ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2004 МАТЕМАТИКА № 5 (504)

УДК 514.752

В.Т. ЛИСИЦА

МНОГОМЕРНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ С ПЛОСКОЙ НОРМАЛЬНОЙ СВЯЗНОСТЬЮ С ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНОЙ ГРАССМАНОВА ОБРАЗА

Известно, что грассманов образ многомерных подмногообразий $F^n \subset E^{n+p}$ является обобщением сферического образа поверхностей $F^2 \subset E^3$. Объемлющим пространством для грассманова образа подмногообразий $F^n \subset E^{n+p}$ является грассманово многообразие $G(n; n+p)$. Грассманов образ является удобным объектом для изучения внешне геометрических свойств многомерных подмногообразий, т. к. несет достаточно много информации о строении подмногообразий $F^n \subset E^{n+p}$.

Приведем необходимые определения и известные результаты.

Определение 1. Многообразием Грассмана $G(n, n+p)$ называется множество n-мерных плоскостей $(n+p)$-мерного евклидова пространства, проходящих через начало координат $O \in E^{n+p}$.

Определение 2. Пусть F^n — регулярное подмногообразие в E^{n+p}. В каждой точке $x \in F^n$ построим касательную плоскость к F^n. Если перенести все эти плоскости параллельно в начало координат $O \in E^{n+p}$, то они образуют некоторое подмножество $\Gamma(F^n) \subset G(n; n+p)$, которое называется грассмановым образом подмногообразия $F^n \subset E^{n+p}$. Отображение $\Gamma : F^n \longrightarrow G(n; n+p)$, построенное таким образом, называется грассмановым отображением.

На многообразии $G(n; n+p)$ можно ввести метрику так, что оно становится симметрическим пространством [1], [2]. Кроме того, в [3] доказано, что секционная кривизна многообразия $G(n; n+p)$ заключена в пределах $[0; 2]$.

Секционную кривизну многообразия $G(n; n+p)$, $n > 1$, по двумерным площадкам σ, касательным к грассманову образу $\Gamma(F^n)$, будем называть секционной кривизной грассманова образа $\Gamma(F^n)$ и обозначать через $\overline{K}$.

Ранее изучался вопрос о строении подмногообразий F^n таких, что кривизна $\overline{K}$ грассманова образа $\Gamma(F^n)$ тождественно равна или только нулю, или только двум. В [4], [5] доказаны утверждения, которые можно объединить в виде следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть $F^n \subset E^{n+p}$ — регулярное подмногообразие, невырожденный грассманов образ которого касается лишь тех площадок, вдоль которых кривизна $\overline{K}$ грассманова образа $\Gamma(F^n)$*

а) *минимальна* ($\overline{K} \equiv 0$),

б) *максимальна* ($\overline{K} \equiv 2$).

Это возможно тогда и только тогда, когда

а) *подмногообразие имеет плоскую нормальную связность и индуцированная метрика плоская* [4];

б) *поверхность двумерна, минимальна и ее эллипс нормальной кривизны в каждой точке есть окружность с центром на поверхности. Если $x^k = x^k(u^1, u^2)$, $k = 1, \dots, 2+p$, —*

радиус-вектор поверхности в конформных координатах $z = u^1 + iu^2$, $f^k = \frac{\partial x^k}{\partial z}$, *то функции* f^k *голоморфны,* $\sum\limits_{k=1}^{2+p} (f^k)^2 = 0$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{2+p} (\frac{\partial f^k}{\partial z})^2 = 0$. *В частности, при* $p = 2$ *поверхность — комплексная кривая в* $C^2 = E^4$ [5].

В случае, когда $\overline{K} \equiv 1$ во всех точках подмногообразия $F^n \subset E^{n+p}$, из уравнений Кодацци и формулы для кривизны $\overline{K}$, выведенной в [6], следует, что подмногообразие F^n с плоской нормальной связностью является гиперповерхностью. Для произвольных подмногообразий при $\overline{K} \equiv 1$ подмногообразие $F^n \subset E^{n+p}$ гиперповерхностью является не всегда [7]. Таким образом, из предыдущих результатов следует, что если кривизна $\overline{K}$ грассманова образа подмногообразия $F^n \subset E^{n+p}$ постоянна и принимает одно из значений 0, 1, 2, то подмногообразие F^n принадлежит вполне определенному классу.

Вполне естественно поставить следующие вопросы:

а) какому классу может принадлежать поверхность, если $\overline{K} = \text{const} \neq 0; 1; 2$?
б) любые ли постоянные значения может принимать $\overline{K}$?

