ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 7 (470)

УДК 517.983

И.С. ШРАЙФЕЛЬ, И.М. МАЛЬЦЕВ

КРИТЕРИИ БАЗИСНОЙ ОДНОСВЯЗНОСТИ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К ВОПРОСУ О РАЗРЕШИМОСТИ УРАВНЕНИЯ СВЕРТКИ

1. *Введение.* Пусть Q — связное множество в $\overline{\mathbb{C}}$, $H(Q)$ — пространство аналитических ростков на Q с индуктивной топологией [1], $a(z)$ — целая функция экспоненциального типа с сопряженной диаграммой B и ассоциированной по Борелю функцией $A(t)$. Предметом многих исследований являлся вопрос об эпиморфизме оператора свертки

$$(L_a y)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma y(t)A(t-z)dt,$$

который, как известно (см., напр., [2]), при надлежащем выборе контура Γ действует непрерывно из $H(Q+B)$ в $H(Q)$ (как обычно, $Q+B := \{z_1+z_2 : z_1 \in Q,\ z_2 \in B\}$). Наиболее полно изучен в работах А.О. Гельфонда, H. Muggly, Ю.Ф. Коробейника, О.В. Епифанова, С.В. Знаменского и других авторов случай, когда Q — область или компакт в $\mathbb{C}$. Гораздо меньше исследован вопрос об эпиморфности оператора $L_a : H(Q+B) \to H(Q)$ для связных множеств, не являющихся ни областями, ни компактами в $\mathbb{C}$. Условия эпиморфности L_a (отдельно необходимые и достаточные, а в ряде случаев и критерии) для некоторых типов таких множеств Q получены в [2]–[7]. Все связные множества Q, рассмотренные в этих работах, обладают свойством базисной односвязности, т. е. имеют базис односвязных окрестностей. По-видимому, С.В. Знаменский впервые заметил, что односвязность множества еще не гарантирует его базисной односвязности. В связи с этим возник поставленный Ю.Ф. Коробейником вопрос о характеризации базисно односвязных множеств. В [8] дано "операторное" описание свойства базисной односвязности. В частности, согласно [8] базисная односвязность Q равносильна выполнению любого из двух эквивалентных условий: 1) существует оператор свертки L_a с отличной от постоянной характеристической функцией $a(z)$ — целой функцией минимального типа при порядке 1, который отображает $H(Q)$ на $H(Q)$; 2) оператор дифференцирования y' отображает $H(Q)$ на $H(Q)$.

В данной работе, в связи с поставленным в [8] вопросом, находятся критерии базисной односвязности иного, "геометрического" характера. В конце работы даются некоторые приложения этих критериев к вопросу об эпиморфности оператора свертки L_a. Результаты пп. 2, 3 принадлежат И.С. Шрайфелю, п. 4 — И.М. Мальцеву.

2. *Критерии базисной односвязности.* Наделим расширенную комплексную плоскость $\overline{\mathbb{C}}$ метрикой ρ с помощью стереографической проекции. Рассматриваемые в этом пункте множества являются подмножествами $\overline{\mathbb{C}}$. Заметим, что в данном случае компактность множества равносильна его замкнутости. Для $Q \subset \overline{\mathbb{C}}$ применяем следующие обозначения: 2^Q — множество всех подмножеств Q, $\complement Q = \overline{\mathbb{C}} \setminus Q$, $\operatorname{Cl} Q$ — замыкание Q в $\overline{\mathbb{C}}$, $\operatorname{Fr} Q = \operatorname{Cl} Q \bigcap \operatorname{Cl}(\complement Q)$. Для любых $z \in \overline{\mathbb{C}}$, $\varepsilon > 0$ и непустых множеств $K, S \subset \overline{\mathbb{C}}$

$$U_\varepsilon(z) = \{w \in \overline{\mathbb{C}} : \rho(z,w) < \varepsilon\}, \quad \rho(K,S) = \inf\{\rho(\zeta,w) : \zeta \in S,\ w \in K\},$$
$$\rho(z,K) = \rho(\{z\},K), \qquad \mu(K,S) = \sup\{\rho(w,S) : w \in K\}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-01041).

Следуя ([9], § 29), определим верхний и нижний пределы последовательности непустых множеств $(Q_n)_{n=1}^{\infty}$ таким образом:

$$\operatorname*{Ls}_{n\to\infty} Q_n = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : \liminf_{n\to\infty} \rho(z, Q_n) = 0\},$$
$$\operatorname*{Li}_{n\to\infty} Q_n = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : \lim_{n\to\infty} \rho(z, Q_n) = 0\}.$$

Если $\tau(z)$ — отображение множества Q в $2^{\overline{\mathbb{C}}} \setminus \{\varnothing\}$, z — точка сгущения Q, то полагаем

$$\operatorname*{Ls}_{\substack{w\to z\\ w\in Q}} \tau(w) = \{\zeta \in \overline{\mathbb{C}} : \liminf_{\substack{w\to z\\ w\in Q}} \rho(\zeta, \tau(w)) = 0\},$$
$$\operatorname*{Li}_{\substack{w\to z\\ w\in Q}} \tau(w) = \{\zeta \in \overline{\mathbb{C}} : \lim_{\substack{w\to z\\ w\in Q}} \rho(\zeta, \tau(w)) = 0\}.$$

Пусть X, Y — топологические пространства. Отображение $F : Y \to 2^X$ называется полунепрерывным сверху, если для каждого открытого множества $A \subset X$ множество $F^{-1}(2^A)$ открыто в пространстве Y ([9], § 18).

