{\widetilde{f}_2(t)} = V(t)\widetilde{f}(t)$.

Обозначим через $\overline{\Gamma}_r(t)$ и $\overline{D}_r(t)$ матрицы $\Gamma_r(t)$ и $D_r(t)$ из (4) в случае, когда

$$A(t) = \begin{pmatrix} E_d & K_1(t) \\ O & K_2(t) \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} J(t) & M_1(t) \\ O & M_2(t) \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\overline{D}_r(t) = \overline{V}(t)D_r(t)\overline{U}(t), \quad \overline{\Gamma}_r(t) = \overline{V}(t)\Gamma_r(t)\overline{U}(t), \tag{20}$$

$$\overline{V}(t) = \operatorname{diag}\{V(t), V(t), \dots, V(t)\},$$

$$\overline{U}(t) = \begin{pmatrix} C_0^0 U(t) & O & \dots & O \\ C_1^0 U'(t) & C_1^1 U(t) & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_r^0 U^{(r)}(t) & C_r^1 U^{(r-1)}(t) & \dots & C_r^r U(t) \end{pmatrix}.$$

В силу неособенности на T матриц $V(t)$ и $U(t)$ из представления (20) и предположений 2), 3) теоремы вытекают равенства

$$\operatorname{rank} \overline{D}_r(t) = n(r+1), \quad \operatorname{rank} \overline{\Gamma}_r(t) = \varkappa = \text{const} \quad \forall t \in T.$$

Отсюда с учетом структуры матриц $\begin{pmatrix} E_d & K_1(t) \\ O & K_2(t) \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} J(t) & M_1(t) \\ O & M_2(t) \end{pmatrix}$, определяющих вместе со своими производными матрицы $\overline{D}_r(t)$ и $\overline{\Gamma}_r(t)$, будем иметь

$$\operatorname{rank} \widehat{D}_r(t) = (n-d)(r+1), \quad \operatorname{rank} \widehat{\Gamma}_r(t) = \varkappa - (r+1)d = \text{const} \quad \forall t \in T,$$

где

$$\widehat{\Gamma}_r(t) = \begin{pmatrix} C_0^0 K_2(t) & O & \dots & O \\ C_1^0 K_2'(t) - C_1^1 M_2(t) & C_1^1 K_2(t) & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_r^0 K_2^{(r)}(t) - C_r^1 M_2^{(r-1)}(t) & C_r^1 K_2^{(r-1)}(t) - C_r^2 M_2^{(r-2)}(t) & \dots & C_r^r K_2(t) \end{pmatrix},$$

$$\widehat{D}_r(t) = \left(\begin{pmatrix} -C_0^0 M_2(t) \\ -C_1^0 M_2'(t) \\ \vdots \\ -C_r^0 M_2^{(r)}(t) \end{pmatrix}, \ \widehat{\Gamma}_r(t) \right).$$

Таким обазом, для АДС (17) выполняются все условия теоремы 1, в соответствии с которой на T определен оператор $\mathcal{R} = \sum\limits_{j=0}^{r-1} R_j(t)\lambda^j$, действие которого преобразует систему (17) к виду $z_2(t) = \mathcal{R}[f_2(t)]$ при достаточно гладкой функции $f_2(t)$.

Наличие оператора $\mathcal{R}$ позволяет выписать ЛРО $\mathcal{S}$ для АДС (16), (17)

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} \mathcal{E} & -K_1(t)\lambda \circ \mathcal{R} \\ O & \lambda \circ \mathcal{R} \end{pmatrix},$$

где $\mathcal{E}$ — тождественный оператор, λ — оператор дифференцирования в обычном смысле.

Обратимся к обобщенной задаче (18), (19). Подействуем на уравнения (18), (19) оператором $\widetilde{\mathcal{S}} : \mathbf{K}'_+ \to \mathbf{K}'_+$:

$$\widetilde{\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} \mathcal{E} & -K_1(t)\frac{d}{dt} \circ \widetilde{\mathcal{R}} \\ O & \frac{d}{dt} \circ \widetilde{\mathcal{R}} \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\mathcal{R}} = \sum_{j=0}^{r-1} R_j(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^j.$$