В данной статье будут рассмотрены подмногообразия с плоской нормальной связностью. Как следует из [6], кривизна грассманова образа таких подмногообразий заключена в пределах $[0, 1]$. Основным результатом данной статьи является

Теорема 2. *Пусть* $F^n \subset E^{n+p}$ *— регулярное подмногообразие с плоской нормальной связностью и с постоянной кривизной грассманова образа* $\Gamma(F^n)$. *Тогда*

1) *если* $p < n - 1$, *то или грассманов образ* $\Gamma(F^n)$ *вырождается, или* $\overline{K} \equiv 1$ *и* F^n *— гиперповерхность*;
2) *если* $p = n - 1$, *то* $\overline{K}$ *может принимать значения*
   $\overline{K} \equiv 0$ *и грассманов образ вырожден,*
   $\overline{K} \equiv 1$ *и* F^n *— гиперповерхность,*
   $\overline{K} \equiv \frac{1}{p^2}$;
3) *если* $p > n - 1$, *то* $\overline{K}$ *может быть произвольной константой* $c \in [0, 1]$.

Доказательство. Так как $F^n \subset E^{n+p}$ — подмногообразие с плоской нормальной связностью, то в каждой его точке существует n главных направлений, общих для всех нормалей. В произвольной точке $P \in F^n$ введем римановы нормальные координаты так, что координатные векторы в точке P совпадают с главными направлениями. Тогда в точке P первая и все вторые квадратичные формы приводятся к диагональному виду, т. е. $g_{ij} = 0, L^\sigma_{ij} = 0$ $(\sigma = 1, \dots, p)$ при $i \neq j$. Пусть $\Gamma(F^n) \subset G(n, n+p)$ — грассманов образ подмногообразия $F^n \subset E^{n+p}$. Обозначим через $\mathbf{Z}_i$ координатные касательные векторы к $\Gamma(F^n)$. Пусть векторы $\mathbf{X} = a^i \mathbf{Z}_i$ и $\mathbf{Y} = b^j \mathbf{Z}_j$ определяют двумерную площадку, касательную к $\Gamma(F^n)$. Если положить $q^{ij} = a^i b^j - a^j b^i$, то кривизна грассманова образа $\Gamma(F^n)$ по площадке σ, натянутой на векторы $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$, для подмногообразия с плоской нормальной связностью определяется формулой [6]

$$\overline{K}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) = \frac{\sum\limits_{r,s=1}^{n} \Big(\sum\limits_{\tau=1}^{p} L^\tau_{rr} L^\tau_{ss} \Big)^2 \frac{(q^{rs})^2}{g_{rr} g_{ss}}}{\sum\limits_{r,s=1}^{n} \sum\limits_{\tau,\sigma=1}^{p} (L^\tau_{rr} L^\sigma_{ss})^2 \frac{(q^{rs})^2}{g_{rr} g_{ss}}}. \tag{1}$$

Потребуем, чтобы $\overline{K}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \equiv \text{const} = c^2$ для всех площадок, касательных к $\Gamma(F^n)$. Тогда из (1) следует

$$\sum_{r,s=1}^{n} \left(\Big(\sum_{\tau=1}^{p} L^\tau_{rr} L^\tau_{ss} \Big)^2 - c^2 \sum_{\tau,\sigma=1}^{p} (L^\tau_{rr} L^\sigma_{ss})^2 \right) \frac{(q^{rs})^2}{g_{rr} g_{ss}} = 0. \tag{2}$$

Если положить $y^{rs} = \frac{(q^{rs})^2}{g_{rr}g_{ss}}$, то (2) представляет собой многочлен относительно переменных $y^{rs} > 0$, который обращается в нуль при всех y^{rs}. Тогда из (2) следует

$$\left(\sum_{\tau=1}^{p} L^{\tau}_{rr} L^{\tau}_{ss}\right)^2 = c^2 \sum_{\tau,\sigma=1}^{p} (L^{\tau}_{rr} L^{\sigma}_{ss})^2, \quad r \neq s. \tag{3}$$

Введем p-мерные векторы $\mathbf{a}_l = (L^1_{ll}, \ldots, L^p_{ll})$. Тогда уравнение (3) можно записать в виде

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{a}_r; \mathbf{a}_s\rangle^2 = c^2((L^1_{rr}L^1_{ss})^2 + \cdots + (L^1_{rr}L^p_{ss})^2 + \\ + (L^2_{rr}L^1_{ss})^2 + \cdots + (L^2_{rr}L^p_{ss})^2 + \cdots + (L^p_{rr}L^1_{ss})^2 + \cdots + (L^p_{rr}L^p_{ss})^2),\end{aligned} \tag{4}$$