Связное множество Q называется односвязным, если множество $\complement Q$ связно. Связное множество Q называется базисно односвязным, если для любой области $G \supset Q$ существует односвязная область $G_1 : Q \subset G_1 \subset G$. Следующие три определения взяты из ([10], сс. 176, 196). Всякий связный компакт называется континуумом. Множество Q называется полуконтинуумом, если для любых z_1, z_2 из Q существует континуум $K : z_1, z_2 \in K \subset Q$. Полуконтинуум — связное множество. Пусть Q — произвольное множество, $z \in Q$. Объединение всех континуумов $K : z \in K \subset Q$ называется конституантой точки z (во множестве Q).

Введем еще три определения. Простым компактом будем называть конечное множество или счетный компакт, имеющий единственную предельную точку. Множество Q назовем квазиконтинуумом, если для любого простого компакта $K \subset Q$ существует континуум $K_1 : K \subset K_1 \subset Q$. Множество Q назовем почти континуумом, если для любого компакта $K \subset Q$ существует континуум $K_1 : K \subset K_1 \subset Q$.

Отметим очевидные импликации:

Q — континуум $\Rightarrow$ Q — почти континуум $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Q — квазиконтинуум $\Rightarrow$ Q — полуконтинуум.

Ниже будет доказано, что для односвязного множества понятия почти континуальности и квазиконтинуальности эквивалентны. Примером почти континуума, не являющегося континуумом, служит открытый круг в $\overline{\mathbb{C}}$. Покажем, что из полуконтинуальности множества не следует, вообще говоря, его квазиконтинуальность. Пусть Q_n — двузвенная ломаная с вершинами в точках $z_2 = 0$, $w_n = 1+\frac{i}{2n}$, $z_n = \frac{1}{n}+\frac{i}{n(2n+1)}$, $n = 3, 4, \ldots$ Зафиксируем какую-либо точку ζ_n, лежащую внутри острого угла $z_2 w_n z_n$ на прямой $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$. Тогда $Q = \bigcup_{n=3}^{\infty} Q_n$ и $\complement Q$ — полуконтинуумы, не являющиеся квазиконтинуумами: выбрав в качестве простого компакта в Q ($\complement Q$) множество $K = \{z_n\}_{n=2}^{\infty}$ (соответственно $\{\frac{1}{2}\} \bigcup \{\zeta_n\}_{n=3}^{\infty}$), видим что в Q ($\complement Q$) не существует континуума, содержащего K.

Исследуя вопрос о базисной односвязности произвольного множества, исключаем из рассмотрения очевидные случаи $Q = \overline{\mathbb{C}}$, $\varnothing$, $\{z_0\}$, $\complement\{z_0\}$, в которых множество Q базисно односвязно и почти континуально. Считаем далее, что каждое из множеств Q и $\complement Q$ содержит не менее двух точек. В следующих ниже теоремах 1, 2 символом $\varphi(z_1, z_2)$ обозначается множество всех континуумов K таких, что $z_1, z_2 \in K \subset \complement Q$.

Теорема 1. *Пусть Q — связное множество, z' — произвольная, но фиксированная точка из $\complement Q$. Следующие утверждения равносильны*:

(1) Q — *базисно односвязное множество*;
(2) $\complement Q$ — *квазиконтинуум*;
(3) $\complement Q$ — *почти континуум*;

(4) *существует отображение* $K : \complement Q \to 2^{\overline{\mathbb{C}}}$ *такое, что* $\forall z \in \complement Q$

$$K(z) \in \varphi(z', z), \qquad \operatorname*{Ls}_{\substack{w \to z \\ w \in \complement Q}} K(w) \subset \complement Q;$$

(5) $\exists K : \complement Q \to 2^{\overline{\mathbb{C}}} : \forall z \in \complement Q\ K(z) \in \varphi(z', z)$,

$$\lim_{\substack{w \to z \\ w \in \complement Q}} \mu(K(w), K(z)) = 0;$$

(6) *существует полунепрерывное сверху отображение* $K : \complement Q \to 2^{\overline{\mathbb{C}}} : \forall z \in \complement Q\ K(z) \in \varphi(z', z)$.

Доказательство. (3) $\Rightarrow$ (2) не требует доказательства.

(1) $\Rightarrow$ (3). Рассмотрим произвольный компакт K, содержащийся в $\complement Q$. Тогда $\complement K$ — открытое множество, содержащее Q. Представим $\complement K$ в виде объединения его компонент:

$$\complement K = \bigcup_{j \in J} U_j,$$

U_j — область $\forall j \in J$ ([10], с. 235). Так как множество Q связно, то $\exists j_0 \in J : Q \subset U_{j_0}$ ([10], с. 148). В силу базисной односвязности Q, найдется односвязная область U такая, что $Q \subset U \subset Uj_0$. Имеем

$$\complement Q \supset \complement U \supset \complement U_{j_0} \supset \complement \bigcup_{j \in J} U_j = K,$$

причем $\complement U$ — континуум. Следовательно, $\complement Q$ — почти континуум.

