ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2004 МАТЕМАТИКА № 12 (511)

УДК 517.977

*Р. ГАБАСОВ, Ф.М. КИРИЛЛОВА, Т.Г. ХОМИЦКАЯ*

# ПРОГРАММНОЕ И ПОЗИЦИОННОЕ РЕШЕНИЯ ТЕРМИНАЛЬНОЙ ЛИНЕЙНО ВЫПУКЛОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

## 1. Введение

Линейно выпуклые задачи оптимального управления (ОУ) являются непосредственным обобщением линейных задач. В приложениях они часто встречаются как самостоятельные, в конструктивной теории могут использоваться и как вспомогательные при решении нелинейных задач ОУ [1]. Качественная теория таких задач разработана столь же глубоко [2], как и аналогичная теория для линейных задач. Предложено много алгоритмов их численного решения. Однако известные алгоритмы касаются в основном программной оптимизации динамических систем и не настолько эффективны, чтобы синтезировать ОУ типа обратной связи. Исключение составляют линейно-квадратичные задачи Летова–Калмана и примыкающие к ним задачи $H_\infty$-теории управления, для которых удается построить ОУ в виде *линейных* обратных связей. Эти результаты привлекли большое внимание в силу простоты их реализации. Задачи Летова–Калмана являются гладкими и относятся скорее к классическому вариационному исчислению, чем к теории ОУ, поскольку в них игнорируются прямые (геометрические) ограничения на управления. Подобные ограничения делают экстремальные задачи негладкими и представляют наиболее распространенный (нелинейный) элемент современных прикладных задач. Именно из-за них в свое время пришлось строить теорию вариационных задач неклассического типа, которая стала называться теорией ОУ. За пятьдесят лет теория ОУ достигла выдающихся успехов. Однако в ней до сих пор остается нерешенной центральная проблема — синтез ОУ типа обратной связи — даже для линейных систем.

Частный случай исследуемых в работе задач — линейно-квадратичные задачи ОУ — играют большую роль в бурно развивающейся теории стабилизации, основанной на методологии Model Predictive Control (MPC) [3]. Прикладное значение этой теории особенно возросло [4], когда в ней стали рассматриваться задачи ОУ с прямыми ограничениями на управления. Реализуемость методологии MPC зависит от возможности построения в режиме реального времени программных решений специальных задач оптимального управления. Только в этом случае можно в конкретных процессах стабилизации формировать управляющие воздействия по ходу процесса стабилизации (on-line control). В известной литературе по MPC пока нет специальных быстрых методов вычисления соответствующих программных решений задач ОУ. Для этой цели там используют в основном стандартные методы квадратичного программирования, что ограничивает возможности MPC медленными переходными процессами из-за необходимости использования больших периодов дискретизации времени и малых горизонтов управления. В данной работе описываются специальные методы решения линейно выпуклых задач ОУ, эффективность которых мало зависит от периода дискретизации времени. Первые методы подобного типа для

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского Республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Ф04Р-002) и Государственной программы фундаментальных исследований ("Математические структуры–16").

линейных задач ОУ были предложены еще в [5], [6], затем они получили развитие в [7]–[9]. Результаты по ОУ в режиме реального времени были независимо от МРС использованы в [10]–[13] для стабилизации динамических систем ограниченными управлениями.

*Цель данной работы* — построить методы программной и позиционной оптимизации линейных нестационарных систем по выпуклым терминальным критериям качества.

Предлагается метод вычисления оптимальной программы кусочно-линейной аппроксимации исходной задачи. Для решения линейных задач ОУ с параметром разработан быстрый двойственный метод и процедура доводки. Обсуждается вопрос о вычислении оптимальных программ в классе дискретных управлений. Вычисление оптимальных программ не является конечной целью конструктивной теории ОУ. Оптимальные программы выявляют лишь потенциальные возможности систем управления, но они, как правило, не участвуют в процессах реального управления. Реальные процессы управления базируются на управлениях типа обратной связи. Проблема синтеза оптимальных систем в классической постановке до сих пор остается нерешенной. Данная работа основана на другом подходе к проблеме [5]. При этом подходе описывается метод реализации оптимальных обратных связей в режиме реального времени.

## 2. Линейно выпуклая задача терминального управления. Общая схема решения задачи

Пусть $T = [t_*, t^*]$, $t_* < t^* < +\infty$, — промежуток управления, $A(t)$, $b(t)$, $t \in T$, — кусочно-непрерывные $n \times n$-матричная и $n$-векторная функции, $\varphi(x)$, $x \in R^n$, в отличие от [8] — достаточно гладкая выпуклая функция: $\varphi(x) \to \infty$ при $\|x - x^*\| \to \infty$, $x^*$ — точка минимума: $\varphi^* = \varphi(x^*) = \min \varphi(x)$, $x \in R^n$.

В классе скалярных кусочно-непрерывных управляющих воздействий $u(t)$, $t \in T$, рассмотрим линейно выпуклую задачу ОУ

$$\alpha^0 = \min \varphi(x(t^*)), \quad \dot{x} = A(t)x + b(t)u, \quad x(t_*) = x_0, \quad |u(t)| \le 1, \quad t \in T. \tag{1}$$

Здесь $x = x(t)$ — $n$-вектор состояния системы управления в момент времени $t$, $u = u(t)$ — значение скалярного управляющего воздействия, $x_0 \in R^n$ — заданное начальное состояние.

Кусочно-непрерывное управление $u^0(t)$, $|u^0(t)| \le 1$, $t \in T$, назовем оптимальной программой, если на соответствующей ей траектории $x^0(t)$, $t \in T$, критерий качества задачи (1) достигает минимального значения: $\alpha^0 = \varphi(x^0(t^*)) = \min \varphi(x(t^*))$, где минимум берется по всем кусочно-непрерывным программам $|u(t)| \le 1$, $t \in T$.

Для решения поставленной задачи программной оптимизации линейной нестационарной системы (1) в классе кусочно-непрерывных управлений введем кусочно-линейную задачу оптимизации в классе дискретных программ.

Управление $u(t)$, $t \in T$, назовем дискретной программой (с периодом квантования $h$, $h = (t^* - t_*)/N$, $N$ — натуральное число), если $u(t) = u(t_k)$, $t \in [t_k, t_{k+1}[$, $t_k = t_* + kh$, $k = \overline{0, N-1}$.

Пусть $X^\alpha = \{x \in R^n : \varphi(x) \le \alpha\}$, $\alpha \in R$. Задачу (1) запишем в эквивалентном виде

$$\alpha^0 = \min \alpha, \quad \dot{x} = A(t)x + b(t)u, \quad x(t_*) = x_0, \quad x(t^*) \in X^\alpha, \quad |u(t)| \le 1, \quad t \in T. \tag{2}$$

Выберем произвольную совокупность единичных $n$-векторов

$$h_i, \quad i \in I = \{1, 2, \ldots, m\}, \quad m \ge n, \tag{3}$$

в которой каждые $n$ векторов линейно независимы. Векторы (3) назовем векторами аппроксимации. В качестве таких векторов можно взять единичные орты $e_i$, $i = \overline{1, n}$.

Обозначим $r_i = h_i$, $r_{m+i} = -h_i$, $i = \overline{1, m}$, и подсчитаем числа $g_i^*(\alpha) = \max r_i' x$, $x \in X^\alpha$, $g_{*i}(\alpha) = \max r_{m+i}' x$, $x \in X^\alpha$, $i \in I$.

Множество $\widetilde{X}^\alpha = \{x \in R^n : g_{*i}(\alpha) \le h_i' x \le g_i^*(\alpha), \ i \in I\}$ называется (внешней) кусочно-линейной аппроксимацией множества $X^\alpha$.

Под кусочно-линейной аппроксимацией задачи (2) понимается следующая задача ОУ в классе дискретных управлений:

$$\widetilde{\alpha}^0 = \min \alpha, \quad \dot{x} = A(t)x + b(t)u, \quad x(t_*) = x_0, \quad x(t^*) \in \widetilde{X}^\alpha, \quad |u(t)| \le 1, \quad t \in T. \tag{4}$$

Оптимальные программы задачи (1) будем строить с помощью двух процедур:
1) вычисление оптимальной программы кусочно-линейной задачи (4); 2) процедура доводки. Первая процедура будет описана в п. 3, вторая — в п. 4.

Выбрав период квантования $h$ и совокупность (3), вычислим программное решение $u^0_\alpha(t)$, $x^0_\alpha(t)$, $t \in T$, задачи (4). Подсчитаем $\varepsilon_i = g^*_i(\alpha) - r'_i x^0_\alpha(t^*)$, $\varepsilon_{m+i} = -g_{*i}(\alpha) - r'_{m+i} x^0_\alpha(t^*)$, $i \in I$. Среди чисел $\varepsilon_i$, $i = \overline{1, 2m}$, выберем $n$ наименьших: $\varepsilon_i$, $i \in I'$, $|I'| = n$. Число $\widetilde{\varepsilon} = \max \varepsilon_i$, $i \in I'$, характеризует точность аппроксимации программного решения исходной задачи программным решением задачи (4). Если при выбранном[1] $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство $\widetilde{\varepsilon} \le \varepsilon$, то перейдем к процедуре доводки (п. 4). При $\widetilde{\varepsilon} > \varepsilon$ к векторам $r_i$, $i \in I$, добавим вектор $\widetilde{r} = \operatorname{grad} \varphi(x^0_\alpha(t^*)) / \| \operatorname{grad} \varphi(x^0_\alpha(t^*)) \|$. Вычислим $\widetilde{g}^*(\alpha) = \max \widetilde{r}' x$, $x \in X^\alpha$; $\widetilde{g}_*(\alpha) = \min \widetilde{r}' x$, $x \in X^\alpha$, и в задаче (4) заменим терминальные ограничения на следующие:

$$g_{*i}(\alpha) \le r'_i x(t^*) \le g^*_i(\alpha), \quad i \in I; \quad \widetilde{g}_*(\alpha) \le \widetilde{r}' x(t^*) \le \widetilde{g}^*(\alpha).$$

Программное решение новой задачи можно быстро построить с помощью двойственного метода, описанного в п. 3. При дальнейшем повышении точности аппроксимации задача (4) решается с новыми терминальными ограничениями, которые получаются из предыдущих добавлением одного нового ограничения, построенного по приведенным выше правилам. Когда количество новых ограничений достигнет $n$, удалим из добавленных одно ("худшее", с наибольшим $\varepsilon_i$) ограничение. Через конечное число коррекций терминальных ограничений получается программное решение задачи (4), на котором будут выполняться условия перехода к процедуре доводки. Процедура доводки строит программное решение задачи (1) в классе кусочно-непрерывных функций.

