

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное учреждение  
высшего профессионального образования  
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по научной деятельности КФУ

Проф. Д.К. Нургалеев

" 12 " 2014 г.



**Программа дисциплины**

Б1.В.ОД.7 Вычислительная математика

Направление подготовки: 02.06.01 Компьютерные и информационные науки

Направленность (профиль) подготовки: 01.01.07 – Вычислительная математика

Квалификация выпускника «Исследователь. Преподаватель-исследователь»

Форма обучения: очная

Язык обучения: русский

Казань 2014

## 1. КРАТКАЯ АННОТАЦИЯ

Дисциплина посвящена теории приближения функций (интерполяция многочленами и сплайнами, наилучшее приближение в нормированных пространствах), численному интегрированию и дифференцированию, приближенным методам решения систем линейных алгебраических уравнений, нелинейных уравнений и систем, обыкновенных дифференциальных уравнений.

## 2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ) В СТРУКТУРЕ ОПОП

Курс «Вычислительная математика» входит в разряд обязательных дисциплин. Осваивается на 3 курсе в 5 семестре.

Для успешного освоения данной дисциплины нужно освоение в качестве предшествующих следующих дисциплин: “Математического анализа”, “Алгебры и геометрии”, “Дифференциальные уравнения.

## 3. ПЕРЕЧЕНЬ ПЛАНИРУЕМЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

Знать:

основные понятия, проблемы и методы, связанные с приближенным решением типичных задач математического анализа, алгебры, обыкновенных дифференциальных уравнений

Уметь:

самостоятельно анализировать и решать теоретические и практические задачи, связанные с использованием численных методов.

Владеть:

теоретическими знаниями о наиболее употребительных методах численного решения типичных задач математического анализа, алгебры, обыкновенных дифференциальных уравнений;

Демонстрировать способность и готовность:

самостоятельно анализировать и решать теоретические и практические задачи, связанные с использованием численных методов; ориентироваться в потоке информации о численных методах; применять полученные знания на практике

В результате освоения дисциплины формируются компетенции:

Шифр компетенции	Расшифровка приобретаемой компетенции
ПК- 1	способность к организации и проведению научно-исследовательской деятельности в области компьютерных и информационных наук, в том числе руководству научно-исследовательской работой студентов

#### 4. Структура и содержание дисциплины (модуля)

##### 4.1. Распределение трудоёмкости дисциплины (в часах) по видам нагрузки обучающегося и по разделам дисциплины

Общая трудоёмкость дисциплины составляет 3 зачетные единицы, 108 часов (лекции 36 ч., самостоятельная работа 18 ч., подготовка к экзамену 54ч.).

Итоговая форма контроля: экзамен.

№	Раздел Дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоёмкость (в часах)		
				лекции	практика	Самост. работа
1	Приближение функций	5	5-7	8	0	20
2	Численное интегрирование и дифференцирование	5	8-19	6	0	20
3	Численные методы алгебры	5	11-13	12	0	17
4	Решение задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка	5	14-15	10	0	15

#### 4.2 Содержание дисциплины

##### Тема 1. Приближение функций.

Алгебраическое интерполирование, формула Лагранжа и барицентрическая формула.

Остаточный член интерполяционного полинома. Элемент наилучшего среднеквадратичного приближения.

Ортогональные полиномы и их свойства. Функции MatLab, связанные с полиномами и приближением функций.

##### Тема 2. Численное интегрирование и дифференцирование.

Интерполяционные квадратурные формулы. Квадратурные формулы Гаусса. Составные квадратуры. Формулы Численного дифференцирования. Функции MatLab, связанные с численным интегрированием и дифференцированием функций

##### Тема 3. Численные методы алгебры.

Прямые методы решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Метод Гаусса. Метод Гаусса с выбором главных элементов. Метод Гаусса и разложение матриц на треугольные множители. LU разложение профильных и разреженных матриц. Нормы векторов и матриц. Итерационные методы решения СЛАУ. Критерии сходимости.

