ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 6 (457)

УДК 517.929.4 : 519.21

Р.И. КАДИЕВ

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F})_{t\geq 0}, P)$ — стохастический базис ([1], с. 9); $\bigvee\limits_{s=0}^{t} g(s)$ — полная вариация функции $g(s)$ на отрезке $[0,t]$; D^n — линейное пространство n-мерных предсказуемых ([1], с. 13) случайных процессов на $[0,+\infty[$, траектории которых почти наверно (п. н.) непрерывны справа и имеют предел слева; k^n — линейное пространство n-мерных $\mathcal{F}_0$-измеримых случайных величин; $Z = \mathrm{col}(z^1, \dots, z^m)$ есть m-мерный семимартингал ([1], с. 73); $L^n(Z)$ — линейное пространство предсказуемых $n \times m$-матриц на $[0,+\infty[$, строки которых локально интегрируемы по семимартингалу Z; $\lambda : [0,+\infty[\to R_+$ — некоторая неубывающая функция; λ^* — мера, порожденная функцией λ; L_q^λ — линейное пространство скалярных функций на $[0,+\infty[$, суммируемых со степенью q при $1 \leq q < \infty$ по мере λ^* и ограниченных в существенном при $q = \infty$ по мере λ^*; R^n — линейное пространство n-мерных векторов с нормой $|\cdot|$; $\|\cdot\|$ — норма $l \times n$-матрицы, согласованная с нормой $|\cdot|$; $\|\cdot\|_X$ — норма в нормированном пространстве X; $\|x\|_t = \sup\limits_{0\leq s\leq t} |x(s)|$, если $x \in R^n$; $\|H\|_t = \sup\limits_{0\leq s\leq t} \|H\|$, если H — $l \times n$-матрица; $1 \leq p < \infty$; c_p — положительное число, зависящее от p, в неравенстве (9.48) из ([1], с. 65).

Для заданного числа p и положительной скалярной функции $\gamma(t)$, $t \in [0,+\infty[$, в [2] введены нормированные пространства M_p^γ ($M_p^1 = M_p$), k_p^n. Для любых $x \in D^n$, $x = \mathrm{col}(x^1, \dots, x^n)$, $0 < k < n$, введем следующие обозначения: $y = \mathrm{col}(x^1, \dots, x^k)$, $h = \mathrm{col}(x^{k+1}, \dots, x^n)$. Тогда $x = \mathrm{col}(y, h)$ и $D^n = D^k \times D^{n-k}$.

В дальнейшем предположим, что семимартингал Z представи́м в виде $Z = b + c$, где b — предсказуемый случайный процесс локально ограниченной вариации, а c — локально квадратично интегрируемый мартингал ([1], с. 28). Кроме того, все компоненты процесса b и взаимные характеристики $\langle c^i, c^j\rangle$ ([1], с. 48) всех компонент мартингала c будем предполагать абсолютно непрерывными относительно меры λ^*. Последнее означает, что

$$b^i = \int_0^\cdot a^i d\lambda, \quad \langle c^i, c^j\rangle = \int_0^\cdot A^{ij} d\lambda \quad (i,j = 1, \dots, m).$$

Пусть $a = \mathrm{col}(a^1, \dots, a^m)$; $A = [A^{ij}]$ — $n \times m$-матрица; $a^+ = \mathrm{col}(|a^1|, \dots, |a^m|)$; $A^+ = [|A^{ij}|]$; если B — $n\times n$-матрица, то B^1 — $k\times k$-матрица, полученная из матрицы B зачеркиванием $n-k$ последних столбцов и строк, B^2 — $k\times(n-k)$-матрица, полученная из матрицы B зачеркиванием k первых столбцов и $n-k$ последних строк, B^3 — $(n-k)\times k$-матрица, полученная из матрицы B зачеркиванием первых k строк и последних $n-k$ столбцов, B^4 — $(n-k)\times(n-k)$-матрица, полученная из матрицы B зачеркиванием k первых строк и столбцов.