## 3. Вычисление оптимальной программы кусочно-линейной задачи ОУ

Задача (4) является нелинейной задачей ОУ. Решим ее с помощью конечного числа коррекций терминальных ограничений линейной задачи. Положив $l = x^* - x_0$, для фиксированного $\alpha$ в классе дискретных программ рассмотрим линейную задачу ОУ

$$\begin{gathered} \beta(\alpha) = \min \beta, \quad \dot{x} = A(t)x + b(t)u, \quad x(t_*) = x_\beta = x_0 + \beta l, \\ x(t^*) \in \widetilde{X}^\alpha, \quad |u(t)| \le 1, \quad t \in T \quad (\beta \in R). \end{gathered} \tag{5}$$

Для $\alpha = \varphi^*$ задача (5) имеет вид

$$\begin{gathered} \beta^* = \min \beta, \quad \dot{x} = A(t)x + b(t)u, \quad x(t_*) = x_\beta = x_0 + \beta l, \\ x(t^*) = x^*, \quad |u(t)| \le 1, \quad t \in T. \end{gathered} \tag{6}$$

Нетрудно показать справедливость следующих утверждений.

**Лемма 1.** *Функция $\beta(\alpha)$, $\alpha \in R$, является непрерывной монотонно убывающей функцией; $\beta(\varphi^*) = \beta^*$, $\beta(\alpha) \to -\infty$ при $\alpha \to \infty$.*

**Лемма 2.** *Оптимальное значение $\widetilde{\alpha}^0$ критерия качества задачи (4) равно минимальному корню уравнения $\beta(\alpha) = 0$.*

[1] Число $\varepsilon$ подбирается так, чтобы последующая процедура доводки сходилась.

Двойственный метод решения задачи (5) приведен ниже.

Решение задачи (4) начнем с решения задачи (6). Если $\beta^* = \beta(\varphi^*) < 0$, то $x^*$ — внутренняя точка множества достижимости системы (1), в задаче (4) заведомо существует бесконечное множество решений, на которых можно ввести дополнительный критерий качества. В случае $\beta^* = 0$ (согласно лемме 2) $\varphi^*$ — минимальное значение критерия качества задачи (4): $\widetilde{\alpha}^0 = \varphi^*$. При $\beta^* > 0$ найдем минимальный корень уравнения $\beta(\alpha) = 0$. Это уравнение можно решать любым из многочисленных известных методов.

Изложим двойственный метод решения задачи (5). Сначала приведем необходимые элементы этого метода [14] в форме, удобной для решения исследуемой задачи.

Пусть $T_h = \{t_*, t_* + h, \ldots, t^* - h\}$. Используя формулу Коши [2] $x(t^*) = F(t^*, t_*)x(t_*) + \int\limits_{t_*}^{t^*} F(t^*, \tau)b(\tau)u(\tau)d\tau = F(t^*, t_*)x_0 + F(t^*, t_*)\beta l + \sum\limits_{t\in T_h} \int\limits_{t}^{t+h} F(t^*, \tau)b(\tau)d\tau\, u(t)$, где $F(t, \tau) = F(t)F^{-1}(\tau)$, $\dot{F} = A(t)F$, $F(t_*) = E$, запишем задачу (5) в эквивалентной функциональной форме

$$\beta(\alpha) = \min \beta, \quad q_*(\alpha) \le \sum_{t\in T_h} f_h(t)\, u(t) + f_l \beta \le q^*(\alpha), \quad |u(t)| \le 1, \quad t \in T. \tag{7}$$

Здесь

$$f_h(t) = \int_t^{t+h} HF(t^*, \tau)b(\tau)d\tau, \quad t \in T_h, \quad f_l = HF(t^*, t_*)l, \tag{8}$$
$$q_*(\alpha) = g_*(\alpha) - HF(t^*, t_*)x_0, \quad q^*(\alpha) = g^*(\alpha) - HF(t^*, t_*)x_0,$$

$H$ — $m \times n$-матрица, составленная из строк $h_i$, $i \in I$.

Динамический способ построения элементов (8) состоит в следующем. Пусть $G(t)$, $t \in T$, — $m \times n$-матричная функция — решение уравнения

$$\dot{G} = -GA(t), \quad G(t^*) = H. \tag{9}$$

Тогда элементы (8) можно строить по формулам

$$f_h(t) = \int_t^{t+h} G(\tau)b(\tau)d\tau, \quad f_l = G(t_*)l, \quad q_*(\alpha) = g_*(\alpha) - G(t_*)x_0, \quad q^*(\alpha) = g^*(\alpha) - G(t_*)x_0.$$

Задача (7) отличается от соответствующей задачи из [15] наличием параметра $\beta$, что требует внесения некоторых дополнений в конструкции [15].

Начнем с основного понятия метода — опоры. Выделим из множества индексов $I$ произвольное подмножество $I_{\text{оп}}$, $|I_{\text{оп}}| = p$, $1 \le p \le m$, а из $T_h$ — произвольное подмножество $T_{\text{оп}} = \{t_j, j = \overline{1, p-1}\}$ и построим $p \times p$-матрицу $P_{\text{оп}} = \begin{pmatrix} f_{hi}(t),\ t\in T_{\text{оп}};\ f_{li} \\ i \in I_{\text{оп}} \end{pmatrix}$, где $f_{hi}(t)$, $f_{li}$ — $i$-е координаты векторов $f_h(t)$, $f_l$.

**Определение 1.** Пару множеств $K_{\text{оп}}=\{I_{\text{оп}}, T_{\text{оп}}\}$ назовем опорой задачи (7), если $\det P_{\text{оп}} \ne 0$.

Опору, составленную из $I_{\text{оп}} = \{i_1 : f_{li_1} \ne 0\}$ и $T_{\text{оп}} = \emptyset$, будем называть простейшей опорой.

Опишем два способа динамической проверки совокупности $K_{\text{оп}}$ на опорность.

*Прямой способ.*

1) Построим терминальные состояния $\chi_\tau(t^*)$, $\tau \in T_{\text{оп}}$, прямой системы (1), соответствующие начальному состоянию $x(t_*) = 0$ и программе

$$u(t) = 1, \quad t \in [\tau, \tau + h[; \quad u(t) = 0, \quad t \in T \setminus [\tau, \tau + h[.$$

2) Найдем терминальное состояние $\chi^\beta(t^*)$ прямой системы (1), соответствующее начальному состоянию $x(t_*) = l$ и программе $u(t) = 0$, $t \in T$.

3) Умножив матрицу $H_{\text{оп}} = (h_i,\ i \in I_{\text{оп}})'$ на эти состояния, составим матрицу

$$P_{\text{оп}} = (H_{\text{оп}}\chi_\tau(t^*),\ \tau \in T_{\text{оп}};\ H_{\text{оп}}\chi^\beta(t^*)). \tag{10}$$

*Двойственный способ.*

1) Проинтегрировав сопряженную систему

$$\dot{\psi} = -A'(t)\psi \tag{11}$$

с начальными условиями $\psi(t^*) = h_i$, $i \in I_{\text{оп}}$, найдем

$$\xi_i'(t) = h_i' F(t^*, t), \quad t \in T, \quad i \in I_{\text{оп}}.$$

2) Составим матрицу

$$P_{\text{оп}} = \begin{pmatrix} \int\limits_t^{t+h} \xi_i'(\tau) b(\tau) d\tau, \ t \in T_{\text{оп}}; \quad \xi_i'(t_*) l \\ i \in I_{\text{оп}} \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Таким образом, совокупность $K_{\text{оп}}$ является опорой тогда и только тогда, когда любая из матриц (10), (12) неособая.

Опору $K_{\text{оп}}$ сопровождают следующие элементы.

1. Вектор потенциалов $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_p)$. Вычислим его как решение уравнения $\nu' P_{\text{оп}} = e_p'$, где $e_p = (0, 0, \dots, 1) \in R^p$ — единичный орт. Ясно, что $\nu' = \left[P_{\text{оп}}^{-1}\right]_p$, т. е. $\nu$ представляет $p$-ю строку матрицы $P_{\text{оп}}^{-1}$.

2. Котраектория $\psi(t)$, $t \in T$, — решение сопряженного уравнения (11) с начальным условием $\psi(t^*) = -H_{\text{оп}}' \nu$.