Задача (18), (19) преобразуется к виду

$$\frac{d}{dt}\widetilde{z}_1(t) = a_1\delta(t) - K_1(t)\frac{d}{dt}\sum_{j=0}^{r-1} R_j(t)a_2\left(\frac{d}{dt}\right)^j \delta(t) + J(t)\widetilde{z}_1(t) +$$

$$+M_1(t)\widetilde{z}_2(t) + \widetilde{f}_1(t) - K_1(t)\frac{d}{dt}\sum_{j=0}^{r-1} R_j(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^j \widetilde{f}_2(t), \tag{21}$$

$$\frac{d}{dt}\widetilde{z}_2(t) = \frac{d}{dt}\sum_{j=0}^{r-1} R_j(t)a_2\left(\frac{d}{dt}\right)^j \delta(t) + \frac{d}{dt}\sum_{j=0}^{r-1} R_j(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^j \widetilde{f}_2(t). \tag{22}$$

В условиях теоремы решение задачи (19) существует, единственно и выражается формулой

$$\widetilde{z}_2(t) = \widetilde{\mathcal{R}}[a_2\delta(t) + \widetilde{f}_2(t)] = \sum_{j=0}^{r-1} R_j(t)a_2\left(\frac{d}{dt}\right)^j \delta(t) + \sum_{j=0}^{r-1} R_j(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^j \widetilde{f}_2(t). \tag{23}$$

Очевидно, функция (23) удовлетворяет уравнению (22), которое в соответствии с леммой 3 разрешимо в пространстве $\mathbf{K}'_+$ единственным образом. Поэтому система (18), (19) и полученная из нее действием ЛРО $\widetilde{\mathcal{S}}$ система (21), (22) эквивалентны в смысле решения.

Поскольку решения задач (13) и (18), (19) связаны равенством

$$\widetilde{x}(t) = U(t)\begin{pmatrix} \widetilde{z}_1(t) \\ \widetilde{z}_2(t) \end{pmatrix}, \tag{24}$$

то ЛРО $\widetilde{\mathcal{L}}$ для системы (13) можно искать, руководствуясь правилом $\widetilde{\mathcal{L}}[\widetilde{\psi}(t)] = U(t)\widetilde{\mathcal{S}}[V(t)\widetilde{\psi}(t)]$ для любой n-мерной вектор-функции $\widetilde{\psi}(t) \in \mathbf{K}'_+$. Системы (13) и (18), (19), (15) и (21), (22) одновременно попарно разрешимы, и их решения связаны соотношением (24). Следовательно, по доказанному выше задачи (13) и (15) эквивалентны в смысле решения. $\square$

Теорема 2 дает возможность получить конструктивное представление для решения задачи (13) в случае, когда правая часть является суммой некоторой регулярной обобщенной функции класса $\mathbf{K}'_+$ и линейной комбинации дельта-функции и ее производных.

Рассмотрим систему

$$A(t)\frac{d}{dt}\widetilde{x}(t) = A(0)a\delta(t) + B(t)\widetilde{x}(t) + \psi(t)\theta(t) + \sum_{i=0}^{s} b_i\left(\frac{d}{dt}\right)^i\delta(t), \tag{25}$$

где $a, b_i \in \mathbf{R}^n$ $(i = \overline{0,s})$ — заданные векторы, $\psi(t) \in \mathbf{C}^r(T)$ $(T = [0,+\infty))$ — заданная n-мерная вектор-функция, $n\times n$-матрицы $A(t), B(t) \in \mathbf{C}^\infty(T)$ таковы, что $\det A(t) \equiv 0$ и для соответствующей АДС (1) на T определен ЛРО $\mathcal{L}$ (3). Не ограничивая общности, можно считать, что в (25) $s \geq r$, где r — порядок ЛРО (3).

Оператору $\mathcal{L}$ поставим в соответствие обобщенный ЛРО

$$\widetilde{\mathcal{L}} = \sum_{j=0}^{r} L_j(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^j,$$

в котором производные понимаются в обобщенном смысле, $n\times n$-матрицы $L_j(t)$ такие же, как в (3), и в силу сделанных предположений относительно гладкости матричных коэффициентов $A(t)$ и $B(t)$ $L_j(t) \in \mathbf{C}^\infty(T)$.