(3) $\Rightarrow$ (1). Рассмотрим произвольную область $G(\supset Q)$. Тогда $\complement G(\subset \complement Q)$ — компакт. Существует континуум $K : \complement G \subset K \subset \complement Q$. Множество $G_1 = \complement K$ открыто, причем $G \supset G_1 \supset Q$. Пусть

$$G_1 = \bigcup_{j \in J} U_j,$$

U_j $(j \in J)$ — все компоненты множества G_1. Найдется $j_0 \in J : Q \subset U_{j_0} \subset G$. Согласно теореме 5 ([10], с. 149) область U_{j_0} односвязна. Таким образом, множество Q базисно односвязно.

(2) $\Rightarrow$ (6). Примем следующие обозначения. Для любых $w \in Q$, простого компакта $K \subset \complement Q$ и множества $T \subset Q$ положим $r(w, K) = \frac{1}{4}\sup\{\rho(w, S) : S$ — континуум, $K \bigcup \{z'\} \subset S \subset \complement Q\}$ (> 0), $r(w, z) = r(w, \{z\})$, $L(T, K) = \complement Q \setminus (\bigcup_{w \in T} U_{r(w,K)}(w))$, $L(T, z) = L(T, \{z\})$. Для любого множества $A(\ni z')$ символом A' обозначаем конституанту точки z' в A. Докажем, что $z \in (L(T, z))'$ для всяких $z \in \complement Q$ и конечного множества $T \subset Q$. Для одноточечного множества T это утверждение очевидно. Предположим, что найдутся точка $z \in \complement Q$ и конечное множество $T \subset Q :$ $z \notin (L(T, z))'$. Последовательно удалив, если это необходимо, из T несколько точек, получим множество $T_1 = \{t_j\}_{j=1}^n (\subset T)$, обладающее свойством $z \notin (L(T_1, z))'$, но $z \in (L(T_1 \setminus \{t_j\}, z))'$, $j = 1, \ldots, n$. Заметим, что $n \geqslant 2$. Положим $r_j = r(t_j, z)$, $U_j = U_{r_j}(t_j)$, $j = 1, \ldots, n$. Рассмотрим два логически возможных случая: 1) $\exists j, m \in \{1, \ldots, n\} : U_j \bigcap U_m = \varnothing$; 2) $\forall j, m \in \{1, \ldots, n\} :$ $U_j \bigcap U_m \neq \varnothing$. 1) Пусть, например, $U_1 \bigcap U_2 = \varnothing$. Существуют $K_1, K_2 \in \varphi(z', z) : K_j \bigcap U_m = \varnothing \Leftrightarrow$ $j \neq m$, $m = 1, \ldots, n$; $j = 1, 2$. Обозначим через U компоненту $\complement(K_1 \bigcup K_2)$, содержащую Q. Тогда $K_3 = \complement U \in \varphi(z', z)$ ([10], с. 149). Так как $t_m \in U$, $U_m(\subset \complement(K_1 \bigcup K_2))$ — связное множество, то $U_m \subset U$, $m = 3, \ldots, n$. Пусть $S_j = K_3 \setminus U_j$ — компакт, следовательно, множество S_j' совпадает с одной из компонент S_j и является континуумом, $j = 1, 2$ ([10], с. 177). Заметим, что $K_j \subset S_{3-j} \Rightarrow$ $K_j \subset S_{3-j}'$, $j = 1, 2$. Имеем $z', z \in S = S_1' \bigcap S_2' \subset K_3 \setminus (U_1 \bigcup U_2) \subset L(T_1, z)$. Так как $z \notin (L(T_1, z))'$, то $z \notin S' \Rightarrow$ множество S не связно. Но тогда $\complement(S_1 \bigcup S_2) = U$ не является полуконтинуумом ([10], с. 500, следствие теоремы 6), что противоречит линейной связности области U. 2) Считаем, что $r_1 \geqslant r_m$, $m = 2, \ldots, n$. Пусть $K \in \varphi(z', z)$, $\rho(t_1, K) > 3r_1$. Если $1 \leqslant m \leqslant n$, $\zeta \in U_m$, $t \in U_1 \bigcap U_m$, то $\rho(t_1, \zeta) \leqslant \rho(t_1, t) + \rho(t, t_m) + \rho(t_m, \zeta) < r_1 + 2r_m < \rho(t_1, K)$. Следовательно, $z \in (L(T_1, z))'$, пришли к противоречию. Итак, если множество T конечно, то $z \in (L(T, z))'$ $\forall z \in \complement Q$. Поскольку множество Q связно и содержит более одной точки, то оно бесконечно.