3. Коуправление $\delta_h(t)$, $t \in T_h$, — динамический аналог вектора оценок [16]: $\delta_h(t) = -\sum\limits_{i \in I_{\text{оп}}} \nu_i f_{h\,i}(t)$, $t \in T_h$. Динамическая формула для вычисления коуправления имеет вид

$$\delta_h(t) = \int_t^{t+h} \psi'(\tau) b(\tau) d\tau, \quad t \in T_h.$$

4. Псевдоуправление $\omega(t)$, $t \in T_h$, параметр $\beta_\omega$ начального состояния и выходной псевдосигнал $\zeta(t^*) = (\zeta_i(t^*),\ i \in I)$ в момент $t^*$. Для их построения сначала зададим опорные элементы

$$\zeta_i(t^*) = g_{*i}(\alpha) \text{ при } \nu_i > 0; \quad \zeta_i(t^*) = g_i^*(\alpha) \text{ при } \nu_i < 0;$$
$$\zeta_i(t^*) \in [g_{*i}(\alpha); g_i^*(\alpha)] \text{ при } \nu_i = 0, \quad i \in I_{\text{оп}},$$

и значения псевдоуправления в неопорные моменты

$$\omega(t) = -1 \text{ при } \delta_h(t) > 0; \quad \omega(t) = 1 \text{ при } \delta_h(t) < 0;$$
$$\omega(t) \in [-1; 1] \text{ при } \delta_h(t) = 0,\ t \in T_{\text{н}}.$$

Динамический способ построения совокупности $\{\omega_{\text{оп}} = (\omega(t),\ t \in T_{\text{оп}}); \beta_\omega\}$ сводится к следующим операциям.

1) Вычислим $\varkappa_0(t^*)$ — значение в момент $t^*$ решения $\varkappa_0(t)$, $t \in T$, прямого уравнения (1) с начальным условием $x(t_*) = x_0$ и программой $u(t) = \omega(t)$, $t \in T_{\text{н}}$; $u(t) = 0$, $t \in T_{\text{оп}}$.

2) Решим уравнение

$$P_{\text{оп}} \begin{pmatrix} \omega_{\text{оп}} \\ \beta_\omega \end{pmatrix} = \zeta_{\text{оп}} - H_{\text{оп}} \varkappa_0(t^*), \tag{13}$$

где $\zeta_{\text{оп}} = (\zeta_i(t^*),\ i \in I_{\text{оп}})$.

Решение $\varkappa(t)$, $t \in T$, прямого уравнения (1) с начальным условием $x(t_*) = x_0 + \beta_\omega l$ и дискретной программой $u(t) = \omega(t)$, $t \in T$, назовем псевдотраекторией, вектор $\zeta = \zeta(t^*) = H\varkappa(t^*)$ — выходным псевдосигналом в момент $t^*$, сопровождающими опору $K_{\text{оп}}$.

Неопорные компоненты вектора $\zeta(t^*)$ равны $\zeta_{\text{н}} = (\zeta_i(t^*),\ i \in I_{\text{н}}) = (h_i' \varkappa(t^*),\ i \in I_{\text{н}})$.

Опору используем прежде всего для идентификации оптимальных программ.

**Теорема 1** (принцип минимума). *Для оптимальности программы* $u(t)$, $t \in T$, *необходимо и достаточно существования такой опоры* $K_{\text{оп}}$, *чтобы на сопровождающих ее векторе потенциалов* $\nu$ *и котраектории* $\psi(t)$, $t \in T$, *выполнялись два условия*:

1) *условие минимума для программы*

$$\int_t^{t+h} \psi'(\tau)b(\tau)d\tau\, u(t) = \min_{|u|\le 1} \int_t^{t+h} \psi'(\tau)b(\tau)d\tau\, u, \quad t \in T_h, \tag{14}$$

2) *условие трансверсальности для траектории*

$$\nu' H x(t^*) = \min \nu' z, \quad g_*(\alpha) \le z \le g^*(\alpha). \tag{15}$$

**Определение 2.** Опору $K_{\text{оп}}$, на которой выполняются условия (14), (15), назовем оптимальной.

**Теорема 2** (критерий оптимальности опоры). *Для оптимальности опоры* $K_{\text{оп}}$ *необходимо и достаточно, чтобы на некоторых сопровожающих ее псевдоуправлении* $\omega(t)$, $t \in T$, *и выходном псевдосигнале* $\zeta(t^*) = H\varkappa(t^*)$ *выполнялись следующие неравенства*:

$$|\omega(t)| \le 1, \quad t \in T_{\text{оп}}; \quad g_{*i}(\alpha) \le \zeta_i(t^*) \le g_i^*(\alpha), \quad i \in I_{\text{н}}.$$

**Определение 3.** Опору $K_{\text{оп}}$ назовем регулярной, если сопровождающие ее вектор потенциалов $\nu$ и коуправление $\delta_h(t)$, $t \in T_h$, удовлетворяют соотношениям $\nu_i \ne 0$, $i \in I_{\text{оп}}$; $\delta_h(t) \ne 0$, $t \in T_{\text{н}}$.

Регулярную опору сопровождают единственные псевдоуправление $\omega(t)$, $t \in T$, и выходной псевдосигнал $\zeta(t^*)$.

На основе этих результатов разработан *двойственный метод* решения линейной задачи (5), который представляет последовательное преобразование опор до получения оптимальной опоры.

Пусть $K_{\text{оп}}$ — начальная опора задачи (в качестве ее можно взять простейшую опору). Предположим, что она не удовлетворяет критерию оптимальности опоры.

С целью упрощения выкладок предположим, что 1) на итерациях метода участвуют лишь регулярные опоры (общий случай рассмотрен в [16]); 2) коуправление $\delta_h(t)$, $t \in T_h$, удовлетворяет условиям

$$\delta_h(t-h)\delta_h(t+h) < 0, \text{ если } t \in T_{\text{оп}}, \quad t_* < t < t^* - h;$$
$$\delta_h(t_* + h) \ne 0, \text{ если } t^* \in T_{\text{оп}}; \quad \delta_h(t_* - 2h) \ne 0, \text{ если } t^* - h \in T_{\text{оп}}.$$

Момент $t \in T_{\text{н}} \setminus t_*$ будем называть неопорным нулем, если $\delta_h(t-h)\delta_h(t) < 0$. Множество неопорных нулей обозначим через $T_{\text{н}0}$. Пусть $T_{\text{он}} = T_{\text{н}0} \cup T_{\text{оп}} \cup \{t_*, t^*\} = \{t_s,\ s \in S \cup s^* + 1\}$, $S = \{0, 1, \dots, s^*\}$. Через $T_s$, $s \in S$, обозначим промежутки постоянства знака коуправления:

$$T_s = \{t_{*s} = t_s, t_s + h, \dots, t_s^* = t_{s+1} - h\}, \qquad \text{если } t_s \notin T_{\text{оп}};$$
$$T_s = \{t_{*s} = t_s + h, t_s + 2h, \dots, t_s^* = t_{s+1} - h\}, \quad \text{если } t_s \in T_{\text{оп}}.$$

Если $t^* - h \in T_{\text{оп}}$, то положим $T_{s^*} = 0$.

Введем векторы

$$d = H\varkappa_0(t^*) = G(t_*)x_0 + \gamma \sum_{s=0}^{s^*} (-1)^{s+1} \int_{t_{*s}}^{t_s^*+h} G(\tau)b(\tau)d\tau, \quad d_{\text{оп}} = (d_i,\ i \in I_{\text{оп}})$$

($\gamma = \operatorname{sign} \delta_h(t_*)$, если $t_* \notin T_{\text{оп}}$; $\gamma = \operatorname{sign} \delta_h(t_* + h)$, если $t_* \in T_{\text{оп}}$).

Тогда уравнение (13) примет вид $P_{\text{оп}} \binom{\omega_{\text{оп}}}{\beta_\omega} = \zeta_{\text{оп}} - d_{\text{оп}}$.

С помощью вектора $d$ и матрицы $P_{|\text{оп}|} = (f_h(t),\ t \in T_{\text{оп}};\ f_l)$ легко подсчитать и выходной псевдосигнал $\zeta(t^*) = P_{|\text{оп}|} \binom{\omega_{\text{оп}}}{\beta_\omega} + d$. Матрица $P_{|\text{оп}|}$ строится аналогично $P_{\text{оп}}$, например, прямым способом: $P_{|\text{оп}|} = (H\chi_\tau(t^*),\ \tau \in T_{\text{оп}};\ H\chi^\beta(t^*))$ или двойственным: $P_{|\text{оп}|} = \Big(\int\limits_t^{t+h} G(\tau)b(\tau)d\tau,\ t \in T_{\text{оп}};$ $G(t_*)l\Big)$.

Будем считать, что к началу итерации кроме параметров задачи $A(t)$, $b(t)$, $t \in T$; $H$, $g_*(\alpha)$, $g^*(\alpha)$, $l$, известна следующая информация (хранится в оперативной памяти ЭВМ): 1) опора $K_{\text{оп}} = \{I_{\text{оп}}, T_{\text{оп}}\}$, 2) множество неопорных нулей $T_{\text{н}0}$, 3) матрица $P_{|\text{оп}|}$, 4) значения $G(t)$, $t \in T_{\text{он}} \setminus t^*$, 5) величина $\gamma$, 6) опорные значения псевдоуправления $\omega(t)$, $t \in T_{\text{оп}}$, и значение параметра $\beta_\omega$, 7) вектор $d$, 8) вектор потенциалов $\nu$, 9) вектор выходного псевдосигнала $\zeta(t^*)$.

