И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

1997 МАТЕМАТИКА № 8 (423)

УДК 517.988

Н.М. РАТИНЕР

СВОЙСТВА КЛАССОВ БОРДИЗМОВ ОСНАЩЕННЫХ ПОДМНОГООБРАЗИЙ ФРЕДГОЛЬМОВОЙ СТРУКТУРЫ

Оснащенные подмногообразия фредгольмовой структуры на банаховом многообразии X и группы их бордизмов появились в работе Элворти и Тромба [1] при определении степени фредгольмовых отображений положительного индекса, а затем были использованы в работах В.Г. Звягина и автора [2], [3] для обобщения степени на более широкие классы отображений и приложений теории степени к исследованию задач разрешимости и бифуркации решений нелинейных дифференциальных уравнений.

Данная статья посвящена изучению свойств классов бордизмов оснащенных подмногообразий фредгольмовой структуры X_Φ на банаховом многообразии. Проблемы, исследуемые в настоящей работе, возникли при использовании теории степени фредгольмовых отображений положительного индекса в [2], [3] и нашли частичное решение в [3].

1. Введем некоторые обозначения и определения. Пусть E — вещественное банахово пространство, $GL_c(E)$ — множество линейных обратимых операторов вида $I+K$, где I — тождественный, а K — вполне непрерывный операторы.

Пусть X — банахово многообразие. Фредгольмовой структурой X_Φ называется максимальный атлас $X_\Phi=\{(U_i,\varphi_i)\}_i$ со свойством: для любых двух карт (U_i,φ_i) и (U_j,φ_j), $U_i\cap U_j\neq\emptyset$ и $x\in U_i\cap U_j$, $d(\varphi_j\cdot\varphi_i)\varphi_i(x)\in GL_c(E)$.

Пусть $\eta: E\to M$ — векторное расслоение со слоем E над многообразием M (банаховым или конечномерным). Расслоение π называется GL_c-расслоением, если его структурная группа редуцирована к $GL_c(E)$, т.е. для тривиализующих отображений $\{\tau_i:\pi^{-1}(U_i)\to U_i\times E\}_i$ отображения перехода $\tau_i\cdot\tau_j^{-1}: U_i\times E\to U_j\times E$ имеют вид

$$(x,v)\to(x,v+a(x)v), \tag{1}$$

где $a(x)$ — вполне непрерывный линейный оператор при каждом x. Если в формуле (1) $a(x)$ — локально конечномерный оператор, то расслоение π называется l-расслоением.

Изоморфизм $\xi:\pi_1\to\pi_2$ GL_c-расслоений называется GL_c-изоморфизмом, если в локальной записи он имеет вид $(x,v)\to(x,v+b(x)v)$, где $b(x)$ — вполне непрерывный линейный оператор при каждом x; ξ называется l-изоморфизмом, если $b(x)$ локально конечномерный.

Будем считать в дальнейшем, что модельное пространство фредгольмовой структуры X_Φ есть $E\times R^q$.

Пара (M^q,i), где M^q — замкнутое q-мерное гладкое многообразие, а $i: M^q\to X$ — непрерывное отображение, будет называться сингулярным подмногообразием в X. GL_c-оснащением пары (M,i) в X_Φ будет называться GL_c-изоморфизм векторных расслоений над M : τ : $TM\oplus(M\times E)\to i^*(TX_\Phi)$, где TM — касательное расслоение к M, $i^*(TX_\Phi)$ — обратный образ касательного расслоения к структуре X_Φ. Обозначим через $S_q(X_\Phi)$ множество троек (M,i,τ), где (M,i) — q-мерное сингулярное многообразие в X, а τ — его оснащение. Введем в $S_q(X_\Phi)$ следующее отношение эквивалентности, называемое отношением GL_c-оснащенной бордантности.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 94-01-00183.

Определение. Тройки (M_0, i_0, τ_0) и (M_1, i_1, τ_1) называются GL_c-оснащенно бордантными, если существует тройка (Y, i, τ), где Y — $(q+1)$-мерное компактное многообразие с краем $\partial Y = M_0 \cup M_1$ (Y — "пленка", соединяющая M_0 и M_1), $i : Y \to X \times [0,1]$ — непрерывное отображение такое, что $i|_{M_r} = i_r$ $(r = 0,1)$, и τ — GL_c-изоморфизм расслоений: $\tau : TY \oplus (Y \times E) \to i^*T(X_\Phi \times [0,1])$, совпадающий с τ_r на $TM_r \oplus (M_r \times E)$, $r = 0,1$.