Рассмотрим уравнение

$$dx(t) = (Vx)(t)dZ(t), \quad t \geq 0, \tag{1}$$

где $(Vx)(t) = \Big(\int\limits_0^t d_s\mathcal{R}_1(t,s)x(s), \dots, \int\limits_0^t d_s\mathcal{R}_m(t,s)x(s)\Big)$, $\mathcal{R}_i(t,s) = \sum\limits_{j=0}^{m_i} A_{ij}(t)r_{ij}(t,s)$, A_{ij} — $n \times n$-матрица, элементами которой являются предсказуемые случайные процессы, $r_{ij}(t,s)$ — скалярная функция, определенная в области $\{(t,s) : 0 \le s \le t < +\infty\}$, $i = 1,\dots,m$, $j = 0,\dots,m_i$.

Уравнение (1) рассматривается в предположении, что

$$\int_0^t (|H_1 a^+| + \|H_1 A^+ H_1^\top\|)d\lambda < \infty$$

п. н. для любого $t \ge 0$, где $H_1 = (H_1^1, \dots, H_1^m)$, $H_1^i = \sum\limits_{j=0}^{m_i} \|A_{ij}\| \mathop{\dot{\bigvee}}\limits_{s=0} r_{ij}(\cdot,s)$ при $i = 1,\dots,m$. Тогда оператор V действует из пространства D^n в пространство $L^n(Z)$ и через любое $x(0) \in k^n$ проходит единственное (с точностью до P-эквивалентности) решение $x(t)$ уравнения (1) [3]. Это решение имеет представление $x(t) = X(t)x(0)$, $t \ge 0$, где X — фундаментальная матрица уравнения (1) [2].

Частными случаями уравнения (1) являются два вида систем.

а) Линейная стохастическая система с сосредоточенным запаздыванием

$$dx(t) = (V^1x)(t)dZ(t), \quad t \ge 0, \quad x(s) = 0, \quad s < 0, \tag{2}$$

где $(V^1x)(t) = \Big(\sum\limits_{j=0}^{m_1} \overline{A}_{1j}(t)x(h_{1j}(t)), \dots, \sum\limits_{j=0}^{m_m} \overline{A}_{mj}(t)x(h_{mj}(t))\Big)$, $\overline{A}_{ij}$ — $n \times n$-матрица, элементами которой являются предсказуемые случайные процессы, h_{ij} — измеримая функция такая, что $h_{ij}(t) \le t$, $t \in [0, +\infty[$, λ^* почти всюду (п. в.) при $i = 1,\dots,m$, $j = 0,\dots,m_i$.

Уравнение (2) рассматривается в предположении, что

$$\int_0^t (|H_2 a^+| + \|H_2 A^+ H_2^\top\|)d\lambda < \infty$$

п. н. для любого $t \ge 0$, где $H_2 = (H_2^1, \dots, H_2^m)$, $H_2^i = \sum\limits_{j=0}^{m_i} \|\overline{A}_{ij}\|$ при $i = 1,\dots,m$. Тогда уравнение (2) является частным случаем уравнения (1) и $\mathcal{R}_i(t,s) = \sum\limits_{j=0}^{m_i} \overline{A}_{ij}(t)r_{ij}(t,s)$, где r_{ij} — характеристическая функция множества $\{(t,s) : h_{ij}(t) \le s \le t\}$, определенная в области $\{(t,s) : 0 \le s \le t < +\infty\}$ при $i = 1,\dots,m$, $j = 0,\dots,m_i$.

б) Линейная система “обыкновенных” стохастических дифференциальных уравнений

$$dx(t) = (V^2x)(t)dZ(t), \quad t \ge 0, \tag{3}$$

где $(V^2x)(t) = (A_1(t)x(t), \dots, A_m(t)x(t))$, A_i — $n \times n$-матрица, элементами которой являются предсказуемые случайные процессы при $i = 1,\dots,m$. Кроме того, $\int\limits_0^t (|H_3 a^+| + \|H_3 A^+ H_3^\top\|)d\lambda < \infty$ п. н. для любого $t \ge 0$, где $H_3 = (H_3^1, \dots, H_3^m)$, $H_3^i = \|A_i\|$ при $i = 1,\dots,m$. В этом случае $\mathcal{R}_i(t,s) = A_i(t)r(t,s)$, где r — характеристическая функция множества $\{(t,s) : s = t\}$, определенная в области $\{(t,s) : 0 \le s \le t < \infty\}$ при $i = 1,\dots,m$.

