ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 6 (433)

УДК 514.76

И.Г. ШАНДРА

О ГЕОМЕТРИИ КАСАТЕЛЬНОГО РАССЛОЕНИЯ НАД МНОГООБРАЗИЕМ С ПСЕВДОСВЯЗНОСТЬЮ И АНТИКВАТЕРНИОННЫХ f-СТРУКТУРАХ

Введение

Как известно (см. обзоры [1], [2], а также [3]–[5]), касательное расслоение над многообразием с аффинной связностью или римановой метрикой богато на примеры различных геометрических структур: аффинных связностей, аффинорных структур, римановых метрик. Данная работа посвящена изучению вырожденных аналогов этих структур, возникающих в касательном расслоении над многообразием с псевдосвязностью, особое место среди которых занимают антикватернионные f-структуры.

Данное исследование является продолжением работ автора [6], [7]. В § 1 приведены предварительные сведения из теории псевдосвязностей, § 2 посвящен изучению антикватернионных структур, а также присоединенных к ним изотранслированной π-структуры и канонических псевдосвязностей. В § 3 построены аналоги горизонтального лифта тензорных полей, полного и горизонтального поднятия псевдосвязностей, введено понятие τP-лифта тензорного поля, при помощи которого определены в касательном расслоении широкие классы f-структур и вырожденных метрик.

1. Предварительные сведения

1. Пусть M — дифференцируемое многообразие ($\dim M = n$), $f(M)$ — кольцо дифференцируемых функций на M, $T^p_q(M)$ — $f(M)$-модуль тензорных полей типа (p, q) на M (все объекты на M предполагаются достаточно гладкими).

Определение 1. Линейной псевдосвязностью на M называется пара (h, ∇), где h — аффинор на M, а $\nabla : T^1_0(M) \times T^1_0(M) \to T^1_0(M)$ — оператор, удовлетворяющий условиям [8], [9]

$$\text{а) } \nabla_Z(X + fY) = \nabla_Z X + f\nabla_Z Y + Z(f)hY, \quad \text{б) } \nabla_{Z+fY}X = \nabla_Z X + f\nabla_Y X \tag{1}$$

для любых $X, Y, Z \in T^1_0(M)$, $f \in f(M)$.

Векторное поле $\nabla_X Y$ называется ковариантной псевдопроизводной векторного поля Y вдоль векторного поля X. В случае, когда $h = \mathrm{id}$, ∇ определяет на M аффинную связность.

Линейная псевдосвязность (h, ∇) порождает ковариантную псевдопроизводную ковекторного поля ω по закону

$$(\nabla_X \omega)(Y) = X(\omega(hY)) - \omega(\nabla_X Y) \tag{2}$$

для любых $X, Y \in T_0^1(M)$, $\omega \in T_1^0(M)$, а также ковариантную производную тензорного поля T типа (p, q)

$$(\nabla_X T)(Y_1, \ldots, Y_q, \omega_1, \ldots, \omega_p) = X(T(hY_1, \ldots, hY_q, \omega_1 h, \ldots, \omega_p h)) - \\ - \sum_\alpha T(hY_1, \ldots, hY_{\alpha-1}, \nabla_X Y_\alpha, hY_{\alpha+1}, \ldots, hY_q, \omega_1 h, \ldots, \omega_p h) + \\ + \sum_\alpha T(hY_1, \ldots, hY_q, \omega_1 h, \ldots, \omega_{\alpha-1}, \nabla_X \omega_\alpha, \omega_{\alpha+1} h, \ldots, \omega_p h) \quad (3)$$

для любых $X, Y_1, \ldots, Y_q \in T_0^1(M)$, $\omega_1, \ldots, \omega_p \in T_1^0(M)$, $T \in T_q^p(M)$.

Определение 2. Тензоры

$$S(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - h[X, Y], \quad (4)$$
$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \quad (5)$$

называются соответственно тензором кручения и тензором кривизны псевдосвязности $(h; \nabla)$.