Фактор-множество $S_q(X_\Phi)$ по отношению GL_c-оснащенной бордантности обозначается $F_q(X_\Phi)$ и называется группой GL_c-оснащенных бордизмов. Класс эквивалентности тройки (M, i, τ) в $F_q(x_\Phi)$ обозначается через $[M, i, \tau]$.

Напомним, что нормальным расслоением иммерсии $i : M \to \tau$ называется фактор-расслоение $i^*(TX_\Phi)/TM = \nu_X M$. Предположим, что расслоение $\nu_X M$ тривиализуемо, т.е. имеется GL_c-изоморфизм $\xi : M \times E \to \nu_X M$. Тогда пара (M, i) имеет GL_c-оснащение вида

$$\tau = I_{TM} \oplus \xi : TM \oplus (M \times E) \to TM \oplus \nu_X M \approx i^*(TX_\Phi), \tag{2}$$

которое будем называть правильным оснащением.

Оснащения вида (2) представляют собой обобщение конструкции Л.С. Понтрягина [4], который оснащением подмногообразия M^q в конечномерном евклидовом пространстве R^{n+q} называл базис в нормальном пространстве к M^q, непрерывно зависящий от точки $x \in M^q$.

2. Сформулируем основные теоремы.

Теорема 1. (а) *Если банахово многообразие X q-связно, то для любого элемента α группы $F_q(x_\Phi)$ найдется его представитель (M, i, τ) такой, что $i : M \to U \subset X$ — вложение, где (U, φ) — некоторая карта структуры X_Φ, причем образ $\varphi \cdot i(M)$ конечномерен;*

(б) *если банахово многообразие X $(q+1)$-связно, (M_0, i_0, τ_0), (M_1, i_1, τ_1) — две GL_c-оснащенно бордантные тройки такие, как в* (а)*, то пленка (Y, i, τ), соединяющая их, может быть выбрана так, что $i : Y \to U \times [0,1] \subset X \times [0,1]$ — вложение, а образ $(\varphi \times I) \cdot i(Y)$ конечномерен.*

Говорят, что банахово пространство E обладает свойством конечномерной аппроксимации, если для каждого банахова пространства F множество линейных непрерывных конечномерных операторов из E в F плотно в множестве линейных вполне непрерывных операторов. В частности, пространство с базисом Шаудера обладает свойством конечномерной аппроксимации ([5]).

Следующая теорема показывает, что каждое GL_c-оснащение можно заменить на надстройку над конечномерным оснащением, не выходя из класса GL_c-оснащенных бордизмов.

Теорема 2. *Пусть $X \subset E \times R^q$ — область в банаховом пространстве, обладающем свойством конечномерной аппроксимации. Тогда для каждого α из $F_q(X_\Phi)$ найдется тройка $(M, i, \tau) \in \alpha$, где оснащение τ имеет вид*

$$TM \oplus (M \times E) = TM \oplus (M \times E^n) \oplus (M \times E^{\infty-n}) \xrightarrow{\tau_n \oplus I_{M \times E^{\infty-m}}} (i(M) \times E^n \times R^q) \oplus (i(M) \times E^{\infty-n}), \tag{3}$$

E^n и $E^{\infty-n}$ — два дополнительных замкнутых подпространства в E, $\dim E^n < \infty$, а $\tau_n : TM \oplus (M \times E^n) \to (i(M) \times E^n \times R^q)$ — конечномерное оснащение. Пленку (Y, i, τ), соединяющую две тройки с оснащениями вида (3)*, можно выбрать так, чтобы GL_c-оснащение τ имело вид*

$$\tau : TY \oplus (Y \times E) = TY \oplus (Y \times E^m) \oplus (Y \times E^{\infty-m}) \xrightarrow{\tau_m \oplus I_{Y \times E^{\infty-n}}} i(Y) \times E^m \times R^q \times E^{\infty-m},$$

где E^m, $E^{\infty-m}$ — два дополнительных замкнутых подпространства в E, $\dim E^m < \infty$, $E^n \subset E^m$, а τ_m — конечномерное оснащение.