Последовательно применяя правило дифференцирования (11), получим формулу для обобщенной производной

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^j(\psi(t)\theta(t)) = \psi^{(j)}(t)\theta(t) + \sum_{i=0}^{j-1}\psi^{(j-1-i)}(0)\left(\frac{d}{dt}\right)^i\delta(t), \quad j = \overline{1,r},$$

с учетом которой действие оператора $\widetilde{\mathcal{L}}$ преобразует уравнение (25) к виду

$$\frac{d}{dt}\widetilde{x}(t) = \sum_{j=0}^{r} L_j(t)A(0)a\left(\frac{d}{dt}\right)^j\delta(t) + \sum_{j=0}^{r} L_j(t)\psi^{(j)}(t)\theta(t) + \widehat{B}(t)\widetilde{x}(t) +$$
$$+ \sum_{j=0}^{r} L_j(t)\sum_{i=0}^{j-1}\psi^{(j-1-i)}(0)\left(\frac{d}{dt}\right)^i\delta(t) + \sum_{j=0}^{r} L_j(t)\sum_{i=0}^{s} b_i\left(\frac{d}{dt}\right)^{i+j}\delta(t), \tag{26}$$

где $\widehat{B}(t) = \sum\limits_{j=0}^{r} L_j(t)B^{(j)}(t)$.

По теореме 2 системы (25) и (26) эквивалентны в смысле решения. Поэтому решение задачи (26) будет удовлетворять и уравнению (25).

Решение системы (26) в классе $\mathbf{K}'_+$ будем искать в виде

$$\widetilde{x}(t) = \eta(t)\theta(t) + \sum_{j=0}^{p} w_{p-j}\left(\frac{d}{dt}\right)^j\delta(t), \tag{27}$$

где $\eta(t) \in \mathbf{C}^1(T)$ — искомая n-мерная вектор-функция, w_{p-j} — искомые векторы из $\mathbf{R}^n$, p — некоторое натуральное число.

Тогда $\frac{d}{dt}\widetilde{x}(t) = \eta'(t)\theta(t) + \eta(0)\delta(t) + \sum\limits_{j=0}^{p} w_{p-j}(\frac{d}{dt})^{j+1}\delta(t)$. Подставим представления для $\widetilde{x}(t)$ и его производной в систему (25) и приравняем регулярные

$$\eta'(t) = \widehat{B}(t)\eta(t) + \sum_{j=0}^{r} L_j(t)\psi^{(j)}(t), \quad t \in T, \tag{28}$$

и сингулярные слагаемые

$$\eta(0)\delta(t)+\sum_{j=0}^{p}w_{p-j}\left(\frac{d}{dt}\right)^{j+1}\delta(t)=\sum_{j=0}^{r}L_j(t)A(0)a\left(\frac{d}{dt}\right)^{j}\delta(t)+$$
$$+\widehat{B}(t)\sum_{j=0}^{p}w_{p-j}\left(\frac{d}{dt}\right)^{j}\delta(t)+\sum_{j=1}^{r}L_j(t)\sum_{i=0}^{j-1}\psi^{j-1-i}(0)\left(\frac{d}{dt}\right)^{i}\delta(t)+$$
$$+\sum_{j=0}^{r}L_j(t)\sum_{i=0}^{s}b_i\left(\frac{d}{dt}\right)^{i+j}\delta(t). \quad (29)$$

Для представления решения системы ОДУ (28) имеется формула

$$\eta(t)=\Omega(t)\eta(0)+\Omega(t)\int_0^t\Omega^{-1}(\tau)\sum_{j=0}^{r}L_j(\tau)\psi^{(j)}(\tau)d\tau. \quad (30)$$

Здесь $\Omega(t)$ — $n\times n$-матрица, являющаяся решением задачи Коши

$$\Omega'(t)=\widehat{B}(t)\Omega(t),\quad t\in T=[0,+\infty),\quad \Omega(0)=E_n, \quad (31)$$

а значение $\eta(0)$ пока неизвестно.

Обозначим

$$\sum_{j=0}^{r+s}v_j\left(\frac{d}{dt}\right)^{j}\delta(t)=\sum_{j=0}^{r}L_j(t)A(0)a\left(\frac{d}{dt}\right)^{j}\delta(t)+$$
$$+\sum_{j=1}^{r}L_j(t)\sum_{i=0}^{j-1}\psi^{j-i-1}(0)\left(\frac{d}{dt}\right)^{i}\delta(t)+\sum_{j=0}^{r}L_j(t)\sum_{i=0}^{s}b_i\left(\frac{d}{dt}\right)^{i+j}\delta(t). \quad (32)$$

Тогда равенство (29) перепишется в виде

$$\eta(0)\delta(t)+\sum_{j=0}^{p}w_{p-j}\left(\frac{d}{dt}\right)^{j+1}\delta(t)=\widehat{B}(t)\sum_{j=0}^{p}w_{p-j}\left(\frac{d}{dt}\right)^{j}\delta(t)+\sum_{j=0}^{r+s}v_j\left(\frac{d}{dt}\right)^{j}\delta(t), \quad (33)$$

откуда, очевидно, следует $p=r+s-1$.