Пусть x_i, $i = 1,\dots,n$, — столбцы матрицы X. Тогда через Y обозначим $k \times n$-матрицу, столбцами которой являются y_i, $i = 1,\dots,n$. По теореме 1 из [4] уравнение (1) py–устойчиво, асимптотически py–устойчиво, экспоненциально py–устойчиво ([4], определение 3) тогда и только тогда, когда для любого $x_0 \in k_p^n$ имеем $Yx_0 \in M_p$, $Yx_0 \in M_p^\gamma$, где $\gamma \ge \delta > 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} \gamma(t) = +\infty$, $Yx_0 \in M_p^\gamma$, где $\gamma(t) = \exp\{\beta t\}$, а β — некоторое положительное число. Поэтому в дальнейшем будем изучать более общий вид устойчивости уравнения (1), объединяющий все виды устойчивости.

Определение. Уравнение (1) назовем $M_p^\gamma y$-устойчивым, если для любого $x_0 \in k_p^n$ имеем $Yx_0 \in M_p^\gamma$.

Уравнение (1) эквивалентно системе вида

$$\begin{aligned} dy(t) &= [(V_1y)(t) + (V_2h)(t)]dZ(t), \quad t \geq 0, \\ dh(t) &= [(V_3y)(t) + (V_4h)(t)]dZ(t), \quad t \geq 0, \end{aligned} \tag{4}$$

где $(V_lx)(t) = \Big(\int\limits_0^t d_s\mathcal{R}_1^l(t,s), \ldots, \int\limits_0^t d_s\mathcal{R}_m^l(t,s)\Big)$, $\mathcal{R}_i^l(t,s) = \sum\limits_{j=0}^{m_i} A_{ij}^l(t) r_{ij}(t,s)$ при $l = \overline{1,4}$, $i = 1, \ldots, m$.

В силу того, что через любое $x(0) \in k^n$ проходит единственное решение $x(t)$ уравнения (1), каждое из уравнений системы (4) в отдельности будет иметь единственное решение при любых $y(0) \in k^k$, $h \in D^{n-k}$ и $h(0) \in k^{n-k}$, $y \in D^k$ соответственно. Тогда второе уравнение системы (4) эквивалентно уравнению $h(t) = H(t)h(0) + (K_1V_3y)(t)$, $t \geq 0$, где H — фундаментальная матрица, K_1 — оператор Коши для второго уравнения этой системы [2]. Отсюда и из первого уравнения системы (4) получим

$$dy(t) = [(V_5y)(t) + (V_2(Hh(0)))(t)]dZ(t), \quad t \geq 0, \tag{5}$$

где $V_5 = V_1 + V_2K_1V_3$, и уравнение (1) $M_p^\gamma y$-устойчиво тогда и только тогда, когда для любого $x(0) \in k_p^n$ решение уравнения (5) принадлежит пространству M_p^γ.

В дальнейшем предположим, что для уравнений (1)–(3) оператор V_4 такой, что имеет место равенство $(K_1V_3y)(t) = H(t)\int\limits_0^t (H(s))^{-1}(V_3y)(s)dZ(s)$. Далее будем считать, что $\overline{V}_1$, $\overline{V}_2$, $\overline{V}_3$ — операторы, определяемые равенствами $\overline{V}_1y = V_1y$, $\overline{V}_2y = V_2(Hy)$, $\overline{V}_3 = H^{-1}V_3y$ соответственно.

Теорема 1. *Пусть существуют предсказуемые случайные процессы d_i и положительные числа $\overline{c}_i$ при $i = 1, \ldots, 6$ такие, что для любых $y \in D^k$, $\phi \in D^{n-k}$ имеют место неравенства $|(\overline{V}_1y)(\cdot)a(\cdot)| \leq d_1(\cdot)\|y\|_{(\cdot)}$, $\|(\overline{V}_1y)(\cdot)A(\cdot)((\overline{V}_1y)(\cdot))^\top\| \leq d_2(\cdot)\|y\|_{(\cdot)}$, $|(\overline{V}_2\phi)(\cdot)a(\cdot)| \leq d_3(\cdot)\|\phi\|_{(\cdot)}$, $\|(\overline{V}_2\phi)(\cdot)A(\cdot)((\overline{V}_2\phi)(\cdot))^\top\| \leq d_4(\cdot)\|\phi\|_{(\cdot)}$, $|(\overline{V}_3y)(\cdot)a(\cdot)| \leq d_5(\cdot)\|y\|_{(\cdot)}$, $\|(\overline{V}_3y)(\cdot)A(\cdot)((\overline{V}_3y)(\cdot))^\top\| \leq d_6(\cdot)\|y\|_{(\cdot)}$, $\int\limits_0^\infty d_i(s)d\lambda(s) \leq \overline{c}_i$ п. н. при $i = 1, \ldots, 6$ и $\int\limits_0^{\cdot}(V_2(Hh(0)))(s)dZ(s) \in M_{2p}$ при любом $h(0) \in k_{2p}^{n-k}$. Тогда уравнение (1) $M_{2p}y$-устойчиво.*