Теорема 3. (а) *Если банахово многообразие X q-связно, а его модельное пространство обладает свойством конечномерной аппроксимации, то для любого класса α из $F_q(X_\Phi)$ найдется такой его представитель (M, i, τ), что i — вложение, а τ — правильное оснащение.*

(б) *если Z — $(q+1)$-связное банахово многообразие, модельное пространство которого обладает свойством конечномерной аппроксимации, а тройки (M_0, i_0, τ_0) и (M_1, i_1, τ_1) такие, как в* (a), *то пленка* (Y, i, τ), *соединяющая эти две тройки, может быть выбрана так, что* i *— вложение, а* τ *— правильное оснащение.*

3. Изложим кратко схемы доказательства теорем. Для доказательства теоремы 1 понадобятся две леммы.

Лемма 1. *Если* (M, i) *— сингулярное подмногообразие в* X_Φ *с* GL_c*-оснащением, и отображение* $i_1 : M \to X$ *непрерывно гомотопно* i, *то для пары* (M, i_1) *существует* GL_c*-оснащение* τ_1 *и тройки* (M, i, τ) *и* (M_1, i_1, τ_1) GL_c*-оснащенно бордантны.*

Доказательство леммы 1. Для гомотопных отображений i и i_1, индуцированные расслоения $i^*(TX_\Phi)$ и $i_1^*(TX_\Phi)$ GL_c-изоморфны, что дает оснащение для (M, i_1). Для построения пленки, соединяющей (M, i) и (M, i_1) используется теорема о накрывающей гомотопии для расслоений со структурной группой $GL_c(E)$ (см. [6], с. 79). $\square$

Лемма 2. *Если* X *есть* q*-связное банахово многообразие, а* M *есть* q*-мерное компактное многообразие, то любое непрерывное отображение* $i : M \to X$ *гомотопно постоянному.*

Для доказательства леммы 2 многообразие M рассматривается как CW-комплекс. Гомотопия задается последовательно по k-мерным остовам, где $0 \le k \le q$. $\square$

Доказательство теоремы 1. Учитывая леммы 1 и 2, можем считать, что образ $i(M)$ лежит в одной карте (U, φ) структуры X_Φ, где U — стягиваемое подмножество в X. Для простоты, заменяя i на $\varphi \cdot i$, считаем X открытым подмножеством в модельном пространстве $E \times R^q$. Заметим, что $i(M)$ — компактное подмножество в $X \subset E \times R^q$, следовательно, существует конечномерное подпространство $E^m \subset E \times R^q$ и непрерывный проектор $p : E \times R^q \to E^m$ такой, что $\|p \cdot i(x) - i(x)\| < \varepsilon$ для $x \in M$ (см. [7], с. 123). Осталось воспользоваться тем, что множество вложений плотно в $C^1(M, E^m)$ и, следовательно, в любой σ-окрестности отображения $p \cdot i$ найдется вложение $j : M \to E^m$. Если ε и δ достаточно малы, то $j(M) \subset X$. $\square$

Для доказательства теоремы 2 понадобится следующая лемма, доказательство которой использует свойство конечномерной аппроксимации для слоя расслоений.

Лемма 3. *Пусть* h *есть* GL_c*-изоморфизм* l*-расслоений над конечномерным компактным многообразием* Y. *Тогда найдется* l*-изоморфизм* h_1 *такой, что* $h_2 = \mu_1(x)h + \mu_2(x)h_1$ *является* l*-изоморфизмом для любых неотрицательных функций* $\mu_1(x)$ *и* $\mu_2(x)$ *на* Y *с условием* $\mu_1(x) + \mu_2(x) \equiv 1$. *Если* Y *- многообразие с краем и* $h|_{\partial Y}$ *есть* l*-изоморфизм, то* $h_2|_{\partial Y} = h|_{\partial Y}$.

Доказательство леммы 3. В каждом элементе V_i тривиализующего покрытия выбирается точка x_i и вполне непрерывный оператор $a(x_i)$ аппроксимируется конечномерным $a_i(x_i)$. Локальные изоморфизмы расслоений $(x, v) \to (x, v + a_i(x_i)v)$ склеиваются с помощью разбиения единицы на компактном конечномерном многообразии Y. $\square$

Доказательство теоремы 2. Расслоения, в которых действует GL_c-изоморфизм, задающий оснащение, являются l-расслоениями (ввиду того, что X — область в $E \times R^q$). Из леммы 3 вытекает, что найдется покрытие $\{V_j\}$ базы расслоения такое, что оснащение в локальной записи имеет вид $(x, v) \to (x, v + a_j(x)v)$, где $\operatorname{Im} a_j(x) \subset E_j^m \times R^q$, $\dim E_j^m < \infty$. Это покрытие можно считать конечным в силу компактности базы. Тогда $\tau_m = \tau|_{TM \oplus (M \times E^m)}$ — изоморфизм конечномерных векторных расслоений и $\tau = \tau_m \oplus I_{M \times E^{\infty - m}}$, где $E_j^m \subset E^m$ для всех j. $\square$

Доказательство теоремы 3 опирается на следующую лемму о приведении оснащения q-мерного подмногообразия $(n+q)$-мерного евклидова пространства к правильному виду, но в $2(n+q)$-мерном пространстве.