Пусть счетное множество $W = \{w_j\}_{j=1}^{\infty}$ таково, что $W \subset Q \subset \mathrm{Cl}\, W$. Положим $W_n = \{w_j\}_{j=1}^{n}$, $L_n(z) = (L(W_n, z))'$. Пусть $L_n(z)$ — связное множество, $z', z \in L_n(z)$, $n = 1, 2, \ldots$; $z \in \complement Q$. Очевидно, $(z', z \in) \operatorname*{Li}_{n\to\infty} L_n(z) \neq \varnothing \Rightarrow L(z) = \operatorname*{Ls}_{n\to\infty} L_n(z)$ — континуум ([10], с. 180, теорема 6), $z', z \in L(z)$ $\forall z \in \complement Q$. Пусть $t \in \complement L(Q, z)$. Тогда $\exists w \in Q : t \in U_{r(w,z)}(w)$. Ввиду положительности и непрерывности по w на Q функции $r(w, z)$ $t \in U_{r(w_n,z)}(w_n)$ при достаточно малом $\rho(w, w_n)$. Поэтому $L(z) \subset L(Q, z) \subset \complement Q$. Из квазиконтинуальности множества $\complement Q$ следует, что оно не имеет изолированных точек. Покажем, что утверждение упомянутой теоремы 6 из [10] остается в силе и для

$$\operatorname*{Ls}_{\substack{w\to z\\ w\in\complement Q}} L(w) = K(z).$$

Прежде всего заметим, что $K(z) = \bigcup \operatorname*{Ls}_{n\to\infty} L(w_n)$, где объединение берется по всем последовательностям $(w_n)_{n=1}^{\infty} : w_n \in \complement Q \setminus \{z\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = z$. Следовательно, множество $K(z)$ связно как объединение связных множеств, имеющих непустое пересечение: $z' \in \bigcap \operatorname*{Ls}_{n\to\infty} L(w_n)$ ([10], с. 141).

Докажем компактность $K(z)$. Пусть $z_n \in K(z)$, $n = 1, 2, \ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$. В $\complement Q \setminus \{z_0\}$ найдется последовательность $(w_n)_{n=1}^{\infty}$:

$$\lim_{n\to\infty} \rho(w_n, z_0) = \lim_{n\to\infty} \rho(z_n, L(w_n)) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \rho(z_0, L(w_n)) = 0,$$

т. е. $z_0 \in K(z)$. Итак, $K(z)$ — континуум, $z', z \in K(z)$, $z \in \complement Q$. Покажем, что $K(z) \subset \complement Q$ $\forall z \in \complement Q$. Допустим, что это не так. Тогда найдутся простой компакт $Z = \{z_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \complement Q$ и точка $w_0 \in Q$ такие, что $z_0 = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$, $w_0 \in \operatorname*{Li}_{n\to\infty} L(z_n)$. Поскольку $r(w, Z) \leqslant r(w, z_n)$ $\forall w \in Q$, то $(L(z_n) \subset)$ $L(Q, z_n) \subset L(Q, Z)$, $n = 0, 1, \ldots$ В силу компактности $L(Q, Z)$ $w_0 \in L(Q, Z) \subset \complement Q$, пришли к противоречию. Итак, $K(z) \in \varphi(z', z)$ $\forall z \in \complement Q$. Покажем, что $\operatorname*{Ls}_{\substack{w\to z\\ w\in\complement Q}} K(w) \subset K(z)$ $\forall z \in \complement Q$. Пусть $\zeta \in \operatorname*{Ls}_{\substack{w\to z\\ w\in\complement Q}} K(w)$. В $\complement Q$ найдутся последовательности $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(\zeta_n)_{n=1}^{\infty}$ такие, что $z_n \neq z$, $\zeta_n \in K(z_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$, $\lim\limits_{n\to\infty} \zeta_n = \zeta$. Но тогда в $\complement Q$ существует последовательность $(t_n)_{n=1}^{\infty} : t_n \neq z$, $n = 1, 2, \ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(t_n, z_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \rho(\zeta_n, L(t_n)) = 0$. Имеем $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(t_n, z) = \lim\limits_{n\to\infty} \rho(\zeta, L(t_n)) = 0$, т. е. $\zeta \in K(z)$. В силу теоремы 1 из ([10], с. 69) отображение $K : \complement Q \to 2^{\overline{\mathbb{C}}}$ полунепрерывно сверху.

(6) $\Rightarrow$ (4). Согласно теореме 1 ([10], с. 69) $\forall z \in \complement Q$

$$\operatorname*{Ls}_{\substack{w\to z\\ w\in\complement Q}} K(w) \subset K(z) \subset \complement Q.$$

(4) $\Rightarrow$ (3). Рассмотрим произвольный компакт $S \subset \complement Q$. Множество $T = \bigcup_{z\in S} K(z)$ связно, поскольку $(z' \in) \bigcap_{z\in S} K(z) \neq \varnothing$ ([10], с. 141) $\Rightarrow X = \mathrm{Cl}\, T$ — связное множество ([10], с. 141). Покажем, что $X \subset \complement Q$. Пусть $\zeta_n \in T$, $n = 1, 2, \ldots$, $\zeta = \lim\limits_{n\to\infty} \zeta_n$; $\forall n \geqslant 1$ $\exists z_n \in S : \zeta_n \in K(z_n)$. Выделив из $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ сходящуюся подпоследовательность $(z_{n_j})_{j=1}^{\infty}$, будем иметь $z = \lim\limits_{j\to\infty} z_{n_j} \in S \Rightarrow$ $\zeta \in \operatorname*{Ls}_{j\to\infty} K(z_{n_j}) \subset \complement Q$. Итак, X — континуум: $S \subset X \subset \complement Q$; $\complement Q$ — почти континуум.