Пусть ξ — скалярная функция на $[0, +\infty[$, локально суммируемая по функции λ, а $\gamma(t) = \exp\Big\{-\int\limits_0^t \xi(s)d\lambda(s)\Big\}$.

Следствие 1. Пусть существуют предсказуемые случайные процессы $\widehat{d}_i$ и положительные числа $\widehat{c}_i$ при $i = 1, \ldots, 6$ такие, что для любых $y \in D^k$, $\phi \in D^{n-k}$ имеют место неравенства $|(1/\gamma(\cdot))(\overline{V}_1(\gamma y))(\cdot)a(\cdot) + \xi y| \leq \widehat{d}_1(\cdot)\|y\|_{(\cdot)}$, $\|(1/\gamma(\cdot))^2(\overline{V}_1(\gamma y))(\cdot)A(\cdot)((\overline{V}_1(\gamma y))(\cdot))^\top\| \leq \widehat{d}_2(\cdot)\|y\|_{(\cdot)}$, $|(1/\gamma(\cdot))(\overline{V}_2(\gamma\phi))(\cdot)a(\cdot)| \leq \widehat{d}_3(\cdot)\|\phi\|_{(\cdot)}$, $\|(1/\gamma(\cdot))^2(\overline{V}_2(\gamma\phi))(\cdot)A(\cdot)((\overline{V}_2(\gamma\phi))(\cdot))^\top\| \leq \widehat{d}_4(\cdot)\|\phi\|_{(\cdot)}$, $|(1/\gamma(\cdot))(\overline{V}_3(\gamma y))(\cdot)a(\cdot)| \leq \widehat{d}_5(\cdot)\|y\|_{(\cdot)}$, $\|(1/\gamma(\cdot))^2(\overline{V}_3(\gamma y))(\cdot)A(\cdot)((\overline{V}_3(\gamma y))(\cdot))^\top\| \leq \widehat{d}_6(\cdot)\|y\|_{(\cdot)}$, $\int\limits_0^\infty \widehat{d}_i(s)d\lambda(s) \leq \widehat{c}_i$ п. н. при $i = 1, \ldots, 6$ и $\int\limits_0^{\cdot}(1/\gamma(s))(V_2(Hh(0)))(s)dZ(s) \in M_{2p}$ при любом $h(0) \in k_{2p}^{n-k}$. Тогда уравнение (1) $M_{2p}^{1/\gamma}y$-устойчиво.

Следствие 2. Если существует $\widehat{C} > 0$ такое, что для уравнения (1) имеет место неравенство $\int\limits_0^\infty (|H_1^j a^+| + \|H_1^j A^+(H_1^j)^\top\|)d\lambda \leq \widehat{C}$ п. н. при $j = \overline{1,3}$, где $H_1^j = (H_1^{j1}, \ldots, H_1^{jm})$, $j = \overline{1,3}$, $H_1^{1j} = \sum\limits_{j=0}^{m_i} \|A_{ij}^1\| \bigvee\limits_{s=0}^{\cdot} r_{ij}(\cdot, s)$, $H_1^{2j} = \sum\limits_{j=0}^{m_i} \|A_{ij}^2\| \, \|H\|_{(\cdot)} \bigvee\limits_{s=0}^{\cdot} r_{ij}(\cdot, s)$, $H_1^{3j} = \sum\limits_{j=0}^{m_i} \|H^{-1}A_{ij}^3\| \bigvee\limits_{s=0}^{\cdot} r_{ij}(\cdot, s)$, $i = 1, \ldots, m$, $\int\limits_0^{\cdot}(V_2(Hh(0)))(s)dZ(s) \in M_{2p}$ для любого $h(0) \in k_{2p}^{n-k}$, то уравнение (1) $M_{2p}y$-устойчиво.