где скобки $\langle\ ;\ \rangle$ означают скалярное произведение векторов. Преобразуем правую часть равенства (4), перегруппировав ее члены, добавляя и вычитая слагаемые вида $2L^{\tau}_{rr}L^{\tau}_{ss}L^{\sigma}_{rr}L^{\sigma}_{ss}$:

$$\begin{aligned}(L^1_{rr}L^1_{ss})^2 + \cdots + (L^1_{rr}L^p_{ss})^2 + \cdots + (L^p_{rr}L^1_{ss})^2 + \cdots + (L^p_{rr}L^p_{ss})^2 = \\ = (L^1_{rr}L^1_{ss})^2 + (L^2_{rr}L^2_{ss})^2 + \cdots + (L^p_{rr}L^p_{ss})^2 + 2(L^1_{rr}L^1_{ss}L^2_{rr}L^2_{ss} + \cdots + \\ + L^{p-1}_{rr}L^{p-1}_{ss}L^p_{rr}L^p_{ss}) + (L^1_{rr}L^2_{ss})^2 + (L^2_{rr}L^1_{ss})^2 - 2L^1_{rr}L^1_{ss}L^2_{rr}L^2_{ss} + \\ + (L^1_{rr}L^3_{ss})^2 + (L^3_{rr}L^1_{ss})^2 - 2L^1_{rr}L^1_{ss}L^3_{rr}L^3_{ss} + \cdots + \\ + (L^{p-1}_{rr}L^p_{ss})^2 + (L^p_{rr}L^{p-1}_{ss})^2 - 2L^{p-1}_{rr}L^{p-1}_{ss}L^p_{rr}L^p_{ss} = \\ = (L^1_{rr}L^1_{ss} + \cdots + L^p_{rr}L^p_{ss})^2 + (L^1_{rr}L^2_{ss} - L^2_{rr}L^1_{ss})^2 + \cdots + \\ + (L^{p-1}_{rr}L^p_{ss} - L^p_{rr}L^{p-1}_{ss})^2 = \langle \mathbf{a}_r; \mathbf{a}_s\rangle^2 + [\mathbf{a}_r; \mathbf{a}_s]^2,\end{aligned} \tag{5}$$

где $[\mathbf{a}_r; \mathbf{a}_s]$ — бивектор. Известно, что длина бивектора равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}_r$ и $\mathbf{a}_s$ ([8], с. 401). Обозначим через φ_{rs} угол между векторами $\mathbf{a}_r$ и $\mathbf{a}_s$. Подставляя (5) в правую часть (4), получим равенство $\langle \mathbf{a}_r; \mathbf{a}_s\rangle^2 = c^2(\langle \mathbf{a}_r; \mathbf{a}_s\rangle^2 + [\mathbf{a}_r; \mathbf{a}_s]^2)$, из которого следует $|\mathbf{a}_r|^2|\mathbf{a}_s|^2\cos^2\varphi_{rs} = c^2(|\mathbf{a}_r|^2|\mathbf{a}_s|^2\cos^2\varphi_{rs} + |\mathbf{a}_r|^2|\mathbf{a}_s|^2\sin^2\varphi_{rs})$ или

$$|\mathbf{a}_r|^2|\mathbf{a}_s|^2(\cos^2\varphi_{rs} - c^2) = 0. \tag{6}$$

Равенство (6) возможно в следующих двух случаях.

а) $\mathbf{a}_r = 0$ (или $\mathbf{a}_s = 0$). Грассманов образ подмногообразия $F^n \subset E^{n+p}$ вырождается, т. к. равенство нулю вектора $\mathbf{a}_r$ означает, что $L^{\sigma}_{rr} = 0$ при $\sigma = 1, \ldots, p$, т. е. соответствующее координатное направление на подмногообразии является сильно параболическим.

б) $\cos\varphi_{rs} = c$. Коразмерность p может принимать следующие возможные значения: 1) $p < n-1$; 2) $p = n-1$; 3) $p > n-1$.

1) Если $p < n-1$, то для выполнения равенства (6) необходимо, чтобы ненулевые p-мерные векторы $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ были коллинеарны. Тогда $c = 1$ и из равенств (3)–(5) следует

$$(L^1_{rr}L^2_{ss} - L^2_{rr}L^1_{ss})^2 + (L^1_{rr}L^3_{ss} - L^3_{rr}L^1_{ss})^2 + \cdots + (L^{p-1}_{rr}L^p_{ss} - L^p_{rr}L^{p-1}_{ss})^2 = 0$$

для всех значений $r, s = 1, \ldots, n$. Но это означает, что все вторые квадратичные формы подмногообразия $F^n \subset E^{n+p}$ пропорциональны. Отсюда следует, что F^n — гиперповерхность в $E^{n+1} \subset E^{n+p}$.