Информация, необходимая для первой итерации, готовится по изложенным выше правилам. Далее она преобразуется по ходу итераций.

*Итерация.* По компонентам $\omega(t)$, $t \in T_{\text{оп}}$; $\zeta_i(t^*)$, $i \in I_{\text{н}}$, вычислим

$$\rho(\zeta_i(t^*), [g_{*i}(\alpha), g_i^*(\alpha)]),\quad i \in I_{\text{н}};\quad \rho(\omega(t), [-1,1]),\quad t \in T_{\text{оп}}, \tag{16}$$

($\rho(c,\ [a,b])$ — расстояние от точки $c$ до отрезка $[a,b]$). Из (16) выберем наибольшие

$$\rho_{i_0} = \rho(\zeta_{i_0}(t^*), [g_{*i_0}(\alpha), g_{i_0}^*(\alpha)]) = \max \rho(\zeta_i(t^*), [g_{*i}(\alpha), g_i^*(\alpha)]),\quad i \in I_{\text{н}};$$
$$\rho(t_0) = \rho(\omega(t_0), [-1,1]) = \max \rho(\omega(t), [-1,1]),\quad t \in T_{\text{оп}}.$$

Определим $\rho_0 = \max\{\rho_{i_0}, \rho(t_0)\}$ и исследуем каждую из двух ситуаций: 1) $\rho_0 = \rho(t_0)$, 2) $\rho_0 = \rho_{i_0}$.

1) ($\rho_0 = \rho(t_0)$). Начнем с формирования направления $\Delta\nu$ изменения вектора потенциалов $\nu$, решив систему линейных уравнений

$$-P'_{\text{оп}}\Delta\nu = (\Delta\delta_h(t),\ t \in T_{\text{оп}})\quad (\Delta\delta_h(t_0) = -\operatorname{sign}\omega(t_0);\ \Delta\delta_h(t) = 0,\ t \in T_{\text{оп}} \setminus t_0).$$

Обозначим $\Delta\widetilde{\nu} = (\Delta\widetilde{\nu}_i,\ i \in I)$, $\Delta\widetilde{\nu}_i = \Delta\nu_i$, если $i \in I_{\text{оп}}$; $\Delta\widetilde{\nu}_i = 0$, если $i \notin I_{\text{оп}}$. Направление изменения коуправления $\Delta\delta_h(t)$, $t \in T_h$, построим по формуле

$$\Delta\delta_h(t) = -\int_t^{t+h} \Delta\widetilde{\nu}' G(\tau)b(\tau)d\tau,\quad t \in T_h. \tag{17}$$

Введем возмущенные коуправление

$$\delta_h(t,\sigma) = \delta_h(t) + \sigma\Delta\delta_h(t),\quad t \in T_h;\quad \sigma \geq 0, \tag{18}$$

и вектор потенциалов

$$\nu(\sigma) = \nu + \sigma\Delta\nu. \tag{19}$$

Далее предполагается, что $\Delta\delta_h(t_{*s})\Delta\delta_h(t^*_{s-1}) > 0$, если $t_{*s} \in T_{\text{он}} \setminus \{t_*,\ t^*\}$, $s = \overline{1, s^*}$.

Согласно [16] в малой правосторонней окрестности точки $\sigma = 0$ двойственный критерий качества изменяется вдоль направления $\Delta\nu$ со скоростью $\eta^{(1)} = \rho_0 > 0$.

В терминах вектора потенциалов замена опоры связана с движением вдоль $\Delta\nu$ до полной релаксации в точке $\overline{\nu} = \nu + \sigma^*\Delta\nu$ кусочно-линейного по $\sigma \geq 0$ двойственного критерия качества. "Длинный" двойственный шаг $\sigma^*$ вычислим с помощью нескольких "коротких" шагов.

Для вычисления "коротких" шагов, в которых изменение двойственного критерия качества терпит излом, наряду с упомянутой информацией, хранящейся в памяти ЭВМ, будем использовать дополнительную. Последняя для построения первого "короткого" шага $\sigma^{(1)}$ имеет вид $\eta^{(1)}$,

$$\sigma(t_0),\ \ \vartheta(t_0),\ \ s_0;\ \ \sigma_i,\ \ i \in I_{\text{оп}};\ \ \sigma(t_*),\ \ \sigma(t^*);\ \ \sigma(t),\ \ \vartheta(t),\ \ t \in T_{\text{н}0}. \tag{20}$$

Поясним физический смысл чисел (20). Каждое из чисел $\sigma(t)$, $\sigma_i$ представляет значение шага вдоль $\Delta\nu$, при котором или компонента (18), или компонента (19) обращается в нуль, что вызывает скачок скорости двойственного критерия качества. Числа $\vartheta(t)$ указывают направление перемещения нуля коуправления при увеличении $\sigma$; $s_0$ — индекс момента $t_0$ в $T_{\text{он}}$.

Отсюда следуют формулы для вычисления чисел (20)

$$\sigma(t_0) = -\delta_h(t_0+h)/\Delta\delta_h(t_0+h), \quad \vartheta(t_0) = 1, \quad \text{если} \quad (-1)^{s_0+1}\gamma\Delta\delta_h(t_0) < 0;$$
$$\sigma(t_0) = -\delta_h(t_0-h)/\Delta\delta_h(t_0-h), \quad \vartheta(t_0) = -1, \quad \text{если} \quad (-1)^{s_0+1}\gamma\Delta\delta_h(t_0) > 0,$$
$$\sigma_i = \begin{cases} -\nu_i/\Delta\nu_i, & \text{если } \nu_i\Delta\nu_i < 0; \\ \infty, & \text{если } \nu_i\Delta\nu_i \geq 0, \quad i \in I_{\text{оп}}, \end{cases}$$
$$\sigma(t_*) = \begin{cases} -\delta_h(t_*)/\Delta\delta_h(t_*), & \text{если } \delta_h(t_*)\Delta\delta_h(t_*) < 0; \\ \infty, & \text{если } \delta_h(t_*)\Delta\delta_h(t_*) \geq 0, \end{cases}$$
$$\sigma(t^*) = \begin{cases} -\delta_h(t^*-h)/\Delta\delta_h(t^*-h), & \text{если } \delta_h(t^*-h)\Delta\delta_h(t^*-h) < 0; \\ \infty, & \text{если } \delta_h(t^*-h)\Delta\delta_h(t^*-h) \geq 0, \end{cases}$$
$$\sigma(t) = -\delta_h(t)/\Delta\delta_h(t), \quad \vartheta(t) = 1, \ \text{если } \delta_h(t)\Delta\delta_h(t) < 0;$$
$$\sigma(t) = -\delta_h(t-h)/\Delta\delta_h(t-h), \quad \vartheta(t) = -1, \ \text{если } \delta_h(t-h)\Delta\delta_h(t-h) < 0, \quad t \in T_{\text{н}0};$$
$$\delta_h(t) = -\widetilde{\nu}' f_h(t), \quad \Delta\delta_h(t) = -\Delta\widetilde{\nu}' f_h(t), \quad f_h(t) = \int_t^{t+h} G(\tau)b(\tau)d\tau,$$
$$\delta_h(t+h) = -\widetilde{\nu}' f_h(t+h), \quad \Delta\delta_h(t+h) = -\Delta\widetilde{\nu}' f_h(t+h), \quad f_h(t+h) = \int_{t+h}^{t+2h} G(\tau)b(\tau)d\tau,$$
$$\delta_h(t-h) = -\widetilde{\nu}' f_h(t-h), \quad \Delta\delta_h(t-h) = -\Delta\widetilde{\nu}' f_h(t-h), \quad f_h(t-h) = \int_{t-h}^{t} G(\tau)b(\tau)d\tau,$$

$\widetilde{\nu} = (\widetilde{\nu}_i, \ i \in I)$, $\widetilde{\nu}_i = \nu_i$, если $i \in I_{\text{оп}}$; $\widetilde{\nu}_i = 0$, если $i \notin I_{\text{оп}}$.

Таким образом, для вычисления чисел (20) достаточно взять в качестве начальных состояний $G(t)$ значения, хранящиеся в памяти ЭВМ, и проинтегрировать уравнение (9) на промежутке $[t, t+2h]$ или $[t-h, t]$.

Прежде чем перейти к выполнению "коротких" шагов, проведем "нулевой" шаг, на котором преобразуем хранящуюся в памяти ЭВМ информацию, считая, что сделан малый шаг $\sigma > 0$ вдоль направления $\Delta\nu$.

1. При $t_* < t_0 < t^* - h$, $\vartheta(t_0) = 1$ положим $d^{(1)} = d + (-1)^{s_0}\gamma f_h(t_0)$; $T^{(1)}_{\text{н}0} = T_{\text{н}0} \cup t_0 + h$; вместо значения $G(t_0)$ в память занесем $G(t_0 + h)$.
2. Если $t_* < t_0 \leq t^* - h$, $\vartheta(t_0) = -1$, то $d^{(1)} = d + (-1)^{s_0+1}\gamma f_h(t_0)$, $T^{(1)}_{\text{н}0} = T_{\text{н}0} \cup t_0$.
3. В случае $t_0 = t_*$, $\vartheta(t_0) = 1$ положим $d^{(1)} = d + \gamma f_h(t_0)$, $T^{(1)}_{\text{н}0} = T_{\text{н}0} \cup t_0 + h$, $\gamma^{(1)} = -\gamma$; $s^{*(1)} = s^* + 1$; перенумеруем точки множества $T_{\text{он}}$.
4. При $t_0 = t_*$, $\vartheta(t_0) = -1$ считаем $d^{(1)} = d - \gamma f_h(t_0)$, $T^{(1)}_{\text{н}0} = T_{\text{н}0}$. Случай интерпретируется как исчезновение опорного нуля через левую границу множества $T_h$.
5. Если $t_0 = t^* - h$, $\vartheta(t_0) = 1$, то положим $d^{(1)} = d + (-1)^{s_0}\gamma f_h(t_0)$, $T^{(1)}_{\text{н}0} = T_{\text{н}0}$; $s^{*(1)} = s^* - 1$, из памяти удалим значение $G(t_0)$. Случай трактуется как исчезновение опорного нуля через правую границу множества $T_h$.