Следствие 3. Пусть существует $\widehat{C} > 0$ такое, что для уравнения (2) имеет место неравенство $\int\limits_0^\infty (|H_2^j a^+| + \|H_2^j A^+(H_2^j)^\top\|)d\lambda \leq \widehat{C}$ п. н. при $j = \overline{1,3}$, где $H_2^j = (H_2^{j1}, \ldots, H_2^{jm})$, $j = \overline{1,3}$, $H_2^{1j} =$

$\sum\limits_{j=0}^{m_i}\|\overline{A}_{ij}^1\|$, $H_2^{2j}=\sum\limits_{j=0}^{m_i}\|\overline{A}_{ij}^2\|\,\|H\|_{(\cdot)}$, $H_2^{3j}=\sum\limits_{j=0}^{m_i}\|H^{-1}\overline{A}_{ij}^3\|$, $i=1,\dots,m$, $\int\limits_0^{\cdot}(V_2(Hh(0)))(s)dZ(s)\in M_{2p}$ для любого $h(0)\in k_{2p}^{n-k}$. Тогда уравнение (2) $M_{2p}y$-устойчиво.

Следствие 4. Если существует $\widehat{C}>0$ такое, что для уравнения (3) имеет место неравенство $\int\limits_0^{\infty}(|H_3^ja^+|+\|H_3^jA^+(H_3^j)^\top\|)d\lambda\le\widehat{C}$ п. н. при $j=\overline{1,3}$, где $H_3^j=(H_3^{j1},\dots,H_3^{jm})$, $j=\overline{1,3}$, $H_3^{1j}=\|A_i^1\|$, $H_3^{2j}=\|A_i^2H\|$, $H_3^{3j}=\|H^{-1}A_i^3\|$, $i=1,\dots,m$, $\int\limits_0^{\cdot}(V_2(Hh(0)))(s)dZ(s)\in M_{2p}$ для любого $h(0)\in k_{2p}^{n-k}$, то уравнение (3) $M_{2p}y$-устойчиво.

Отметим, что для получения $M_p^{1/\gamma}y$-устойчивости уравнений (1)–(3) можно воспользоваться следствием 1 теоремы 1.

В дальнейшем без ограничения общности предположим, что $a^1=1$, $A^{11}=0$, $a^i=0$ при $i=2,\dots,m$ $\lambda^*\times P$ п. в. Пусть далее $2p\le q\le\infty$, $A^{ij}=0$ $\lambda^*\times P$ п. в. при $i,j=1,\dots,m$ и $i\ne j$, $v(t)=\int\limits_0^t\xi(s)d\lambda(s)$, $\Delta v=v(t)-v(s)$, $\sup\limits_{t\ge1}(v(t)-v(t-1))<+\infty$, $\gamma(t)=\exp\{\beta v(t)\}$, $\beta>0$.

Для уравнения (1) дополнительно положим $\|A_{1j}^l\|\le a_{1j}^l$ $\lambda^*\times P$ п. в. и $\overline{a}_{1j}^l=a_{1j}^l\bigvee\limits_{s=0}^{\cdot}r_{1j}(\cdot,s)\cdot\xi^{1/q-1}\in L_q^\lambda$ при $l=1,2$, $j=0,\dots,m_1$, $\|A_{ij}^l\|\,|A^{ii}|^{1/2}\le h_{ij}^l$ $\lambda^*\times P$ п. в. и $\overline{h}_{ij}^l=h_{ij}^l\bigvee\limits_{s=0}^{\cdot}r_{ij}(\cdot,s)\xi^{1/q-1/2}\in L_q^\lambda$ при $l=1,2$, $i=2,\dots,m$, $j=0,\dots,m_i$, для любого $y\in M_{2p}$ имеем $K_1V_3y\in M_{2p}$ и $\|K_1V_3y\|_{M_{2p}}\le\overline{c}\|y\|_{M_{2p}}$, где $\overline{c}$ — некоторое положительное число. Тогда справедлива