В соответствии с формулой (10) будем иметь

$$\widehat{B}(t)\sum_{j=0}^{p}w_{p-j}\left(\frac{d}{dt}\right)^{j}\delta(t)=\sum_{j=0}^{p}\sum_{i=0}^{j}(-1)^iC_j^i\widehat{B}^{(i)}(0)w_{p-j}\left(\frac{d}{dt}\right)^{j-i}\delta(t),$$

C_j^i — биномиальные коэффициенты. Подставляя это выражение в (33) и приравнивая коэффициенты при одинаковых производных от дельта-функции, получим рекуррентные формулы для вычисления коэффициентов w_{p-j}, $j=\overline{0,p}$, $p=r+s-1$,

$$w_0=v_{r+s},\quad w_k=v_{r+s-k}+\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{k-1-i}C_{p-i}^{k-1-i}\widehat{B}^{k-1-i}(0)w_i,\quad k=\overline{1,r+s-1}, \quad (34)$$

а также выражение

$$\eta(0)=v_0+\sum_{i=0}^{r+s-1}(-1)^{r+s-1-i}\widehat{B}^{r+s-1-i}(0)w_i, \quad (35)$$

которое позволяет получить окончательный вид регулярной составляющей решения (30).

Найдем из равенства (32) явный вид векторов v_i, $i=\overline{0,r+s}$. Для этого, используя формулу (10), преобразуем слагаемые, входящие в правую часть соотношения (32)

$$\sum_{j=0}^{r} L_j(t)A(0)a\left(\frac{d}{dt}\right)^{j}\delta(t)=\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{j}(-1)^i C_j^i L_j^{(i)}(0)A(0)a\left(\frac{d}{dt}\right)^{j-1}\delta(t),$$

$$\sum_{j=0}^{r} L_j(t)\sum_{i=0}^{s} b_i\left(\frac{d}{dt}\right)^{i+j}\delta(t)=\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{s}\sum_{k=0}^{i+j}(-1)^k C_{i+j}^k L_j^{(k)}(0)b_i\left(\frac{d}{dt}\right)^{i+j-k}\delta(t),$$

$$\sum_{j=1}^{r} L_j(t)\sum_{i=0}^{j-1}\psi^{j-1-i}(0)\left(\frac{d}{dt}\right)^{i}\delta(t)=\sum_{j=1}^{r}\sum_{i=0}^{j-1}\sum_{k=0}^{i}(-1)^k C_i^k L_j^{(k)}(0)\psi^{j-1-i}(0)\left(\frac{d}{dt}\right)^{i-k}\delta(t).$$

Подставим эти выражения в (32) и приравняем коэффициенты при одинаковых производных дельта-функции, в результате получим искомые формулы

$$\begin{gathered}
v_k=\left(\sum_{j=k}^{r}(-1)^{j-k}C_j^{j-k}L_j^{(j-k)}(0)\right)A(0)a+\sum_{j=0}^{k}\sum_{i=k-j}^{s}(-1)^{i-k+j}C_{i+j}^{i+j-k}L_j^{(i+j-k)}(0)b_i+\\
+\sum_{j=k+1}^{k}\sum_{i=0}^{j-k-1}(-1)^i C_{i+k}^i L_j^{(i)}(0)\psi^{(j-k-i-1)}(0)+\\
+\sum_{j=k+1}^{r}\sum_{i=0}^{s}(-1)^{i+j-k}C_{i+j}^{i+j-k}L_j^{(i+j-k)}(0)b_i,\quad k=\overline{0,r-1},\\
v_r=C_r^0L_r(0)A(0)a+\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=r-j}^{s}(-1)^{i+j-r}C_{i+j}^{i+j-r}L_j^{(i+j-r)}(0)b_i,\\
v_k=\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=k-j}^{s}(-1)^{i+j-k}C_{i+j}^{i+j-k}L_j^{(i+j-k)}(0)b_i,\quad k=\overline{r+1,s},\\
v_k=\sum_{j=k-s}^{r}\sum_{i=k-j}^{s}(-1)^{i+j-k}C_{i+j}^{i+j-k}L_j^{(i+j-k)}(0)b_i,\quad k=\overline{s+1,s+r}.
\end{gathered}\tag{36}$$

Таким образом, доказана

Теорема 3. *Пусть*
1) $A(t),B(t)\in\mathbf{C}^\infty(T)$, $\psi(t)\in\mathbf{C}^r(T)$, $T=[0,+\infty)$,
2) *для системы* (1) *на* T *определен ЛРО порядка* r *вида* (3).