(5) $\Rightarrow$ (6). Если $(K_n)_{n=0}^{\infty}$ — последовательность континуумов, $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(K_n, K_0) = 0$, то $\operatorname*{Ls}_{n\to\infty} K_n \subset K_0$ ([9], с. 350–351, п. 2° доказательства теоремы 2). Пусть $z \in \complement Q$, $\zeta \in \operatorname*{Ls}_{\substack{w\to z\\ w\in\complement Q}} K(w)$. Тогда в $\complement Q$ имеется последовательность $(z_n)_{n=1}^{\infty} : z_n \neq z$, $n = 1, 2, \ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$, $\zeta \in \operatorname*{Ls}_{n\to\infty} K(z_n) \subset K(z)$. Итак,

$$\operatorname*{Ls}_{\substack{w\to z\\ w\in\complement Q}} K(w) \subset K(z) \Rightarrow$$

$K(z)$ — полунепрерывное сверху отображение из $\complement Q$ в $2^{\overline{\mathbb{C}}}$.

(6) $\Rightarrow$ (5). Предположим, что существует сходящаяся последовательность $(z_n)_{n=1}^{\infty}$: $z = \lim_{n\to\infty} z_n \in \complement Q$, $z_n \in \complement Q \setminus \{z\}$, $n = 1, 2, \ldots,$

$$\lim_{n\to\infty} \mu(K(z_n), K(z)) = \varepsilon > 0.$$

Пусть $\zeta_n \in K(z_n)$, $n = 1, 2, \ldots,$ $\lim_{n\to\infty} \rho(\zeta_n, K(z)) = \varepsilon$. Выделив из $(\zeta_n)_{n=1}^{\infty}$ сходящуюся подпоследовательность $(\zeta_{n_j})_{j=1}^{\infty}$, получим $\rho(\zeta, K(z)) = \varepsilon$, где $\zeta = \lim_{j\to\infty} \zeta_{n_j}$. Таким образом,

$$\zeta \in \operatorname*{Ls}_{\substack{w\to z\\ w\in\complement Q}} K(w),$$

но $\zeta \notin K(z)$, что противоречит полунепрерывности сверху $K(z)$. $\square$

Из теоремы 1 следует, что необходимым условием базисной односвязности множества Q является полуконтинуальность его дополнения. Будем считать, что Q — связное множество, $\complement Q$ — полуконтинуум. Для любых $w \in Q$, $z_1, z_2 \in \complement Q$ положим $R(w, z_1, z_2) = \sup\{\rho(w, S)\colon S \in \varphi(z_1, z_2)\}(> 0)$. При сделанном предположении справедлива

Теорема 2. *Следующие утверждения равносильны*:

(1) Q — *базисно односвязное множество;*

(2) $\forall z \in \complement Q$, $\forall w \in Q$

$$\liminf_{\substack{\zeta\to z\\ \zeta\in\complement Q}} R(w, \zeta, z) > 0; \tag{$*$}$$

(3) $\forall z \in \complement Q \bigcap \operatorname{Fr} Q$, $\forall w \in Q \bigcap \operatorname{Fr} Q$ *справедливо неравенство* $(*)$.

Доказательство. Импликация (2) $\Rightarrow$ (3) очевидна.

(1) $\Rightarrow$ (2). В силу теоремы 1 $\complement Q$ — квазиконтинуум. Предположим, что $\exists z_0 \in \complement Q$, $\exists w \in Q$:

$$\liminf_{\substack{\zeta\to z_0\\ \zeta\in\complement Q}} R(w, \zeta, z_0) = 0 \Rightarrow$$

$\exists (z_n)_{n=1}^{\infty}$: $z_n \in \complement Q \setminus \{z_0\}$, $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$, $\lim_{n\to\infty} R(w, z_n, z_0) = 0$. Пусть K — континуум, $z_n \in K \subset \complement Q$, $n = 0, 1, \ldots$ Тогда $R(w, z_n, z_0) \geqslant \rho(w, K) > 0$, $n = 1, 2, \ldots,$ пришли к противоречию.