Лемма 4. *Пусть* M *—* q*-мерное подмногообразие в евклидовом пространстве* $E^{n+q} = E^n \times E^q$ *с оснащением* $\tau : TM \oplus (M \times E^n) \to M \times E^{n+q}$. *Тогда оснащение* $\tau \oplus I_{M \times E^{n+q}} : TM \oplus (M \times E^{n+q}) \oplus (M \times E^{n+q}) \to M \times E^{2(n+q)}$ *эквивалентно правильному оснащению* $I \oplus \xi$, *где* $\xi : M \times E^{2(n+q)} \to \nu_{2(n+q)} M$ *— тривиализация нормального расслоения к* M *в* $E^{2(n+q)}$.

Доказательство леммы 4. Заменим сначала оснащение τ эквивалентным ему оснащением, для которого образы $\tau(TM)$ и $\tau(M \times E^n)$ ортогональны. Для изоморфных расслоений TM, $\tau(TM)$ классифицирующие отображения из многообразия M в грассманово многообразие $G_q^{2(n+q)}$ гомотопны ([6], с. 53). Обратный образ канонического расслоения $\gamma_q^{2(n+q)}$ над $G_q^{2(n+q)}$ при этой гомотопии можно считать подрасслоением η в $(M \times [0,1]) \times E^{2(n+q)}$, которое совпадает с TM над $M \times \{0\}$ и с $\tau(TM)$ над $M \times \{1\}$. Его ортогональное дополнение $\eta^{\perp}$ совпадает с $\nu_{2(n+q)}M$ над $M \times \{0\}$ и с $\tau(M \times E^n) \oplus (M \times E^{n+q})$ над $M \times \{1\}$. Для расслоений η и $\eta^{\perp}$ над цилиндром $M \times [0,1]$ имеются изоморфизмы $g : TM \times [0,1] \to \eta$, $f : \{\tau(M \times E^n) \oplus (M \times E^{n+q})\} \times [0,1] \to \eta^{\perp}$ ([6], с. 47). Ограничение f на край $M \times \{0\}$ представляет собой изоморфизм $f_0 : \tau(M \times E) \oplus (M \times E^{n+q}) \to \nu_{2(n+q)}M$. Тогда $\xi = f_0 \cdot (\tau|_{M \times E^n} \oplus I_{M \times E^{n+q}})$, а оснащение пленки $M \times [0,1]$ задается с помощью f и g. $\square$

Теорема 3 теперь вытекает непосредственно из теорем 1 и 2 и леммы 4. $\square$

Литература

1. Elworthy K.D., Tromba A.J. *Differential structures and Fredholm maps on Banach manifolds* // Proc. Symp. Pure Math. – 1970. – V. 15. – P. 45–94.
2. Звягин В.Г., Ратинер Н.М. *Степень вполне непрерывных возмущений фредгольмовых отображений и ее приложение к бифуркации решений* // ДАН УССР. Сер. А. – 1989. – № 6. – С. 8–11.
3. Zvyagin V.G., Ratiner N.M. Oriented degree of Fredholm maps of non-negative index and its application to global bifurcation of solutions // Lect. Notes Math. – 1992. – №1520. – P.111–137.
4. Понтрягин Л.С. *Гладкие многообразия и их применения в теории гомотопий.* – 2-е изд. – М.: Наука, 1976. – 175 с.
5. Lindenstrauss J., Tzafriri L. *Classical Banach spaces.* I. *Sequence spaces* // Ergeb. Math. – 1977. – V. 92. – № XIII. – 190 p.
6. Хьюзмоллер Д. *Расслоенные пространства.* – М.: Мир, 1970. – 442 с.
7. Красносельский М.А. Забрейко П.П. *Геометрические методы нелинейного анализа.* – М.: Наука, 1975. – 511 с.

Воронежский государственный университет

Поступила
30.01.1995