2. **Определение 3** [6]. Псевдосвязность $(h; \nabla)$ называется почти идемпотентной, если

$$h^2 = h. \quad (6)$$

Почти идемпотентная псевдосвязность называется

$$\text{идемпотентной, если} \quad h\nabla_X Y = \nabla_X Y \ (\forall X, Y), \quad (7)$$
$$\text{коидемпотентной, если} \quad \nabla_X(hY) = \nabla_X Y \ (\forall X, Y), \quad (8)$$

и вполне идемпотентной, если она коидемпотентна и идемпотентна одновременно.

Поскольку $(\nabla_X h)Y = \nabla_X(hY) - h\nabla_X Y$, из (7) и (8) для вполне идемпотентной псевдосвязности получаем следующее соотношение: $\nabla_X h = 0$. Пусть (h_j^i, Γ_{jk}^i) — компоненты псевдосвязности (h, ∇) в некотором репере $\{e_i\}$ на M $(h(e_j) = h_j^i e_i$, $\nabla_{e_k} e_j = \Gamma_{kj}^i e_i$, $i, j, k = 1, \ldots, n)$, тогда соотношения (7), (8) могут быть представлены в координатной форме

$$\text{а) } h_t^i \Gamma_{jk}^t = \Gamma_{jk}^i, \quad \text{б) } \Gamma_{jt}^i h_k^t + h_t^i e_j h_k^t = \Gamma_{jk}^i. \quad (9)$$

Формулы (9) можно записать одним соотношением

$$\Gamma_{jk}^i = h_t^i \Gamma_{jm}^t h_k^m + h_t e_j h_k^t. \quad (10)$$

Пусть $\{e_i\} = \{e_{i_1}, e_{i_1}\}$ — репер, адаптированный к идемпотенту h $(e_{i_1} \in \operatorname{Im} h$, $e_{i_2} \in \operatorname{Ker} h)$, $\{\theta^i\} = \{\theta^{i_1}, \theta^{i_2}\}$ — корепер, дуальный к $\{e_i\}$. (Здесь и ниже в этом параграфе $i_1, j_1, k_1, \ldots = 1, 2, \ldots, r$; $i_2, j_2, k_2, \ldots = r+1, r+2, \ldots, n$; $r = \operatorname{rk} h$.) Поскольку в адаптированном репере аффинор h имеет вид

$$h_j^i = \left(\begin{array}{c|c} \delta_{j_2}^{i_1} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right), \quad (11)$$

то, как легко убедиться, условия (12) равносильны тому, что в этом репере форма псевдосвязности $\omega_j^i = \Gamma_{kj}^i \theta^k$ приводится к виду

$$\omega_j^i = \left(\begin{array}{c|c} \omega_{j_1}^{i_1} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right). \quad (12)$$

3. Тензор кривизны и тензор кручения вполне идемпотентной псевдосвязности удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\text{а) } hS(X, Y) = S(X, Y), \quad \text{б) } hR(X, Y)Z = R(X, Y)hZ = R(X, Y)Z. \quad (13)$$

4. **Определение 4** [6]. Под HR-структурой ранга r на M будем понимать пару (g,h), где h — идемпотентный аффинор ранга r на M, а $g(X,Y)$ — симметрическое тензорное поле типа $(0,2)$, удовлетворяющее условиям

$$\text{а) } g(X,hY)=g(X,Y), \quad \text{б) } \operatorname{rk} g = r. \tag{14}$$

Каждая HR-структура (h,g) на M порождает единственную вполне идемпотентную псевдосвязность $(h;\nabla)$, называемую псевдосвязностью Леви-Чивита, однозначно определяемую из условий [6]

$$\text{а) } \nabla_X g = 0, \quad \text{б) } g(X,S(hY,Z)) = g(Y,S(hX,Z)). \tag{15}$$

2. Антикватернионные f-структуры

1. **Определение 5** [7]. Антикватернионной f-структурой ранга k на M называется пара аффиноров $(J;I)$, удовлетворяющих условиям

$$\text{а) } J^3=J, \quad \text{б) } I^3=I, \quad \text{в) } IJ+IJ=0, \quad \text{г) } I^2=J^2, \quad \text{д) } \operatorname{rk} J = k\ (=2r). \tag{16}$$

В случае, когда $\operatorname{rk} J = n$, пара $(J;I)$ определяет на M антикватернионную структуру.