Остальная информация для первого шага переписывается без изменений.

Предположим, что вдоль направления $\Delta\nu$ вычислен $\ell - 1$ "короткий" шаг $\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}, \ldots, \sigma^{(\ell-1)}$ и информация перед $\ell$-м "коротким" шагом имеет вид:

1) множества $T^{(\ell)}_{\text{н}0}$, $T^{(\ell)} = T^{(\ell)}_{\text{н}0} \cup t_* \cup t^*$,
2) числа $\sigma^{(\ell)}(t)$, $t \in T^{(\ell)}$, $\sigma^{(\ell)}_i$, $i \in I_{\text{оп}}$,
3) число $\gamma^{(\ell)}$,
4) вектор $d^{(\ell)}$,
5) значения $G(t)$, $t \in T^{(\ell)}_{\text{н}0} \cup t_0$,
6) число $s^{*(\ell)}$,
7) скорость изменения двойственного критерия качества $\eta^{(\ell)}$.

С целью упрощения выкладок предположим, что все числа $\sigma^{(\ell)}(t)$, $t \in T^{(\ell)}$; $\sigma_i^{(\ell)}$, $i \in I_{\text{оп}}$, различны за исключением, возможно, пары чисел $\sigma^{(\ell)}(t)$, $\sigma^{(\ell)}(t+h)$ при некоторых $t \in T_h \setminus (t^* - h)$. Случай совпадения других чисел в (20) рассмотрен в [16].

Исходя из полученной информации, подсчитаем $\ell$-й "короткий" шаг

$$\sigma^{(\ell)} = \min\{\sigma(t^{(\ell)}), \sigma_{i^{(\ell)}}\}, \tag{21}$$

где $\sigma(t^{(\ell)}) = \min \sigma(t)$, $t \in T^{(\ell)}$; $\sigma_{i^{(\ell)}} = \min \sigma_i$, $i \in I_{\text{оп}}$.

Это позволит указать промежуток $[\sigma^{(\ell-1)}, \sigma^{(\ell)}]$, на котором двойственный критерий качества возрастает со скоростью $\eta^{(\ell)}$. В точке $\sigma = \sigma^{(\ell)}$ скорость изменения двойственного критерия качества вдоль $\Delta\nu$ убывает на

$$\Delta\eta^{(\ell)} = \begin{cases} 2|\Delta\delta_h(t^{(\ell)})|, & \text{если } \sigma^{(\ell)} = \sigma(t^{(\ell)}); \\ (g^*_{i^{(\ell)}}(\alpha) - g_{*i^{(\ell)}}(\alpha))|\Delta\nu_{i^{(\ell)}}|, & \text{если } \sigma^{(\ell)} = \sigma_{i^{(\ell)}}, \end{cases}$$

и в малой правосторонней окрестности точки $\sigma^{(\ell)}$ становится равной

$$\eta^{(\ell+1)} = \eta^{(\ell)} - \Delta\eta^{(\ell)} < \eta^{(\ell)}.$$

При $\eta^{(\ell+1)} \le 0$ положим $\sigma^* = \sigma^{(\ell)}$ и перейдем к заключительному шагу. В противном случае приступим к формированию информации 1)–7) для осуществления следующего "короткого" шага.

Будем различать две возможности: а) $\sigma^{(\ell)} = \sigma(t^{(\ell)})$, б) $\sigma^{(\ell)} = \sigma_{i^{(\ell)}}$.

а) Хранящуюся в памяти информацию преобразуем в зависимости от следующих ситуаций.

A. Пусть $\sigma(t^{(\ell)})$ — единственное число, удовлетворяющее (21), $s^{(\ell)}$ — индекс момента $t^{(\ell)}$ в $T_{\text{он}}$.

- A.1. Если $t^{(\ell)} \in T_{\text{н}0}^{(\ell)}$ и $\vartheta(t^{(\ell)}) = 1$, то положим $T_{\text{н}0}^{(\ell+1)} = (T_{\text{н}0}^{(\ell)} \setminus t^{(\ell)}) \cup t^{(\ell)} + h$; $d^{(\ell+1)} = d^{(\ell)} + 2(-1)^{s^{(\ell)}}\gamma^{(\ell)} f_h(t^{(\ell)})$; вычислим новый шаг $\sigma(t^{(\ell)} + h) = -\delta_h(t^{(\ell)} + h)/\Delta\delta_h(t^{(\ell)} + h)$. Вместо значения $G(t^{(\ell)})$ в память ЭВМ занесем $G(t^{(\ell)} + h)$.
- A.2. Если $t^{(\ell)} \in T_{\text{н}0}^{(\ell)}$ и $\vartheta(t^{(\ell)}) = -1$, то положим $T_{\text{н}0}^{(\ell+1)} = (T_{\text{н}0}^{(\ell)} \setminus t^{(\ell)}) \cup t^{(\ell)} - h$; $d^{(\ell+1)} = d^{(\ell)} - 2(-1)^{s^{(\ell)}}\gamma^{(\ell)} f_h(t^{(\ell)} - h)$; вычислим шаг $\sigma(t^{(\ell)} - h) = -\delta_h(t^{(\ell)} - 2h)/\Delta\delta_h(t^{(\ell)} - 2h)$. Вместо значения $G(t^{(\ell)})$ в память ЭВМ занесем $G(t^{(\ell)} - h)$.
- A.3. Если $t^{(\ell)} = t_*$, то $T_{\text{н}0}^{(\ell+1)} = T_{\text{н}0}^{(\ell)} \cup t^{(\ell)} + h$ (в $T_{\text{н}0}^{(\ell)}$ занесем новый неопорный нуль $t^{(\ell)} + h$); положим $d^{(\ell+1)} = d^{(\ell)} + 2\gamma^{(\ell)} f_h(t^{(\ell)})$, $\gamma^{(\ell+1)} = -\gamma^{(\ell)}$, $\vartheta(t^{(\ell)}) = 1$, $s^{*(\ell+1)} = s^{*(\ell)} + 1$, перенумеруем точки множества $T_{\text{он}}$. Занесем в память ЭВМ $G(t^{(\ell)} + h)$ и найдем новый шаг $\sigma(t^{(\ell)}+h) = -\delta_h(t^{(\ell)}+h)/\Delta\delta_h(t^{(\ell)}+h)$. Эта ситуация трактуется как появление нового нуля функции (18) на левом конце $T_h$.
- A.4. Если $t^{(\ell)} = t^*$, то $T_{\text{н}0}^{(\ell+1)} = T_{\text{н}0}^{(\ell)} \cup t^{(\ell)} - h$ (в $T_{\text{н}0}^{(\ell)}$ занесем новый неопорный нуль $t^{(\ell)} - h$); положим $d^{(\ell+1)} = d^{(\ell)} + 2(-1)^{s^{*(\ell)}}\gamma^{(\ell)} f_h(t^{(\ell)} - h)$, $\vartheta(t^{(\ell)}) = -1$, $s^{*(\ell+1)} = s^{*(\ell)} + 1$, перенумеруем точки множества $T_{\text{он}}$. Занесем в память ЭВМ $G(t^{(\ell)} - h)$ и найдем шаг $\sigma(t^{(\ell)} - h) = -\delta_h(t^{(\ell)} - 2h)/\Delta\delta_h(t^{(\ell)} - 2h)$. Ситуация трактуется как возникновение нового нуля функции (18) на правом конце $T_h$.

B. Пусть шаг в формуле (21) достигся в два момента $t^{(\ell)}$ и $t^{(\ell)} + h$: $\sigma(t^{(\ell)}) = \sigma(t^{(\ell)} + h)$.

- B.1. Если $t^{(\ell)} = t_*$, то $T_{\text{н}0}^{(\ell+1)} = T_{\text{н}0}^{(\ell)} \setminus t^{(\ell)} + h$ (из множества $T_{\text{н}0}^{(\ell)}$ удалим точку $t^{(\ell)} + h$); положим $d^{(\ell+1)} = d^{(\ell)} + 2\gamma^{(\ell)} f_h(t^{(\ell)})$, $\gamma^{(\ell+1)} = -\gamma^{(\ell)}$, $\sigma(t^{(\ell)}) = \infty$, $s^{*(\ell+1)} = s^{*(\ell)} - 1$, перенумеруем точки множества $T_{\text{он}}$. Из памяти ЭВМ удалим значение $G(t^{(\ell)} + h)$. В этом случае нуль $t^{(\ell)} + h$ переместится в точку $t_*$, если $t_* \notin T_{\text{оп}}$, или в точку $t_* + h$, если $t_* \in T_{\text{оп}}$. При $\sigma > \sigma^{(\ell)}$ эта ситуация трактуется как исчезновение нуля $t^{(\ell)} + h$ через левую границу $T_h$.
- B.2. Если $t^{(\ell)} + h = t^*$, то $T_{\text{н}0}^{(\ell+1)} = T_{\text{н}0}^{(\ell)} \setminus t^{(\ell)}$ (из $T_{\text{н}0}^{(\ell)}$ удалим точку $t^{(\ell)}$); положим $d^{(\ell+1)} = d^{(\ell)} + 2(-1)^{s^{*(\ell)}}\gamma^{(\ell)} f_h(t^{(\ell)})$; $\sigma(t^{(\ell)} + h) = \infty$; $s^{*(\ell+1)} = s^{*(\ell)} - 1$, перенумеруем точки множества $T_{\text{он}}$. Из памяти ЭВМ удалим $G(t^{(\ell)})$. При $\sigma > \sigma^{(\ell)}$ ситуация трактуется как исчезновение нуля $t^{(\ell)}$ через правую границу множества $T_h$.