Если векторы $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ неколлинеарны, то $c = 0$. Но это означает, что все указанные векторы должны быть ортогональны. При $p < n-1$ это возможно только в случае, когда по крайней мере $(n-p)$ из этих векторов являются нулевыми. Но тогда грассманов образ $\Gamma(F^n)$ подмногообразия вырождается (т. е. его размерность меньше n).

2) Если $p = n-1$ и грассманов образ $\Gamma(F^n)$ подмногообразия не вырождается, то при $c = 1$ подмногообразие F^n — гиперповерхность. В случае, когда $c \neq 0, 1$, все векторы $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ с точностью до коллинеарности направлены из центра правильного симплекса к его вершинам. Найдем в этом случае значение константы c, которая с точностью до знака равна значению $\cos\varphi_{rs}$ — косинуса угла между векторами, идущими из центра правильного симплекса в его вершины. Будем рассматривать правильный симплекс с ребром, равным 1. Если обозначим через

R_k радиус шара, описанного вокруг правильного симплекса в k-мерном пространстве, через H_k — высоту правильного симплекса, через $\cos\alpha_k = \cos\varphi_{rs}$ — косинус угла между векторами, идущими из центра правильного симплекса к его вершинам, то будут выполняться равенства $H_k^2 = 1 - R_{k-1}^2$ и $(H_k - R_k)^2 + R_{k-1}^2 = R_k^2$. Из этих равенств вытекает

$$R_k^2 = \frac{1}{4(1 - R_{k-1}^2)}. \tag{7}$$

По теореме косинусов находим, что $1 = 2R_k^2 - 2R_k^2\cos\alpha_k$, или $\cos\alpha_k = 1 - \frac{1}{2R_k^2}$. Подставляя в последнее равенство выражение (7), находим

$$\cos\alpha_k = 2R_{k-1}^2 - 1. \tag{8}$$

Заметим, что $\cos\alpha_{k-1} = 1 - \frac{1}{2R_{k-1}^2}$. Тогда

$$R_{k-1}^2 = \frac{1}{2(1 - \cos\alpha_{k-1})}. \tag{9}$$

Подставляя (9) в (8), находим $\cos\alpha_k = \frac{\cos\alpha_{k-1}}{1-\cos\alpha_{k-1}}$. Непосредственно вычисляем, что $\cos\alpha_2 = -\frac{1}{2}, \cos\alpha_3 = -\frac{1}{3}$. По индукции легко доказать, что $\cos\alpha_k = -\frac{1}{k}$.

Таким образом, если грассманов образ $\Gamma(F^n)$ подмногообразия $F^n \subset E^{n+p}$ не вырождается, то при $p = n - 1$ возможны два случая:

а) $c = 1$ (т. е. $\overline{K} = 1$) и F^n — гиперповерхность;

б) $c = \frac{1}{p}$, $\overline{K} \equiv \frac{1}{p^2}$.

3) Если $p > n - 1$, то в этом случае, как следует из (6), $\overline{K}$ может принимать значения на отрезке $[0, 1]$. $\square$

В заключение приведем пример, который был построен в дипломной работе Молодых Л.С.

Пример. Рассмотрим поверхность $F^2 \subset E^4$, заданную уравнениями

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{c_1}{2}u_1^2 - \frac{c_2}{2}u_2^2 - u_1u_2, \\ x_2 &= -\frac{c_1}{2}u_1^2 - \frac{c_2}{2}u_2^2 - c_1c_2u_1u_2, \\ x_3 &= c_1u_1 + u_2, \\ x_4 &= c_2u_2 + u_1. \end{aligned} \tag{10}$$

Легко проверить, что касательные векторные поля к заданной поверхности имеют вид $\mathbf{U}_1 = (-c_1u_1 - u_2; -c_1u_1 - c_1c_2u_2; c_1; 1)$, $\mathbf{U}_2 = (-c_2u_2 - u_1; -c_2u_2 - c_1c_2u_1; 1; c_2)$, а нормали к поверхности $\mathbf{N}_1 = (1; 0; u_1; u_2)$, $\mathbf{N}_2 = (0; 1; c_2u_2; c_1u_1)$.