Введем в рассмотрение аффиноры, играющие важную роль в исследовании антикватернионной f-структуры,

$$\begin{gathered}\text{а) } l=J^2, \quad \text{б) } m=\mathrm{id}-J^2, \quad \text{в) } \overset{1}{\underset{1}{P}} = 1/2(J+l), \quad \text{г) } \overset{0}{\underset{0}{P}} = 1/2(J-l),\\ \text{д) } \overset{1}{\underset{0}{P}} = I\overset{0}{\underset{0}{P}}, \quad \text{е) } \overset{0}{\underset{1}{P}} = I\overset{1}{\underset{1}{P}}, \quad \text{ж) } \overset{1}{\underset{1}{P}} + \overset{0}{\underset{0}{P}} = l.\end{gathered} \tag{17}$$

Нетрудно убедиться в справедливости соотношений

$$\text{а) } l^2=l; \quad \text{б) } m^2=m; \quad \text{в) } ml=lm=0; \quad \text{г) } lJ=Jl=J; \quad \text{д) } lI=Il=I, \tag{18}$$

$$\text{а) } \overset{\alpha}{\underset{\beta}{P}}l = l\overset{\alpha}{\underset{\beta}{P}} = \overset{\alpha}{\underset{\beta}{P}}; \quad \text{б) } \overset{\alpha}{\underset{\beta}{P}}\overset{\gamma}{\underset{\mu}{P}} = \delta^\gamma_\beta \overset{\alpha}{\underset{\mu}{P}} \quad (\forall \alpha,\beta,\gamma,\mu = 0,1). \tag{19}$$

В частности, из (19б) следует

$$(\overset{0}{\underset{0}{P}})^2 = \overset{0}{\underset{0}{P}}, \quad (\overset{1}{\underset{1}{P}})^2 = \overset{1}{\underset{1}{P}}, \quad (\overset{0}{\underset{1}{P}})^2 = 0, \quad (\overset{1}{\underset{0}{P}})^2 = 0.$$

Соотношения (19б) показывают, что аффиноры $(\overset{0}{\underset{0}{P}};\overset{1}{\underset{0}{P}};\overset{0}{\underset{1}{P}};\overset{1}{\underset{1}{P}})$ задают на M изотранслируемую π-структуру ранга $2r$ [7]. Справедливо и обратное, всякая изотранслируемая π-структура $(\overset{0}{\underset{0}{P}};\overset{1}{\underset{0}{P}};\overset{0}{\underset{1}{P}};\overset{1}{\underset{1}{P}})$ на M порождает антикватернионную f-структуру

$$J = \overset{1}{\underset{1}{P}} - \overset{0}{\underset{0}{P}}, \quad I = \overset{0}{\underset{1}{P}} + \overset{1}{\underset{0}{P}}. \tag{20}$$

Замечание. Из соотношений (19б) вытекает, что аффинор $\overset{1}{\underset{0}{P}}$ задает изоморфизм $\operatorname{Im}\overset{0}{\underset{0}{P}}$ на $\operatorname{Im}\overset{1}{\underset{1}{P}}$, аналогично $\overset{0}{\underset{1}{P}}$ задает изоморфизм $\operatorname{Im}\overset{1}{\underset{1}{P}}$ на $\operatorname{Im}\overset{0}{\underset{0}{P}}$.