Тогда решение задачи (25) *существует, единственно в классе* $\mathbf{K}'_+$ *и представимо в виде* (27), *где* $\eta(t)$ *находится по формуле* (30), *в которой* $\Omega(t)$ *является решением матричной задачи Коши* (31), *а значение* $\eta(0)$ *определяется равенством* (35), *векторы* w_k, $k=\overline{0,r+s-1}$, *вычисляются с использованием рекуррентных формул* (34), *где* v_i, $i=\overline{0,r+s}$, *имеют вид* (36).

Замечание 3. Результат теоремы может быть обобщен на случай, когда функция $\psi(t)$ в системе (25) локально интегрируема на T.

Пример 2. Рассмотрим обобщенную задачу Коши в пространстве $\mathbf{K}'_+$

$$A(t)\frac{d}{dt}\widetilde{x}(t)=A(0)a\delta(t)+\widetilde{x}(t)+\widetilde{f}(t).\tag{37}$$

Здесь $a\in\mathbf{R}^2$ — заданный вектор, $\widetilde{f}(t)$ — заданная обобщенная функция из $\mathbf{K}'_+$, $A(t)=\begin{pmatrix}0&u(t)\\v(t)&0\end{pmatrix}$, где $u(t)$ и $v(t)$ выбираются из пространства $\mathbf{C}^\infty(T)$, $T=[0,+\infty)$, по правилу $v(t)=0$, если $u(t)\neq 0$. Заметим, что ранг матрицы $A(t)$ может меняться как в отдельных точках, так и на некоторых интервалах из T, на которых функции $u(t)$ и $v(t)$ обращаются в нуль одновременно.

Обобщенный ЛРО для этой системы имеет вид

$$\widetilde{\mathcal{L}} = -(E_2 + A'(t))\frac{d}{dt} - A(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^2$$

(в этом нетрудно убедиться с помощью определения 1), поэтому $L_0(t) = O$, $L_1(t) = -(E_2 + A'(t))$, $L_2(t) = -A(t)$, $t \in T$.

Непосредственной подстановкой проверяется, что решение задачи (37) выражается формулой

$$\widetilde{x}(t) = -A(0)a\delta(t) - \widetilde{f}(t) - A(t)\left(\frac{d}{dt}\right)\widetilde{f}(t). \tag{38}$$

Подействуем на уравнение (37) оператором $\widetilde{\mathcal{L}}$, в результате получим систему, разрешенную относительно производной искомой обобщенной функции $\widetilde{x}(t)$,

$$\frac{d}{dt}\widetilde{x}(t) = -(E + A'(t))A(0)a\frac{d}{dt}\delta(t) - A(t)A(0)a\left(\frac{d}{dt}\right)^2\delta(t) - \\ - (E + A'(t))\frac{d}{dt}\widetilde{f}(t) - A(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^2\widetilde{f}(t). \tag{39}$$

Подстановка функции (38) в систему (39) обращает последнюю в тождество. Поскольку задачи (37) и (39) разрешимы единственным образом, то тем самым показано, что системы (37) и (39) эквивалентны в смысле решения.

Конкретизируем вид функции

$$\widetilde{f}(t) = \psi(t)\theta(t) + b_0\delta(t) + b_1\frac{d}{dt}\delta(t) + b_2\left(\frac{d}{dt}\right)^2\delta(t), \tag{40}$$

где $\psi(t) \in \mathbf{C}^1(T)$ и $b_i \in \mathbf{R}^2$ $(i = 0, 1, 2)$ известны.

Найдем решение задачи (37), (40), пользуясь теоремой 3. А именно, будем искать его в виде (27), где $p = 3$.