Теорема 2. *Пусть $0\le l\le m_1$, существуют положительные числа δ_{1j}, $j=0,\dots,l$, α такие, что $r_{1j}(t,s)=0$ при $0\le s\le t-\delta_{1j}<+\infty$, $t\in[0,+\infty[$, $j=0,\dots,l$, $\Big\|\sum\limits_{j=0}^{l}A_{1j}^1\int\limits_0^{\cdot}d_\nu r_{1j}(\cdot,\nu)+\alpha\xi E\Big\|\le g$, $\overline{g}=g\xi^{1/q-1}\in L_q^\lambda$ и выполнено неравенство*

$$\rho\overset{\text{def}}{=}(1/\alpha)^{1-1/q}\Bigg[\|\overline{g}\|_{L_q^\lambda}+\sum_{j=0}^{l}\|\overline{a}_{1j}^1\|_{L_q^\lambda}\Bigg(\overline{\delta}_{1j}^{1-1/q}\sum_{j=0}^{m_1}(\|\overline{a}_{1j}^1\|_{L_q^\lambda}+\overline{c}\|\overline{a}_{1j}^2\|_{L_q^\lambda})+$$
$$+c_p\overline{\delta}_{1j}^{1/2-1/q}\sum_{i=2}^{m}\sum_{j=0}^{m_i}(\|\overline{h}_{ij}^1\|_{L_q^\lambda}+\overline{c}\|\overline{h}_{ij}^2\|_{L_q^\lambda})\Bigg)+\sum_{j=l+1}^{m_1}\|\overline{a}_{1j}^1\|_{L_q^\lambda}+\overline{c}\sum_{j=0}^{m_1}\|\overline{a}_{1j}^2\|_{L_q^\lambda}\Bigg]+$$
$$+c_p(1/2\alpha)^{1/2-1/q}\sum_{i=2}^{m}\sum_{j=0}^{m_i}(\|\overline{h}_{ij}^1\|_{L_q^\lambda}+\overline{c}\|\overline{h}_{ij}^2\|_{L_q^\lambda})<1,$$

где $\overline{\delta}_{1j}=\sup\limits_{t\ge\delta_{1j}}\int\limits_{t-\delta_{1j}}^{t}\xi(s)d\lambda(s)$ при $j=0,\dots,l$, и для любого $h(0)\in k_{2p}^{n-k}$ имеем

$$\int_0^{\cdot}\exp\{-\alpha\Delta v\}(V_2(Hh(0)))(s)dZ(s)\in M_{2p}. \tag{6}$$

Тогда уравнение (1) $M_{2p}y$-устойчиво. Если, кроме того, для некоторого $\beta_0>0$ при любых $0\le\beta\le\beta_0$, $z\in M_{2p}$, $h(0)\in k_{2p}^{n-k}$ имеем $\gamma K_1V_3(z/\gamma)\in M_{2p}$,

$$\int_0^{\cdot}\exp\{-\alpha\Delta v\}\gamma(s)(V_2(Hh(0)))(s)dZ(s)\in M_{2p} \tag{7}$$

и $\|\gamma K_1V_3(z/\gamma)\|_{M_{2p}}\le\overline{c}_1\|z\|_{M_{2p}}$, где $\overline{c}_1$ — некоторое положительное число, существуют положительные числа δ_{1j}, $j=l+1,\dots,m_1$, δ_{ij}, $i=2,\dots,m$, $j=0,\dots,m_i$, такие, что $r_{1j}(t,s)=0$ при $0\le s\le t-\delta_{1j}<+\infty$, $t\in[0,+\infty[$, $j=l+1,\dots,m_1$, $r_{ij}(t,s)=0$ при $0\le s\le t-\delta_{ij}<+\infty$, $t\in[0,+\infty[$, $i=2,\dots,m$, $j=0,\dots,m_i$, то уравнение (1) $M_{2p}^\gamma y$-устойчиво при некотором $\beta>0$.