(3) $\Rightarrow$ (1). Допустим, что множество Q не обладает свойством базисной односвязности. Тогда $\complement Q$ не является квазиконтинуумом, т. е. существует простой компакт $K = \{z_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \complement Q$, $z_0 = \lim_{n\to\infty} z_n$ такой, что не существует континуума S, содержащего K и содержащегося в $\complement Q$. Заметим, что $z_0 \in \operatorname{Fr} Q$. (Предположив противное, имели бы: $\exists \varepsilon > 0$: $S_0 = \operatorname{Cl} U_\varepsilon(z_0) \subset \complement Q$, $\exists n_0 \geqslant 1$: $z_n \in S_0$ $\forall n > n_0$. Теперь если $S_n \in \varphi(z_0, z_n)$, $n = 1, \ldots, n_0$, то $S = \bigcup_{n=0}^{n_0} S_n$ — континуум: $K \subset S \subset \complement Q$, а это противоречит выбору K.) Положим $z' = z_0$ и $\forall z \in \complement Q$ определим континуум $L(z) \in \varphi(z', z)$ так же, как и при доказательстве импликации (2) $\Rightarrow$ (6) теоремы 1. Тогда $\operatorname{Cl} \bigcup_{n=0}^{\infty} L(z_n)$ — континуум $\Rightarrow \exists w \in Q$: $\liminf_{n\to\infty} \rho(w, L(z_n)) = 0 \Rightarrow \liminf_{n\to\infty} \rho(w, L(Q, z_n)) = 0$ в силу того, что $L(z_n) \subset L(Q, z_n)$, $n = 1, 2, \ldots$ Отсюда следует, что, во-первых, $w \in \operatorname{Fr} Q$, и во-вторых, $\liminf_{n\to\infty} r(w, z_n) = \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{4} R(w, z_n, z_0) = 0$, пришли к противоречию с (3). $\square$

3. *Примеры базисно односвязных множеств в* $\overline{\mathbb{C}}$. Как было отмечено выше, базисно односвязное множество имеет полуконтинуальное дополнение и, следовательно, односвязно. Пусть $\mathcal{A}$ — непустое семейство связных множеств из $\overline{\mathbb{C}}$. Будем говорить, что $\mathcal{A}$ обладает свойством (о), если базисная односвязность множества $Q \in \mathcal{A}$ равносильна его односвязности. Этим свойством обладает, например, совокупность всех областей.

Теорема 3. *Совокупность всех континуумов из* $\overline{\mathbb{C}}$ *обладает свойством* (о).

Доказательство. Пусть Q — односвязный континуум. Тогда $\complement Q$ — область и, тем более, полуконтинуум. Предположим, что Q не обладает свойством базисной односвязности. Как видно из доказательства импликации (3) $\Rightarrow$ (1) теоремы 2, $\complement Q \bigcap \operatorname{Fr} Q \neq \varnothing$, что противоречит открытости множества $\complement Q$. $\square$

Приведенный выше пример полуконтинуума, не являющегося квазиконтинуумом, доказывает, что полуконтинуальность множеств Q и $\complement Q$ недостаточна для квазиконтинуальности $\complement Q$ и, следовательно, базисной односвязности Q. Таким образом, множество всех полуконтинуумов не обладает свойством (о). Этот же пример иллюстрирует отмеченный во введении факт, что не всякое односвязное множество является базисно односвязным.

Теорема 4. *Пусть Q — звездное множество в $\mathbb{C}$. Тогда множества Q и $\complement Q$ базисно односвязны.*

Доказательство. Пусть $z' \in Q : K(z) = \{t(z - z') + z' \colon 0 \leqslant t \leqslant 1\} \subset Q \ \forall z \in Q$. Для любого $w \in \complement Q$ положим $K(w) = \{t(w - z') + z' : 1 \leqslant t \leqslant +\infty\}$. Отобразим $\overline{\mathbb{C}}$ на сферу с помощью стереографической проекции, считая, что z' — точка касания сферы с комплексной плоскостью. Образы множеств Q и $\complement Q$ на сфере “сферически звездны” (первый относительно z', а второй относительно точки w', диаметрально противоположной z' на сфере). Теперь очевидно, $K(w) \subset \complement Q$, причем

$$\lim_{\substack{\zeta \to w \\ \zeta \in \complement Q}} \mu(K(\zeta), K(w)) = \lim_{\substack{\zeta \to z \\ \zeta \in Q}} \mu(K(\zeta), K(z)) = 0$$

$\forall z \in Q$, $\forall w \in \complement Q$. В силу теоремы 1 Q и $\complement Q$ — базисно односвязные множества. $\square$

Следствие. Выпуклые множества, а также их дополнения базисно односвязны.

Теорема 5. *Пусть G — односвязная область, ограниченная замкнутой жордановой кривой, $G \subset Q \subset \operatorname{Cl} G$. Множества Q и $\complement Q$ базисно односвязны.*

Доказательство. Пусть $\tau(z)$ — конформное отображение G на $\{|\zeta| < 1\}$ — устанавливает гомеоморфное соответствие между $\operatorname{Cl} G$ и $\{|\zeta| \leqslant 1\}$ ([11], с. 409). Положим $z' = \tau^{-1}(0)$, $K(z) = \tau^{-1}(\{t\tau(z) : 0 \leqslant t \leqslant 1\})$, $z \in Q$. $K(z)$ — континуум, $z', z \in K(z) \subset Q$, причем

$$\lim_{\substack{w \to z \\ w \in Q}} \mu(K(w), K(z)) = 0 \ \ \forall z \in Q,$$