Определение 6. Репер $\{e_I\} = \{\overset{0}{e}_i, \overset{1}{e}_i, e_t\}$, где $e_t \in \operatorname{Ker} l$, $\overset{0}{e}_i \in \operatorname{Im}\overset{0}{\underset{0}{P}}$, $\overset{1}{e}_i = \overset{1}{\underset{0}{P}}\overset{0}{e}_i$, будем называть адаптированным к адаптированной f-структуре (здесь $I=1,\dots,n$; $i=1,\dots,r$; $t=2r+1,\dots,n$).

Очевидно, что для этого репера имеют место соотношения $\overset{\beta}{\underset{\alpha}{P}}\overset{\alpha}{e}_i = \overset{\beta}{e}_i$ (по α нет суммирования). В этом репере структурные аффиноры приводятся к виду

$$\text{а) } m = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & E_{n-2r} \end{array}\right), \qquad \text{б) } \overset{1}{\underset{1}{P}} = \left(\begin{array}{c|c|c} E_r & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \tag{21}$$

$$\text{в) } \overset{0}{\underset{0}{P}} = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \qquad \text{г) } \overset{1}{\underset{0}{P}} = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \qquad \text{д) } \overset{0}{\underset{1}{P}} = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ \hline E_r & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

где E_r и E_{n-2r} — единичные матрицы порядка r и $n-2r$ соответственно.

2. **Определение 7.** Будем говорить, что вполне идемпотентная псевдосвязность $(l;\nabla)$ сохраняет антикватернионную f-структуру $(J;I)$, если

$$\nabla_X J = \nabla_X I = 0 \ (\forall X). \tag{22}$$

Лемма. *Вполне идемпотентная псевдосвязность (l,∇) сохраняет антикватернионную f-структуру тогда и только тогда, когда*

$$\nabla_X Y = \sum_{\alpha=0}^{1} \overset{\alpha}{\underset{\lambda(\alpha)}{P}} \nabla_X(\overset{\lambda(\alpha)}{\underset{\alpha}{P}} Y), \tag{23}$$

где $\lambda(\alpha)$ — произвольная функция, принимающая значения 0 и 1.

Доказательство. Условия (22) в силу (17) и (20) равносильны соотношениям

$$\nabla_X \overset{\alpha}{\underset{\beta}{P}} = 0 \ (\forall X, \ \forall \alpha, \beta = 0; 1), \quad \text{т. е.} \quad \nabla_X(\overset{\alpha}{\underset{\beta}{P}} Y) = \overset{\alpha}{\underset{\beta}{P}} \nabla_X Y \ (\forall X, Y). \tag{24}$$

Отсюда, принимая во внимание (7), (17ж) и (21б), имеем

$$\nabla_X Y = l \nabla_X Y = \sum_{\alpha} \overset{\alpha}{\underset{\alpha}{P}} \nabla_X Y = \sum_{\alpha} \overset{\alpha}{\underset{\lambda(\alpha)}{P}} \overset{\lambda(\alpha)}{\underset{\alpha}{P}} \nabla_X Y = \sum_{\alpha} \overset{\alpha}{\underset{\lambda(\alpha)}{P}} \nabla_X \overset{\lambda(\alpha)}{\underset{\alpha}{P}} Y.$$

Обратно, непосредственной подстановкой легко убедиться, что из (23) следует (24). □

Замечание. Из соотношений (23), в частности, следует, что в адаптированном репере 1-форма ω вполне идемпотентной псевдосвязности, сохраняющей антикватернионную структуру, имеет вид

$$\omega = \left(\begin{array}{c|c|c} \overset{*}{\omega} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \overset{*}{\omega} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right). \tag{25}$$

На основании леммы могут быть доказаны следующие две теоремы.