Поскольку $B(t) = E_2$, то $\widehat{B}(t) = L_0(t)B(t) + L_1(t)B'(t) + L_2(t)B''(t) \equiv O$ на T, и решение матричной задачи Коши (31) будет иметь вид $\Omega(t) = E_2$, $t \in T$. По формуле (30) можем найти функцию

$$\eta(t) = \eta(0) + \int_0^t (-(E + A'(\tau))\psi'(\tau) - A(\tau)\psi''(\tau))d\tau = \eta(0) + \\ + \int_0^t (-\psi(\tau) - A(\tau)\psi'(\tau))'d\tau = \eta(0) - \psi(t) - A(t)\psi'(t) + \psi(0) + A(0)\psi'(0). \tag{41}$$

Из (34) получим

$$\eta(0) = v_0, \quad w_0 = v_4, \quad w_1 = v_3, \quad w_2 = v_2, \quad w_3 = v_1. \tag{42}$$

По формулам (36) найдем векторы v_k, $k = \overline{0, 4}$. С учетом значений биномиальных коэффициентов и вида коэффициентов ЛРО

$$\begin{gathered} v_0 = -\psi(0) - A(0)\psi'(0), \\ v_1 = -A(0)a - A(0)\psi(0) - (E - A'(0))b_0 - A''(0)b_1 + A'''(0)b_2, \\ v_2 = -A(0)b_0 + (-E + 2A'(0))b_1 - 3A''(0)b_2, \\ v_3 = -A(0)b_1 + (-E + 3A'(0))b_2, \quad v_4 = -A(0)b_2. \end{gathered} \tag{43}$$

Результатом подстановки выражений (43) в (42) и (41), а затем полученных равенств в (27) будет окончательное представление для решения

$$\widetilde{x}(t) = \big(-A(t)\psi'(t) - \psi(t)\big)\theta(t) + \big(-A(0)a - A(0)\psi(0) - (E - A'(0))b_0 - \\ - A''(0)b_1 + A'''(0)b_2\big)\delta(t) + \big(-A(0)b_0 + (-E + 2A'(0))b_1 - 3A''(0)b_2\big)\left(\frac{d}{dt}\right)\delta(t) + \\ + \big(-A(0)b_1 + (-E + 3A'(0))b_2 \big)\left(\frac{d}{dt}\right)^2\delta(t) - A(0)b_2\left(\frac{d}{dt}\right)^3\delta(t).$$

Для того чтобы убедиться в том, что получено то же самое решение, нужно представление (40) для $\widetilde{f}(t)$ подставить в (38), а затем преобразовать полученное выражение с помощью формулы (10).

Литература

1. Melnikova I.V., Anufrieva U.A., Ushkov V.Yu. *Degenerate distribution semigroups and well-posedness of the Cauchy problem* // J. Integral Transforms and Special Funct. – 1997. – V. 6. – № 1–4. – P. 228–337.
2. Гантмахер Ф.Р. *Теория матриц.* – М.: Наука, 1967. – 575 с.
3. Сидоров Н.А., Фалалеев М.В. *Обобщенные решения вырожденных дифференциальных уравнений в банаховых пространствах* // Метод функций Ляпунова в анализе динамики систем. – Новосибирск: Наука, 1987. – С. 308–318.
4. Cobb D. *On the solution of linear differential equations with singular coefficients* // J. Different. Equations. – 1982. – № 42. – P. 311–323.
5. Geerts T. *Solvability conditions, consistency and weak consistency for linear differential-algebraic equations and time-invariant singular systems*: *the general case* // Lin. Alg. Appl. – 1993. – № 181. – P. 111–130.
6. Rabier P.J., Rheinboldt W.C. *Theoretical and numerical analysis of differential-algebraic equations.* Handbook of Numerical Analysis. V. VIII. – Amsterdam, 2002.
7. Щеглова А.А., Чистяков В.Ф. *Устойчивость линейных алгебро-дифференциальных систем* // Дифференц. уравнения. – 2004. – Т. 40. – № 1. – С. 47–57.
8. Щеглова А.А. *К вопросу об обобщенном решении алгебро-дифференциальных систем* // Сиб. матем. журн. – 2002. – Т. 43. – № 4. – С. 964–973.
9. Shcheglova A.A. Classical and generalized solutions of differential-algebraic systems with deviating argument // Functional Differential Equations. – 2004. – № 3–4. – P. 485–510.
10. Чистяков В.Ф. *Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром.* – Новосибирск: Наука, 1996. – 280 с.
11. Чистяков В.Ф., Щеглова А.А. Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем. – Новосибирск: Наука, 2003. – 320 с.
12. Бояринцев Ю.Е. Методы решения вырожденных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. – Новосибирск: Наука, 1998. – 157 с.
13. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. *Обобщенные функции и действия над ними.* – М.: Физматгиз, 1959. – 470 с.
14. Шилов Г.Е. *Математический анализ. Второй специальный курс.* – М.: Наука, 1965. – 327 с.

Институт динамики систем
и теории управления
Сибирского отделения

Поступила
04.03.2004

Российской академии наук