в силу равномерной непрерывности τ^{-1} на $\{|\zeta| \leqslant 1\}$. Согласно теореме 1 множество $\complement Q$ базисно односвязно. Аналогично доказывается базисная односвязность Q. $\square$

4. *Приложения к вопросу разрешимости уравнения свертки.* Напомним некоторые определения из [6], [7]. Символами Λ' и $\widetilde{\mathrm{R}}$ обозначаем соответственно множество всех предельных точек последовательности аргументов нулей характеристической функции $a(z)$ оператора свертки L_a и совокупность ее направлений не вполне регулярного роста. Положим $\Lambda^* = -\Lambda'$. Далее, $q[Q]$ — объединение всех направлений выпуклости связного множества $Q \subset \mathbb{C}$, т. е. таких $\varphi \in \mathbb{R}$, что пересечение $Q_0^+(r, \varphi) := Q \cap \{\operatorname{Re}(z \exp(-i\varphi)) \geqslant r\}$ связно для любого $r \in \mathbb{R}$. Если $g(-\vartheta)$ — опорная функция множества Q, то $\alpha[Q]$ — совокупность направлений, по которым $g(\vartheta)$ не ограничена, $\delta[Q] := \operatorname{int}\{\vartheta : g''(\vartheta) + g(\vartheta) = 0\}$ — объединение всех интервалов тригонометричности функции $g(\vartheta)$ ($\operatorname{int} X$ — внутренность множества $X \subset \mathbb{R}$ относительно $\mathbb{R}$). Для любых $z \in \mathbb{C}$, $\varphi \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ положим

$$H_z^+(\varphi) = \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}[(w - z)\exp(-i\varphi)] = 0, \ \operatorname{Im}[(w - z)\exp(-i\varphi)] > 0\},$$
$$U_{z,\varphi}(\varepsilon) = \{w \in U_\varepsilon(z) : \operatorname{Re}[(z - w)\exp(-i\varphi)] > 0\}.$$

Направление $\varphi \in \mathbb{R}$ называем направлением правосторонней квазиневыпуклости (НПК) множества Q, если $\exists \xi \in Q \cap \operatorname{Fr} Q$: либо $\exists w \in (\operatorname{Fr} Q \setminus Q) \cap H_\xi^+(\varphi)$: $[\xi, w] \subset \operatorname{Fr} Q$ и $\forall v \in [\xi, w)$ $\exists \varepsilon > 0 : U_{v,\varphi}(\varepsilon) \cap Q = \varnothing$, либо $H_\xi^+(\varphi) \subset Q \cap \operatorname{Fr} Q$ и $\forall v \in H_\xi^+(\varphi) \cup \{\xi\}$ $\exists \varepsilon > 0 : U_{v,\varphi}(\varepsilon) \cap Q = \varnothing$.

Заменяя здесь $H^+_\xi(\varphi)$ на $H^-_\xi(\varphi) := H^+_\xi(\varphi+\pi)$, получаем определение направления левосторонней квазиневыпуклости (НЛК) множества Q. Примеры НПК и НЛК конкретных множеств в комплексной плоскости имеются в [6], [7]. Символами $q_-[Q]$, $q_+[Q]$ обозначаем совокупности всех НЛК и соответственно НПК множества Q и для любого $\gamma \in (0, \pi/2)$ полагаем

$$Q^-_\gamma(\varphi) = \begin{cases} (\varphi-\gamma, \varphi), & \text{если } \varphi \in q_-[Q]; \\ \varnothing & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$Q^+_\gamma(\varphi) = \begin{cases} (\varphi, \varphi+\gamma), & \text{если } \varphi \in q_+[Q]; \\ \varnothing & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если Γ — совокупность всех 2π-периодических функций, действующих из $\mathbb{R}$ в $(0, \pi/2)$, то $\forall\gamma \in \Gamma$ $Q_\gamma := \cup_{\varphi\in\mathbb{R}}(Q^-_{\gamma(\varphi)}(\varphi) \cup Q^+_{\gamma(\varphi)}(\varphi))$, $Q^1_\gamma := \cup_{\varphi\in\ R}(\mathrm{Cl}\, Q^-_{\gamma(\varphi)}(\varphi) \cup \mathrm{Cl}\, Q^+_{\gamma\ (\varphi)}(\varphi))$.

Будем говорить, что базисно односвязное множество Q обладает свойством $(P^\star)$, если для любой односвязной области $G_1(\supset Q)$, $\forall\gamma \in \Gamma$ найдется односвязная область $G(\supset Q)$: 1) $G \subset G_1$, 2) $q[Q] \setminus Q_\gamma \subset q[G]$.

Доказанные в п. 2 критерии базисной односвязности позволяют переформулировать критерии эпиморфности оператора свертки, полученные в [7].