B.3. Если $t^{(\ell)}, t^{(\ell)}+h \in T^{(\ell)}_{\text{н}0}$, то положим $T^{(\ell+1)}_{\text{н}0} = T^{(\ell)}_{\text{н}0} \setminus \{t^{(\ell)},\ t^{(\ell)}+h\}$, $d^{(\ell+1)} = d^{(\ell)} + 2(-1)^{s^{(\ell)}}\gamma^{(\ell)} f_h(t^{(\ell)})$, $s^{*(\ell+1)} = s^{*(\ell)} - 2$, перенумеруем точки множества $T_{\text{он}}$. Из памяти удалим $G(t^{(\ell)})$, $G(t^{(\ell)}+h)$. Эта ситуация трактуется как слипание и исчезновение двух нулей в точке $t^{(\ell)}$ при $\sigma > \sigma^{(\ell)}$.

C. Если реализовались условия случая A и либо 1) $t^{(\ell)}+h \in T_{\text{оп}}$ и $\vartheta(t^{(\ell)}) = 1$, либо 2) $t^{(\ell)}-2h \in T_{\text{оп}}$ и $\vartheta(t^{(\ell)}) = -1$, то ситуацию трактуем как переход подвижного нуля через опорный.

C.1. Положим $T^{(\ell+1)}_{\text{н}0} = (T^{(\ell)}_{\text{н}0} \setminus t^{(\ell)}) \cup t^{(\ell)} + 2h$, $d^{(\ell+1)} = d^{(\ell)} + 2(-1)^{s^{(\ell)}}\gamma^{(\ell)} f_h(t^{(\ell)})$, вычислим новый шаг $\sigma(t^{(\ell)} + 2h) = -\delta_h(t^{(\ell)} + 2h)/\Delta\delta_h(t^{(\ell)} + 2h)$. Вместо значения $G(t^{(\ell)})$ в память ЭВМ занесем $G(t^{(\ell)} + 2h)$. Перенумеруем точки множества $T_{\text{он}}$.

C.2. Положим $T^{(\ell+1)}_{\text{н}0} = (T^{(\ell)}_{\text{н}0} \setminus t^{(\ell)}) \cup t^{(\ell)} - 2h$, $d^{(\ell+1)} = d^{(\ell)} - 2(-1)^{s^{(\ell)}}\gamma^{(\ell)} f_h(t^{(\ell)} - h)$, вычислим новый шаг $\sigma(t^{(\ell)} - 2h) = -\delta_h(t^{(\ell)} - 3h)/\Delta\delta_h(t^{(\ell)} - 3h)$. Вместо значения $G(t^{(\ell)})$ в память ЭВМ занесем $G(t^{(\ell)} - 2h)$. Перенумеруем точки множества $T_{\text{он}}$.

Остальная информация переписывается для $(\ell+1)$-го шага без изменений.

*Заключительный шаг* (а). Информация для новой итерации преобразится следующим образом.

A.1. $\overline{T}_{\text{оп}} = (T_{\text{оп}} \setminus t_0) \cup t^{(\ell)}$, $\overline{T}_{\text{н}0} = T^{(\ell)}_{\text{н}0} \setminus t^{(\ell)}$, $\overline{d} = d^{(\ell)} + (-1)^{s^{(\ell)}}\gamma^{(\ell)} f_h(t^{(\ell)})$.

A.2. $\overline{T}_{\text{оп}} = (T_{\text{оп}} \setminus t_0) \cup t^{(\ell)} - h$, $\overline{T}_{\text{н}0} = T^{(\ell)}_{\text{н}0} \setminus t^{(\ell)}$, $\overline{d} = d^{(\ell)} - (-1)^{s^{(\ell)}}\gamma^{(\ell)} f_h(t^{(\ell)} - h)$. Вместо значения $G(t^{(\ell)})$ в память ЭВМ занесем $G(t^{(\ell)} - h)$.

A.3. $\overline{T}_{\text{оп}} = (T_{\text{оп}} \setminus t_0) \cup t^{(\ell)}$, $\overline{T}_{\text{н}0} = T^{(\ell)}_{\text{н}0}$, $\overline{d} = d^{(\ell)} + \gamma^{(\ell)} f_h(t^{(\ell)})$.

A.4. $\overline{T}_{\text{оп}} = (T_{\text{оп}} \setminus t_0) \cup t^{(\ell)} - h$, $\overline{T}_{\text{н}0} = T^{(\ell)}_{\text{н}0}$, $\overline{d} = d^{(\ell)} + (-1)^{s^{*(\ell)}}\gamma^{(\ell)} f_h(t^{(\ell)} - h)$, $\overline{s}^* = s^{*(\ell)} + 1$. Перенумеруем точки множества $T_{\text{он}}$. Запомним $G(t^{(\ell)} - h)$.

B.1. $\overline{T}_{\text{оп}} = (T_{\text{оп}} \setminus t_0) \cup t^{(\ell)}$, $\overline{T}_{\text{н}0} = T^{(\ell)}_{\text{н}0} \setminus t^{(\ell)} + h$, $\overline{d} = d^{(\ell)} + \gamma^{(\ell)} f_h(t^{(\ell)})$, $\overline{\gamma} = -\gamma^{(\ell)}$, $\overline{s}^* = s^{*(\ell)} - 1$. Перенумеруем точки множества $T_{\text{он}}$. Из памяти удалим значение $G(t^{(\ell)} + h)$.

B.2. $\overline{T}_{\text{оп}} = (T_{\text{оп}} \setminus t_0) \cup t^{(\ell)}$, $\overline{T}_{\text{н}0} = T^{(\ell)}_{\text{н}0} \setminus t^{(\ell)}$, $\overline{d} = d^{(\ell)} + (-1)^{s^{*(\ell)}}\gamma^{(\ell)} f_h(t^{(\ell)})$.

Новая опора имеет вид $\overline{K}_{\text{оп}} = \{I_{\text{оп}}, \overline{T}_{\text{оп}}\}$. Заменив в матрице $P_{|\text{оп}|}$ столбец $f_h(t_0)$ на $f_h(t^{(\ell)} - h)$ в случаях A.2 или A.4 либо на столбец $f_h(t^{(\ell)})$ в остальных случаях, получим $\overline{P}_{|\text{оп}|}$.

**Замечание.** Если $t_* \in T_{\text{оп}}$, то в случаях A.3 и B.1 вместо точки $t_*$ рассмотрим $t_* + h$ и подсчитаем $\sigma(t_* + h) = -\delta_h(t_* + h)/\Delta\delta_h(t_* + h)$. Аналогично, если $t^* - h \in T_{\text{оп}}$, то вместо точки $t^*$ рассмотрим $t^* - h$ и найдем $\sigma(t^* - h) = -\delta_h(t^* - 2h)/\Delta\delta_h(t^* - 2h)$. При формировании множества $T^{(\ell)}$ (см. подготовку информации 1) – 7) перед $\ell$-м шагом) произведем соответствующие замены.

Выше ради упрощения изложения был опущен случай, когда в процессе движения вдоль направления $\Delta\nu$ возникают новые нули внутри множества $T_h$. Для исследования этого случая нужно дополнить информацию (20) совокупностью моментов $t$ и чисел $\sigma(t)$: а) точки $t \in T_h$ — стационарные точки варьированного коуправления (17), т. е. при некотором $\sigma > 0$ выполняется 1) $\delta_h(t, \sigma) > 0$, $\delta_h(t-h, \sigma) > \delta_h(t, \sigma)$, $\delta_h(t+h, \sigma) > \delta_h(t, \sigma)$ или 2) $\delta_h(t, \sigma) < 0$, $\delta_h(t-h, \sigma) < \delta_h(t, \sigma)$, $\delta_h(t+h, \sigma) < \delta_h(t, \sigma)$; б) числа $\sigma(t)$ характеризуют величину шагов вдоль $\Delta\nu$, при которых варьированное коуправление в момент $t$ обращается в нуль: $\delta_h(t, \sigma(t)) = 0$. Следя за движением и положением стационарных точек варьированного коуправления, зафиксируем появление нового "внутреннего" нуля коуправления. В сложных ситуациях могут появиться и новые стационарные точки. Они обнаруживаются с помощью стационарных точек первой производной коуправления. Объем дополнительной информации зависит от сложности конкретной задачи. Преобразование дополнительной информации осуществляется по аналогии с описанным выше для стандартного случая.

б) Когда $\sigma^{(\ell)} = \sigma_{i^{(\ell)}}$, то $\sigma_{i^{(\ell)}} = \infty$. Затем перейдем к $(\ell+1)$-му шагу.