Предположим, что для уравнения (1) выполняются следующие условия: $\|A^1_{1j}\| \le a^l_{1j}$, $\|A^2_{1j}\|\,\|H\|_{(\cdot)} \le a^l_{1j}$ $\lambda^* \times P$ п.в. и $\overline{a}^l_{1j} = a^l_{1j} \bigvee\limits_{s=0}^{\cdot} r_{1j}(\cdot,s)\xi^{1/q-1} \in L^\lambda_q$ при $l = 1,2$, $j = 0,\dots,m_1$, $\|A^1_{ij}\|\,|A^{ii}|^{1/2} \le h^l_{ij}$, $\|A^2_{ij}\|\,\|H\|_{(\cdot)}|A^{ii}|^{1/2} \le h^l_{ij}$ $\lambda^* \times P$ п.в. и $\overline{h}^l_{ij} = h^l_{ij} \bigvee\limits_{s=0}^{\cdot} r_{ij}(\cdot,s)\xi^{1/q-1/2} \in L^\lambda_q$ при $l = 1,2$, $i = 2,\dots,m$, $j = 0,\dots,m_i$; для любого $y \in M_{2p}$ имеем $\int\limits_0^{\cdot}(\overline{V}_3 y)(s)dZ(s) \in M_{2p}$ и $\|\int\limits_0^{\cdot}(\overline{V}_3 y)(s)dZ(s)\|_{M_{2p}} \le \overline{c}\|y\|_{M_{2p}}$, где $\overline{c}$ — некоторое положительное число. Тогда справедлива

Теорема 3. *Пусть $0 \le l \le m_1$, существуют положительные числа δ_{1j}, $j = 0,\dots,l$, α такие, что $r_{1j}(t,s) = 0$ при $0 \le s \le t - \delta_{1j} < +\infty$, $t \in [0,+\infty[$, $j = 0,\dots,l$, $\left\| \sum\limits_{j=0}^{l} A^1_{1j} \int\limits_0^{\cdot} d_\nu r_{1j}(\cdot,\nu) + \alpha\xi E\right\| \le g$, $\overline{g} = g\xi^{1/q-1} \in L^\lambda_q$ и выполнено неравенство $\rho < 1$, где ρ определен в теореме 2 и для любого $h(0) \in k^{n-k}_{2p}$ имеем (6). Тогда уравнение (1) $M_{2p}y$-устойчиво. Если, кроме того, для некоторого $\beta_0 > 0$ при любых $0 \le \beta \le \beta_0$, $z \in M_{2p}$, $h(0) \in k^{n-k}_{2p}$ имеем (7), $\gamma\int\limits_0^{\cdot}(\overline{V}_3(z/\gamma))(s)dZ(s) \in M_{2p}$, и $\left\|\gamma\int\limits_0^{\cdot}(\overline{V}_3(z/\gamma))(s)dZ(s)\right\|_{M_{2p}} \le \overline{c}_1\|z\|_{M_{2p}}$, где $\overline{c}_1$ — некоторое положительное число, существуют положительные числа δ_{1j}, $j = l+1,\dots,m_1$, δ_{ij}, $i = 2,\dots,m$, $j = 0,\dots,m_i$, такие, что $r_{1j}(t,s) = 0$ при $0 \le s \le t - \delta_{1j} < +\infty$, $t \in [0,+\infty[$, $j = l+1,\dots,m_1$, $r_{ij}(t,s) = 0$ при $0 \le s \le t - \delta_{ij} < +\infty$, $t \in [0,+\infty[$, $i = 2,\dots,m$, $j = 0,\dots,m_i$, то уравнение (1) $M^\gamma_{2p}y$-устойчиво при некотором $\beta > 0$.*

Литература

1. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. *Теория мартингалов.* – М.: Наука, 1986. – 512 с.
2. Кадиев Р.И., Поносов А.В. *Устойчивость линейных стохастических функционально-дифференциальных уравнений при постоянно действующих возмущениях* // Дифференц. уравнения. – 1992. – Т. 28. – № 2. – С. 198–207.
3. Кадиев Р.И. *Существование и единственность решения задачи Коши для функционально-дифференциальных уравнений по семимартингалу* // Изв. вузов. Математика. – 1995. – № 10. – С. 35–40.
4. Кадиев Р.И. *Допустимость пар пространств по части переменных для линейных стохастических функционально-дифференциальных уравнений* // Изв. вузов. Математика. – 1994. – № 4. – С. 1–10.

Дагестанский государственный университет

Поступили
полный текст 30.06.1994
краткое сообщение 22.12.1999