Методы Якоби, Зейделя и релаксации. Итерационные методы вариационного типа. Метод наискорейшего спуска. Понятие о методе сопряженных градиентов.

Решение нелинейных уравнений. Метод Ньютона.

Функции MatLab, связанные с решением систем алгебраических уравнений.

##### Тема 4. Решение задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

Методы типа Рунге-Кутты. Методы типа Адамса. Построение методов типа Адамса на основе интерполяционных формул. Явный и неявный метод типа Адамса. Понятие о жесткости систем ОДУ. Устойчивость явного и неявного метода Эйлера для линейных систем ОДУ. Функции MatLab, связанные с решением задачи Коши для систем ОДУ.

## 5. Образовательные технологии

Обучение происходит в форме лекционных занятий, а также самостоятельной работы студентов. Теоретический материал излагается на лекциях. Причем конспект лекций, который остается у студента в результате прослушивания лекции не может заменить учебник. Его цель - формулировка основных понятий, определений и утверждений. Прослушав лекцию, полезно ознакомиться с более подробным изложением материала в учебнике. Список литературы разделен на две категории: необходимый для сдачи коллоквиума минимум и дополнительная литература. Самостоятельная работа предполагает выполнение домашних работ и изучение дополнительного материала. Закрепить навыки можно лишь в результате самостоятельной работы. Кроме того, самостоятельная работа включает подготовку к коллоквиуму. При подготовке к сдаче коллоквиума весь объем работы рекомендуется распределять равномерно по дням, отведенным для подготовки к коллоквиуму, контролировать каждый день выполнения работы. Лучше, если можно перевыполнить план. Тогда всегда будет резерв времени.

## 6. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА АСПИРАНТОВ (СРА) включает следующие виды работ:

1. Темы дисциплины, которые отводятся для самостоятельной работы:
  1. Представление чисел в ЭВМ. Плавающая арифметика. Абсолютная и относительная погрешность. Рост погрешности при вычислении функции.
  2. Полиномы Чебышева. Минимизация погрешности интерполирования.
  3. Постановка задачи интерполирования с кратными узлами (интерполяция Эрмита). Существование и единственность интерполяционного полинома. Представление погрешности интерполяционного полинома Эрмита.
  4. Приближение функций методом наименьших квадратов.
  5. Интерполяция сплайнами. Кусочно-полиномиальная интерполяция Лагранжа и Эрмита. Построение кубического интерполяционного сплайна.
  6. Приближение функций в MatLab с помощью функций [interp1](#), spline
  7. Квадратурные формулы наивысшей алгебраической точности с частично фиксированными узлами, квадратурные формулы Гаусса-Лобатто. Построение и основные свойства. Примеры квадратурных формул Гаусса-Лобатто.
  8. Метод Холецкого и LDL разложения для решения СЛАУ с симметричной матрицей.
  9. Решение тестовых СЛАУ в MatLab с помощью функций `\`, lu, chol, qr
  10. Метод прогонки решения систем линейных уравнений с трехдиагональной матрицей.
  11. Матрицы отражений и их свойства. Решение системы линейных алгебраических уравнений методом отражений.

12. Исследование двухслойных итерационных методов для систем с симметричными положительно определенными матрицами. Оптимальный выбор итерационного параметра.
13. Устойчивость решения СЛАУ к возмущениям исходных данных.
14. Решение тестовых разреженных СЛАУ в MatLab с помощью функций `pcg` и `gmr`
15. Итерационные методы решения нелинейных уравнений: метод простой итерации, метод Ньютона, метод секущих, метод хорд,
16. Решение тестовых нелинейных уравнений в MatLab с помощью функции `fzero`.
17. Простейшие варианты методов Рунге-Кутты: метод Эйлера, трапеций, центральных прямоугольников.
18. Программирование методов Рунге-Кутты.
19. Теорема о сходимости методов Рунге-Кутты.
20. Вложенные методы Рунге-Кутты.
21. Решение задачи Коши для систем ОДУ при помощи функций системы MatLab `ode45`, `ode15`.