*Заключительный шаг* (б). Сформируем информацию для следующего шага: $\overline{T}_{\text{оп}} = T_{\text{оп}} \setminus t_0$, $\overline{I}_{\text{оп}} = I_{\text{оп}} \setminus i^{(\ell)}$, $\overline{K}_{\text{оп}} = \{\overline{I}_{\text{оп}}, \overline{T}_{\text{оп}}\}$, $\overline{T}_{\text{н}0} = T^{(\ell)}_{\text{н}}$, $\overline{d} = d^{(\ell)}$, $\overline{\gamma} = \gamma^{(\ell)}$, $\overline{s}^* = s^{*(\ell)}$, $G(t)$, $t \in \overline{T}_{\text{н}0}$. Матрицу $\overline{P}_{|\text{оп}|}$ получим, удалив из $P_{|\text{оп}|}$ столбец $f_h(t_0)$.

Согласно [16] обязательно найдется такое $\ell_0$, что $\eta^{(\ell_0)} > 0$, $\eta^{(\ell_0+1)} \leq 0$.

Ситуация 1) ($\rho_0 = \rho(t_0)$) на с. 9 исследована до конца.

2) ($\rho_0 = \rho_{i_0}$). Направление изменения вектора потенциалов $\Delta\nu$ найдем из уравнения

$$-P'_{\text{оп}}\Delta\nu = (f_{h\,i_0}(t),\, t \in T_{\text{оп}};\, f_{l\,i_0})\mu$$
$$(\mu = 1,\ \text{если}\ \zeta_{i_0}(t^*) < g_{*i_0}(\alpha);\quad \mu = -1,\ \text{если}\ \zeta_{i_0}(t^*) > g^*_{i_0}(\alpha)).$$

Направление изменения коуправления построим по формуле (17). Начальная скорость изменения двойственного критерия качества вдоль $\Delta\nu$ теперь равна $\eta^{(1)} = \rho_{i_0} > 0$.

Операции по вычислению “длинного” шага аналогичны описанным для ситуации 1), но “нулевой” шаг здесь не проводится. Новая опора строится по следующим правилам.

а) ($\sigma^* = \sigma(t^{(\ell_0)})$) $\overline{K}_{\text{оп}} = \{\overline{I}_{\text{оп}}, \overline{T}_{\text{оп}}\}$, $\overline{I}_{\text{оп}} = I_{\text{оп}} \cup i_0$. В случаях А.2 или А.4 $\overline{T}_{\text{оп}} = T_{\text{оп}} \cup t^{(\ell_0)} - h$, в матрицу $\overline{P}_{|\text{оп}|}$ добавим новый столбец $f_h(t^{(\ell_0)} - h)$. В остальных случаях $\overline{T}_{\text{оп}} = T_{\text{оп}} \cup t^{(\ell_0)}$, в матрицу $\overline{P}_{|\text{оп}|}$ добавим новый столбец $f_h(t^{(\ell_0)})$. Правила построения множества $\overline{T}_{\text{н}0}$ аналогичны случаю 1а).

б) ($\sigma^* = \sigma_{i^{(\ell_0)}}$) $\overline{K}_{\text{оп}} = \{\overline{I}_{\text{оп}}, T_{\text{оп}}\}$, $\overline{I}_{\text{оп}} = (I_{\text{оп}} \setminus i^{(\ell_0)}) \cup i_0$, $\overline{T}_{\text{н}0} = T^{(\ell_0)}_{\text{н}0}$, $\overline{P}_{|\text{оп}|} = P_{|\text{оп}|}$.

Двойственный метод завершит работу построением оптимальной опоры и сопровождающего ее псевдоуправления, которое будет оптимальной программой линейной задачи (5).

## 4. Доводка

Пусть $\widetilde{u}(t)$, $t \in T$, — оптимальная программа вспомогательной задачи (5), удовлетворяющая условию перехода к процедуре доводки; $\widetilde{t}_1, \widetilde{t}_2, \ldots, \widetilde{t}_{p-1}$ — точки переключения программы. Согласно [17] для оптимальности программы задачи (1) необходимо и достаточно, чтобы она имела вид

$$u(t) = -\operatorname{sign}\delta(t), \quad t \in T, \tag{22}$$

где $\delta(t) = \psi'(t)b(t)$, $t \in T$, — коуправление, $\psi(t)$, $t \in T$, — котраектория — решение сопряженного уравнения (11) с начальным условием $\psi(t^*) = \partial\varphi(x(t^*))/\partial x$.

Отсюда следует, что моменты переключения $t^0_1, t^0_2, \ldots, t^0_{p-1}$ оптимальной программы являются решением уравнений

$$\delta(t_j) = 0, \quad j = \overline{1, p-1}. \tag{23}$$

В подробной записи уравнения (23) имеют вид $\psi'(t^*)F(t^*, t_j)b(t_j) = 0$, $j = \overline{1, p-1}$.

Назовем систему уравнений (23) уравнениями доводки. При $\dot{\delta}(t_j) \neq 0$, $j = \overline{1, p-1}$, матрица Якоби системы (23) неособая. В этом случае уравнения доводки можно решить методом Ньютона. В качестве начального приближения возьмем моменты $\widetilde{t}_j$, $j = \overline{1, p-1}$, полученные после решения вспомогательной задачи (5). Если число $\varepsilon > 0$ выбрано достаточно малым, то метод Ньютона будет сходиться с квадратичной скоростью. Быстрая реализация метода Ньютона для систем вида (23) описана в [17]. В результате решения уравнений (23) будет построена оптимальная программа задачи (1) в классе кусочно-непрерывных функций.

Для приложений, в которых управляющие воздействия реализуются с помощью устройств дискретного действия, большую роль играют оптимальные программы в классе дискретных функций. Такие программы можно построить с помощью дискретной процедуры доводки. В классе дискретных программ критерий оптимальности (22) примет вид

$$u_h(t) = -\operatorname{sign}\delta_h(t), \quad t \in T_h, \tag{24}$$

где $\delta_h(t) = \int\limits_t^{t+h} \delta(\tau)d\tau$, $\delta(t) = \psi'_h(t)b(t)$; $\psi_h(t)$, $t \in T$, — решение уравнения (11) с начальным условием $\psi_h(t^*) = \partial\varphi(x_h(t^*))/\partial x$; $x_h(t)$, $t \in T$, — траектория, порожденная дискретной программой (24).

Используя этот критерий, можно записать дискретный аналог уравнений доводки (23). В отличие от непрерывного случая неизвестными в этих уравнениях будут значения оптимальной программы в моменты переключения.

В случае малых периодов квантования $h$ при построении оптимальных дискретных программ можно ограничиться процедурой преддоводки, которая состоит в следующем. По оптимальной кусочно-непрерывной программе $u^0(t)$, $t \in T$, найдем интервалы $[t_i, t_i + h]$, $i = \overline{1, p-1}$, содержащие точки переключения программы $t_i^0$, $i = \overline{1, p-1}$. Положим $u_h^0(t) = u^0(t)$, $t \in T \setminus \bigcup_{i=1}^{p-1} [t_i, t_i + h[$. Значения $u^0(t)$, $t \in [t_i, t_i + h[$, $i = \overline{1, p-1}$, заменим на $u_h^0(t_i) = 2u^0(t_i)(t_i^0 - t_i - h/2)$, $i = \overline{1, p-1}$.

## 5. Синтез оптимальных управлений типа обратной связи

Как известно, оптимальные программы позволяют лишь выявлять потенциальные возможности систем управления. В реальных процессах используются, как правило, управления типа обратной связи. Определим ОУ типа (дискретной) обратной связи (с периодом реализации $h_0 = kh$, $k \geq 1$). С этой целью погрузим задачу (1) в семейство задач

$$\varphi(x(t^*)) \to \min, \quad \dot{x} = A(t)x + b(t)u, \quad x(\tau) = z, \quad |u(t)| \leq 1, \quad t \in T(\tau) = [\tau, t^*], \tag{25}$$

зависящее от скаляра $\tau \in T_{h_0}$ и $n$-вектора $z$.

Пусть $u^0(t \mid \tau, z)$, $t \in T(\tau)$, — оптимальная программа задачи (25) для позиции $(\tau, z)$. Следуя теории оптимальных процессов, функцию

$$u^0(\tau, z) = u^0(\tau \mid \tau, z), \quad \tau \in T_{h_0}, \quad z \in R^n, \tag{26}$$

назовем ОУ типа (дискретной) обратной связи (позиционным решением задачи (1)), построение функции (26) — синтезом оптимальной обратной связи (синтезом оптимальной системы).

Использование обратных связей (26) предполагает, что в процессе управления состояния системы (1) измеряются в дискретные моменты $t \in T_{h_0}$ и по этой информации вырабатываются управляющие воздействия.

Замену в (1) управления $u$ на функцию (26) называют замыканием системы управления. Траектория замкнутой системы

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)u^0(t, x) + w(t), \; x(t_*) = x_0, \tag{27}$$

при постоянно действующем кусочно-непрерывном возмущении $w(t)$, $t \in T$, представляет решение уравнения

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)u(t) + w(t), \quad x(t_*) = x_0,$$
$$u(t) = u^0(\tau, x(\tau)), \quad t \in [\tau, \tau + h_0[, \quad \tau = t_* + sh_0, \quad s = \overline{0, N-1}.$$

Будем считать, что уравнение (27) описывает поведение физического прототипа математической модели (1). В этом случае функция $w(t)$, $t \in T$, содержит неточности математического моделирования и постоянно действующие возмущения.