Эти нормали определяют касательные векторы к грассманову образу поверхности, которые можно записать в виде (2×2)-матриц

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь можно подсчитать кривизну грассманова многообразия $G(2, 4)$ по площадке, натянутой на векторы $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$, по формуле [1], [3]

$$\overline{K}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \frac{\frac{1}{2}\operatorname{Tr}\Lambda_1\Lambda_1' + \frac{1}{2}\operatorname{Tr}\Lambda_2\Lambda_2'}{\operatorname{Tr}\mathbf{XX}'\operatorname{Tr}\mathbf{YY}' - (\operatorname{Tr}\mathbf{XY}')^2}, \tag{11}$$

где $\Lambda_1 = \mathbf{XY}' - \mathbf{YX}'$, $\Lambda_2 = \mathbf{X}'\mathbf{Y} - \mathbf{Y}'\mathbf{X}$ — кососимметрические матрицы. Из формулы (11) следует, что кривизна грассманова многообразия по площадкам, касательным к грассманову образу данной поверхности, имеет вид

$$\overline{K} = \frac{(c_1 - c_2)^2 + (1 - c_1 c_2)^2}{1 + c_1^2 + c_2^2 + c_1^2 c_2^2}. \tag{12}$$

Рассмотрим некоторые частные случаи.

а) Пусть $\overline{K} \equiv 0$, тогда из (12) следует, что $c_1 = c_2 = \pm 1$. В этом случае из уравнений (10), задающих поверхность, следует $x_1 = x_2$, $x_3 = x_4$. Это значит, что данная поверхность представляет собой плоскость (или часть плоскости) $F^2 \subset E^4$. В этом случае грассманов образ поверхности вырождается в точку.

Другие примеры подмногообразий с невырожденным грассмановым образом, у которых $\overline{K} \equiv 0$, рассмотрены в [4].

б) Если $\overline{K} \equiv 1$, то из (12) следует, что или $c_1 = 0$, или $c_2 = 0$, или $c_1 = c_2 = 0$. В последнем случае поверхность (10) является гиперповерхностью и ее уравнения могут быть записаны в виде $x_2 = 0$; $x_1 = x_3 x_4$ (т. е. поверхность — гиперболический параболоид).

Если $c_1 \neq 0$, а $c_2 = 0$, то можно проверить, что матрицы A_1 и A_2 вторых квадратичных форм поверхности (10) непропорциональны, т. е. пространство вторых квадратичных форм данной поверхности двумерно, и эта поверхность $F^2 \subset E^4$ не является гиперповерхностью. Кроме того, $A_1 \circ A_2 \neq A_2 \circ A_1$, т. е. матрицы не коммутируют, и данная поверхность не является поверхностью с плоской нормальной связностью.

в) Если $\overline{K} \equiv 2$, то, в частности, уравнение (12) удовлетворяет, например, $c_1 = -c_2 = -1$. В этом случае уравнения поверхности (10) можно записать в виде

$$x_1 = \frac{x_3^2 - 2x_3x_4 - x_4^2}{4}, \quad x_2 = \frac{x_4^2 - 2x_3x_4 - x_3^2}{4}. \tag{13}$$

Легко показать, что поверхность (13) можно задать, как комплексную кривую в $C^2 = E^4$, что согласуется с последним утверждением теоремы 1, приведенной в данной статье.

Литература

1. Leichtweiss K. *Zur Riemannschen Geometrie in Grassmannschen Mannigfaltigkeiten* // Math. Z. – 1961. – Bd. 76. – № 4. – S. 334–366.
2. Wong Y.C. *Differential geometry of Grassmann manifold* // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. – 1967. – V. 57. – № 3. – P. 589–594.
3. Wong Y.C. *Sectional curvature of Grassmann manifolds* // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. – 1968. – V. 60. – № 1. – P. 75–79.
4. Muto Y. *The Gauss map of a submanifold in a Euclidean space* // J. Math. Soc. Japan. – 1978. – V. 30. – № 1. – P. 85–100.
5. Борисенко А.А., Николаевский Ю.А. *О поверхностях с максимальной кривизной грассманова образа* // Матем. заметки. – 1990. – Т. 48. – № 3. – С. 12–19.
6. Аминов Ю.А. *Изометрические погружения областей n-мерного пространства Лобачевского в $(2n-1)$-мерное евклидово пространство* // Матем. сб. – 1980. – Т. 111. – № 3. – С. 402–433.
7. Николаевский Ю.А. *О поверхностях, кривизна грассманова образа которых не меньше* 1 // Укр. геометрич. сб. – 1990. – № 33. – С. 77–91.
8. Ефимов Н.В., Розендорн Э.Р. *Линейная алгебра и многомерная геометрия.* – М.: Наука, 1970. – 528 с.

Харьковский национальный
университет им. В.Н. Каразина

Поступила
07.12.2002