## **7. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ**

### **7.1. Регламент дисциплины**

**Форма контроля: экзамен**

**Промежуточная форма контроля** – оценка успешности выполнения самостоятельных заданий

### **7.2. Оценочные средства текущего контроля**

Примеры вопросов для самостоятельной работы

1. Интерполяционный полином Лагранжа. Остаточный член интерполяционного полинома.
2. Существование и единственность интерполяционного полинома Эрмита. Оценка точности.
3. Элемент наилучшего среднеквадратичного приближения. Существование и единственность. Построение.
4. Ортогональные полиномы и их основные свойства. Примеры ортогональных полиномов: полиномы Лежандра, полиномы Чебышева.
5. Метод наименьших квадратов.
6. Интерполяционные квадратурные формулы. Квадратурные формулы Ньютона-Котеса. Квадратурные формулы прямоугольников, трапеций, парабол. Оценки погрешности.
7. Квадратурные формулы Гаусса. Построение и основные свойства.
8. Построение формул численного дифференцирования. Вывод простейших формул, оценка погрешности.
9. Метод Гаусса. Матричная формулировка. Выбор ведущего элемента по столбцу.

### **7.3. Вопросы к экзамену**

1. Прямое LU – разложение матрицы.
2. Метод отражения.
3. Нормы векторов и матриц.
4. Каноническая форма 2-х слойного и.м. Матрица перехода. Достаточное условие сходимости.
5. Метод Якоби. Сходимость для матриц с диагональным преобладанием.

6. Метод релаксации. Сходимость в случае  $A > 0$ .
7. Эквивалентность решения СЛАУ задаче минимизации.
8. Метод наискорейшего спуска
9. Определение методов Рунге-Кутты. Вывод семейства формул 2-го порядка.
10. Оценка точности методов Рунге-Кутты.
11. Явные схемы метода Адамса. Примеры.
12. неявные схемы метода Адамса. Примеры.

#### 7.4. Таблица соответствия компетенций, критериев оценки их освоения и оценочных средств

Индекс компетенции	Расшифровка компетенции	Показатель формирования компетенции для данной дисциплины	Оценочное средство
ПК-1	Способность к организации и проведению научно-исследовательской деятельности в области компьютерных и информационных наук, в том числе руководству научно-исследовательской работой студентов	С учетом полученных знаний, аспирант способен наметить пути организации и проведения научно-исследовательской деятельности в области информатики и вычислительной техники, в том числе руководства научно-исследовательской работой студентов	Выполнение самостоятельной работы аспирантов

### 8. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПРИ ОСВОЕНИИ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

В процессе обучения аспирантов по дисциплине основными формами обучения являются: аудиторные занятия, включающие лекции, и самостоятельная работа. Тематика лекций соответствует содержанию программы дисциплины

Обязательным условием освоения дисциплины является самостоятельная работа аспиранта, выполнение которой аспирант демонстрирует при успешном выполнении самостоятельных работ. Подобная форма обучения развивает навыки поиска научной литературы, ее анализа, составления резюме прочитанного текста, приемов аргументации защищаемых гипотез, т.е. ведения научно-исследовательской работы и ее защиты в рамках профессиональных дискуссий. Аналогичные цели должны преследоваться и при ориентации аспирантов на самостоятельный поиск новых материалов по текущим разделам и чтение дополнительной литературы.