Пусть по ходу некоторого конкретного процесса управления реализуется возмущение $w^*(t)$, $t \in T$. Ему будет соответствовать траектория $x^*(t)$, $t \in T$, замкнутой системы (27), удовлетворяющая тождеству

$$\dot{x}^*(t) \equiv A(t)x^*(t) + b(t)u^0(t, x^*(t)) + w^*(t), \quad t \in T. \tag{28}$$

Из тождества (28) видно, что в процессе управления обратная связь (26) используется не полностью (не для всех $z \in R^n$). Нужны лишь ее значения $u^*(t) = u^0(t, x^*(t))$, $t \in T_{h_0}$, вдоль изолированной траектории $x^*(t)$, $t \in T$. При этом нет необходимости знать функцию $u^*(t)$, $t \in T_{h_0}$, заранее, достаточно уметь вычислять текущие значения $u^*(\tau)$ по мере поступления измерений текущих состояний $x^*(\tau)$. Функцию $u^*(t)$, $t \in T$, назовем реализацией оптимальной обратной связи в конкретном процессе управления.

Будем говорить, что построение $u^*(t)$, $t \in T$, осуществляется в режиме реального времени, если в каждой текущей позиции $(\tau, x^*(\tau))$ время $s(\tau)$ вычисления значения $u^*(\tau) = u^0(\tau, x^*(\tau))$ не превосходит $h_0 > 0$. Устройство, способное выполнять такую работу, называется оптимальным регулятором.

Алгоритм работы оптимального регулятора базируется на описанном выше двойственном методе.

До начала процесса управления оптимальный регулятор вычисляет оптимальную программу $u^0(t \mid t_*, x_0)$, $t \in T$, для начальной позиции $(t_*, x_0)$. Время на выполнение этой работы не имеет никакого значения. Для дальнейшего процесса управления запоминается следующая информация: 1) моменты переключения $t_i^0 = t_i^0(t_*, x_0)$, $i = \overline{1, p(t_*) - 1}$; 2) оптимальное значение $\alpha^0 = \alpha^0(t_*, x_0)$ критерия качества задачи (1); 3) оптимальная опора $K^0_{\text{оп}}(t_*, x_0)$ линейной задачи (5) для $\alpha = \alpha^0(t_*, x_0)$; 4) совокупность векторов аппроксимации $r_i$, $i \in I(t_*)$, использованная при построении оптимальной программы последней линейной задачи; 5) начальный участок оптимальной программы $u^0(t \mid t_*, x_0)$, $t \in [t_*, t_* + 2h_0]$.

Процесс управления стартует в момент $t_*$, когда регулятор начинает подавать на вход объекта управления управляющее воздействие $u^*(t) = u^0(t|t_*, x_0)$, $t \geq t_*$.

Предположим, что процесс управления проведен на промежутке времени $[t_*, \tau[$, в результате которого выработано управляющее воздействие $u^*(t)$, $t \in [t_*, \tau[$. Пусть под действием этого управления и реализовавшегося возмущения $w^*(t)$, $t \in [t_*, \tau]$, объект управления в момент $\tau$ оказался в состоянии $x^*(\tau)$, информация о котором поступила в регулятор. Кроме этой информации оптимальный регулятор хранит в памяти данные, полученные в предыдущий момент $\tau - h_0$: 1) точки переключения $t_i^0(\tau - h_0, x^*(\tau - h_0))$, $i = \overline{1, p(\tau - h_0) - 1}$; 2) оптимальное значение $\alpha^0(\tau - h_0, x^*(\tau - h_0))$ критерия качества задачи (1); 3) оптимальную опору $K^0_{\text{оп}}(\tau - h_0, x^*(\tau - h_0))$ линейной задачи (5) при $\alpha = \alpha^0(\tau - h_0, x^*(\tau - h_0))$; 4) совокупность векторов аппроксимации $r_i$, $i \in I(\tau - h_0)$, использованную при решении последней линейной задачи. Имея эту информацию, оптимальный регулятор начинает параллельно осуществлять следующие операции.

1. Процедуру доводки с начальными значениями точек переключения $t_i^0(\tau - h_0, x^*(\tau - h_0))$, $i = \overline{1, p(\tau - h_0) - 1}$, и начальным состоянием $x^*(\tau)$.

2. Решение линейной задачи (5) с $\alpha = \alpha^0(\tau - h_0, x^*(\tau - h_0)) - \lambda$, начальной опорой $K^0_{\text{оп}}(\tau - h_0, x^*(\tau - h_0))$ и векторами аппроксимации $r_i$, $i \in I(\tau - h_0)$ ($\lambda > 0$ — параметр метода).

3. Решение линейной задачи (5) с $\alpha = \alpha^0(\tau - h_0, x^*(\tau - h_0)) + \lambda$, начальной опорой $K^0_{\text{оп}}(\tau - h_0, x^*(\tau - h_0))$ и векторами аппроксимации $r_i$, $i \in I(\tau - h_0)$.

Если процедура доводки сходится, то по ее результатам информация 1)–4), использованная для момента $\tau$, обновляется для момента $\tau + h_0$. В противном случае, решая линейные задачи 2, 3, добиваемся такой точности аппроксимации, при которой станут выполняться условия перехода к процедуре доводки и сходимость последней.

Управление $u^0(t \mid \tau, x^*(\tau))$, $t \in [\tau, \tau + 2h_0]$, подается на вход объекта управления, начиная с момента $\tau + s^*(\tau)$, где $s^*(\tau)$ — время, потраченное на осуществление операций 1, 2, 3. Как показано в [15], [17], описанные операции по реализации оптимальной обратной связи могут быть с помощью существующих микропроцессоров осуществлены очень быстро. Поэтому предложенные методы можно применять для оптимального управления динамическими системами достаточно высокого порядка. При этом задержки $s^*(\tau)$, $\tau \in T_{h_0}$, которые вызваны выполнением указанных выше операций, не оказывают существенного влияния на качество переходных процессов [18].

## Литература

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. *Математическая теория оптимальных процессов.* – М.: Наука, 1969. – 384 с.
2. Габасов Р., Кириллова Ф.М. *Оптимизация линейных систем. Методы функционального анализа.* – Минск: Изд-во Белорусск. ун-та, 1973. – 246 с.

3. Morari M., Jay H. Lee. *Model predictive control: past, present and future* // Comput. & Chemical Engineer. – 1999. – № 23(4/5). – P. 667–682.
4. Qin S.J., Badgwell T.A. *An overview of industrial model predective control technology* // Proc. Fifth International Conference on Chemical Process Control — CPC V / Eds. J.K. Kantor, C.E. Garcia, and B. Carnohan. American Institute of Chemical Engineers, 1996. – P. 232–256.
5. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Костюкова О.И. *Построение оптимальных управлений типа обратной связи в линейной задаче* // ДАН СССР. – 1991. – Т. 320. – № 6. – С. 1294–1299.
6. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Костюкова О.И. *Оптимизация линейной системы управления в режиме реального времени* // Изв. РАН. Сер. техн. кибернет. – 1992. – № 4. – С. 3–19.
7. Gabasov R., Kirillova F.M., Balashevich N.V. *On the synthesis problem for optimal control systems* // SIAM Journal on Control and Optimization. – 2001. – V. 39. – № 4. – P. 1008–1042.
8. Габасов Р., Лубочкин А.В. *Синтез регулятора для одной линейно-квадратичной задачи оптимального управления* // Автоматика и телемеханика. – 1997. – № 9. – С. 3–14.
9. Габасов Р., Дмитрук Н.М., Кириллова Ф.М. *Оптимизация многомерных систем управления с параллелепипедными ограничениями* // Автоматика и телемеханика. – 2002. – № 3. – С. 3–26.
10. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Костюкова О.И. *К методам стабилизации динамических систем* // Изв. РАН. Сер. техн. кибернет. – 1994. – № 3. – С. 67–77.
11. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Ружицкая Е.А. *Стабилизация перевернутого маятника* // Докл. АН Беларуси. – 2000. – Т. 44. – № 2. – С. 9–12.
12. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Ружицкая Е.А. *Демпфирование и стабилизация маятника при больших начальных возмущениях* // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 2001. – № 1. – С. 29–38.
13. Габасов Р., Лубочкин А.В. *Стабилизация линейных динамических систем оптимальными управлениями линейно-квадратичных задач* // ПММ. – 1998. – Т. 62. – Вып. 4. – С. 556–565.
14. Габасов Р., Кириллова Ф.М. *Конструктивные методы оптимизации.* Ч. 2. *Задачи управления.* – Минск: Изд-во Университетское, 1984. – 207 с.
15. Балашевич Н.В., Габасов Р., Кириллова Ф.М. *Численные методы программной и позиционной оптимизации линейных систем управления* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 2000. – Т. 40. – № 6. – С. 838–859.
16. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Тятюшкин А.И. *Конструктивные методы оптимизации.* Ч. 1. *Линейные задачи.* – Минск: Изд-во Университетское, 1984. – 124 с.
17. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Костюкова О.И., Ракецкий В.М. *Конструктивные методы оптимизации.* Ч. 4. *Выпуклые задачи.* – Минск: Изд-во Университетское, 1987. – 223 с.
18. Балашевич Н.В., Габасов Р., Кириллова Ф.М. *Алгоритмы программной и позиционной оптимизации линейных систем управления с промежуточными фазовыми ограничениями* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 2001. – Т. 41. – № 10. – С. 1485–1504.



*Белорусский государственный университет*

*Институт математики Национальной Академии наук Беларуси*

*Брестский государственный технический университет*



*Поступила*
17.12.2003