Теорема 6. *Пусть $a(z)$ — целая функция экспоненциального типа (ц. ф. э. т) вполне регулярного роста, полуконтинуум Q удовлетворяет одному из условий* (1)–(6) *теоремы* 1 *и обладает свойством $(P^\star)$. Оператор свертки L_a является эпиморфизмом $H(Q+B)$ на $H(Q)$ тогда и только тогда, когда $\Lambda^* \subset q[Q]$ и $\exists\gamma \in \Gamma : Q_\gamma \cap \Lambda^* = \varnothing$.*

Теорема 7. *Пусть $a(z)$ — ц. ф. э. т., отличный от прямолинейного отрезка и точки полуконтинуум Q удовлетворяет одному из условий* (1)–(6) *теоремы* 1 *и обладает свойством $(P^\star)$. Пусть, далее, выполнено соотношение $\overline{\mathrm{R}} \subset (-q[Q]) \cap (\delta[Q] \cup \alpha[Q])$ и найдется такая функция $\gamma \in \Gamma$, что $a(z)$ имеет вполне регулярный рост на лучах $z = r\exp(i\varphi)$, $r > 0$, $\varphi \in -Q^1_\gamma$. Оператор свертки L_a является эпиморфизмом $H(Q+B)$ на $H(Q)$ тогда и только тогда, когда $\Lambda^* \subset q[Q]$ и $\exists\beta \in \Gamma : Q_\beta \cap \Lambda^* = \varnothing$.*

Действительно, если выполнено одно из условий (1)-(6) теоремы 1, то Q базисно односвязно, а $\complement Q$ — квазиконтинуум, и, тем более, полуконтинуум. Тогда выполнены все условия теорем 5, 9 из [7].

Теорема 8. *Пусть $a(z)$ — ц. ф. э. т. вполне регулярного роста, полуконтинуум Q, имеющий полуконтинуальное дополнение до $\overline{\mathbb{C}}$, удовлетворяет одному из условий* (1)–(3) *теоремы* 2 *и обладает свойством $(P^\star)$. Оператор свертки L_a является эпиморфизмом $H(Q+B)$ на $H(Q)$ тогда и только тогда, когда $\Lambda^* \subset q[Q]$ и $\exists\gamma \in \Gamma : Q_\gamma \cap \Lambda^* = \varnothing$.*

Теорема 9. *Пусть $a(z)$ — ц. ф. э. т., отличный от прямолинейного отрезка и точки полуконтинуум Q, имеющий полуконтинуальное дополнение до $\overline{\mathbb{C}}$, удовлетворяет одному из условий* (1)–(3) *теоремы* 2 *и обладает свойством $(P^\star)$. Пусть, далее, выполнено соотношение $\widetilde{\mathrm{R}} \subset (-q[Q]) \cap (\delta[Q] \cup \alpha[Q])$ и найдется такая функция $\gamma \in \Gamma$, что $a(z)$ имеет вполне регулярный рост на лучах $z = r\exp(i\varphi)$, $r > 0$, $\varphi \in -Q^1_\gamma$. Оператор свертки L_a является эпиморфизмом $H(Q+B)$ на $H(Q)$ тогда и только тогда, когда $\Lambda^* \subset q[Q]$ и $\exists\beta \in \Gamma : Q_\beta \cap \Lambda^* = \varnothing$.*

Справедливость теорем 8, 9 непосредственно вытекает из теорем 5, 9, доказанных в [7], и теоремы 2.

Литература

1. Martineau E. *Sur la topologie des espaces de fonctions holomorphes* // Math. Ann. – 1966. – V. 163. – № 1. – P. 62–88.
2. Коробейник Ю.Ф. *Об эпиморфизме оператора свертки в некоторых пространствах аналитических функций* // Докл. РАН. – 1994. – Т. 335. – № 6. – С. 691–693.

3. Коробейник Ю.Ф. *О разрешимости уравнения свертки в некоторых классах аналитических функций* // Матем. заметки. – 1991. – Т. 49. – № 2. – С. 74–83.
4. Напалков В.В., Рудаков И.А. *Оператор свертки в пространствах вещественно-аналитических функций* // Матем. заметки. – 1991. – Т. 49. – № 3. – С. 57–65.
5. Мальцев И.М. *Эпиморфность оператора свертки в пространствах функций, аналитических на связных множествах* // Докл. РАН. – 1994. – Т. 336. – № 3. – С. 297–300.
6. Мальцев И.М. *Об условиях эпиморфности оператора свертки в комплексной области.* I. *Необходимые условия эпиморфности* // Изв. вузов. Математика. – 1994. – № 7. – С. 49–58.
7. Мальцев И.М. *Об условиях эпиморфности оператора свертки в комплексной области.* II. *Достаточные условия и критерии эпиморфности* // Изв. вузов. Математика. – 1994. – № 11. – С. 43–52.
8. Коробейник Ю.Ф. *Счетная определимость семейства областей, содержащих связное множество. Приложения к пространствам аналитических ростков* // Докл. РАН. – 1997. – Т. 354. – № 3. – С. 304–306.
9. Куратовский К. *Топология.* – М.: Мир, 1966. – Т. 1. – 594 с.
10. Куратовский К. *Топология.* – М.: Мир, 1969. – Т.2. – 624 с.
11. Маркушевич А.И. *Теория аналитических функций.* – М.: Гостехиздат, 1950. – 703 с.

Донская государственная
академия сервиса

Поступила
05.07.1996