#### Методические рекомендации по самостоятельной работе аспирантов

Самостоятельная работа является обязательной составляющей деятельности аспиранта по изучению дисциплины. Самостоятельная работа направлена на более глубокое изучение отдельных тем дисциплины, систематизацию полученных знаний. Задания для самостоятельной работы включают виды работ, перечисленные выше. В программе дисциплины также указана трудоемкость самостоятельной работы по каждой из тем. Это – время, необходимое для выполнения всех заданий по теме аспирантом с хорошей успеваемостью и средним темпом работы. Время, затрачиваемое каждым

конкретным аспирантом, может существенно отличаться от указанного. В связи с этим, планирование рабочего времени каждым аспирантом должно осуществляться самостоятельно. Однако можно выделить некоторые общие рекомендации. Начинать самостоятельные занятия следует с начала семестра и проводить их регулярно. Не следует откладывать работу из-за «нерабочего настроения». Не следует пытаться выполнить всю самостоятельную работу за один день, накануне представления ее результатов. В большинстве случаев это просто физически невозможно. Гораздо более эффективным является распределение работы на несколько дней: это способствует более качественному выполнению заданий и лучшему усвоению материала. Важно полнее учесть обстоятельства своей работы, уяснить, что является главным на данном этапе, какую последовательность работы выбрать, чтобы выполнить ее лучше и с наименьшими затратами времени и энергии. Для плодотворной работы немаловажное значение имеет обстановка, организация рабочего места. Место работы, по возможности, должно быть постоянным. Работа на привычном месте более плодотворна. Продуктивность работы зависит от правильного чередования труда и отдыха. Помните, что максимальная длительность устойчивости внимания – 45 минут. При появлении рассеянности есть необходимость прервать работу на 3 – 5 минут, но не следует покидать рабочее место. Каждые 1.5 – 2 часа необходимо делать перерыв на 10-15 минут. Желательно сопровождать перерыв интенсивной физической активностью.

## **9. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)**

### **9.1. Основная литература**

Основная литература

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. - М.:Бином. Лаборатория знаний, 2012. - 636 с. [http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_id=4397](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=4397)
2. Глазырина Л. Л. Введение в численные методы: учебное пособие / Л. Л. Глазырина, М. М. Карчевский; Казан. федер. ун-т.. Казань: Казанский университет, 2012. 121 с.
3. Даутов Р.З. Практикум по курсу численные методы. Решение задачи Коши для системы ОДУ. - Казань, КФУ, 2014, 100 с. [http://repository.kpfu.ru/?p\\_id=99043](http://repository.kpfu.ru/?p_id=99043)

### **9.2. Дополнительная литература**

1. Лапчик, М. П. Численные методы: учеб. пособие для студ. вузов / М. П. Лапчик, М. И. Рагулина, Е. К. Хеннер ; под ред. М. П. Лапчика. 5-е изд., стер.. М.: Академия, 2009. 384 с
2. Самарский А. А. Введение в численные методы: учеб. пособие для вузов / А. А. Самарский; Моск. гос. ун-т им. М. В. Ломоносова. 3-е изд., стер.. Санкт-Петербург: Лань, 2005. 288 с.
3. Бахвалов Н.С., Лапин А.В., Чижонков Е.В. Численные методы в задачах и упражнениях. - М.:Бином. Лаборатория знаний, 2010. - 240 с. URL: [http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_id=4399](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=4399)

### **9.3. Интернет-ресурсы:**

Портал математических интернет-ресурсов (<http://www.math.ru/>)  
Портал математических интернет-ресурсов (<http://www.allmath.com/>)  
Портал ресурсов по естественно-научным дисциплинам (<http://en.edu.ru/>)  
Сайт образовательных ресурсов по математике (<http://www.exponenta.ru/>)  
Справочник по компьютерной математике (<http://www.users.kaluga.ru/math/>)

## **10. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ И ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)**

Лекции в аудитории, оснащенной доской и мелом (маркером)

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО аспирантуры  
(Приказ Минобрнауки РФ от 30.07.2014 № 866)

Автор(ы): Даутов Р.З.

Рецензенты:

Программа одобрена на заседании Учебно-методической комиссии Института ВМ и ИТ  
КФУ от 11 сентября 2014 г. протокол № 1.