Теорема 1. *Пусть (J, I) — антикватернионная f-структура на M, тогда на M существует единственная вполне идемпотентная псевдосвязность (l,∇), удовлетворяющая условиям*

$$\text{а) } S(mX, lY) = 0, \quad \text{б) } \overset{\beta}{\underset{\alpha}{P}} S(\overset{\alpha}{\underset{\alpha}{P}} Y, \overset{\alpha}{\underset{\alpha}{P}} X) = \overset{\beta}{\underset{\beta}{P}} S(\overset{\alpha}{\underset{\alpha}{P}} Y, \overset{\beta}{\underset{\alpha}{P}} X), \quad \text{в) } \nabla J = \nabla l = 0. \tag{26}$$

Доказательство. Из (26а) на основании (4) имеем

$$\nabla_{mX}(lY) - \nabla_{lY}(mX) - l[mX, lY] = 0.$$

Первое слагаемое в силу коидемпотентности псевдосвязности (см. (8)) равно $\nabla_{mX}Y$, а второе равно нулю, следовательно,

$$\nabla_{mX}Y = l[mX, lY]. \tag{27}$$

Из (26б) при $\alpha \neq \beta$ получаем

$$\overset{\beta}{\underset{\alpha}{P}}\nabla_{\overset{\alpha}{\underset{\alpha}{P}}Y}(\overset{\alpha}{\underset{\alpha}{P}}X) - \overset{\beta}{\underset{\alpha}{P}}\nabla_{\overset{\alpha}{\underset{\alpha}{P}}X}(\overset{\alpha}{\underset{\alpha}{P}}Y) - \overset{\beta}{\underset{\alpha}{P}}[\overset{\alpha}{\underset{\alpha}{P}}Y, \overset{\alpha}{\underset{\alpha}{P}}X] = \overset{\beta}{\underset{\beta}{P}}\nabla_{\overset{\alpha}{\underset{\alpha}{P}}Y}(\overset{\beta}{\underset{\alpha}{P}}X) - \overset{\beta}{\underset{\beta}{P}}\nabla_{\overset{\beta}{\underset{\alpha}{P}}X}(\overset{\alpha}{\underset{\alpha}{P}}Y) - \overset{\beta}{\underset{\beta}{P}}[\overset{\alpha}{\underset{\alpha}{P}}Y; \overset{\beta}{\underset{\alpha}{P}}X].$$

Принимая во внимание, что в силу (19б) и (24) первые слагаемые в правой и левой части последнего соотношения равны между собой, а второе слагаемое в правой части равно нулю (т. к. $\alpha \neq \beta$), получаем

$$\overset{\beta}{\underset{\alpha}{P}}\nabla_{\overset{\alpha}{\underset{\alpha}{P}}X}(\overset{\alpha}{\underset{\alpha}{P}}Y) = \overset{\beta}{\underset{\beta}{P}}[\overset{\alpha}{\underset{\alpha}{P}}Y; \overset{\beta}{\underset{\alpha}{P}}X] - \overset{\beta}{\underset{\alpha}{P}}[\overset{\alpha}{\underset{\alpha}{P}}Y; \overset{\alpha}{\underset{\alpha}{P}}X]. \tag{28}$$

Отсюда, положив $Y = \overset{\alpha}{\underset{\beta}{P}}Z$, находим

$$\overset{\beta}{\underset{\alpha}{P}}\nabla_{\overset{\alpha}{\underset{\alpha}{P}}X}(\overset{\alpha}{\underset{\beta}{P}}Z) = \overset{\beta}{\underset{\beta}{P}}[\overset{\alpha}{\underset{\beta}{P}}Z; \overset{\beta}{\underset{\alpha}{P}}X] - \overset{\beta}{\underset{\alpha}{P}}[\overset{\alpha}{\underset{\beta}{P}}Z; \overset{\alpha}{\underset{\alpha}{P}}X]. \tag{29}$$

Умножим обе части равенства (28) на $\overset{\alpha}{\underset{\beta}{P}}$, положив затем $Y = Z$, получим

$$\overset{\alpha}{\underset{\alpha}{P}}\nabla_{\overset{\alpha}{\underset{\alpha}{P}}X}(\overset{\alpha}{\underset{\alpha}{P}}Z) = \overset{\alpha}{\underset{\beta}{P}}[\overset{\alpha}{\underset{\alpha}{P}}Z; \overset{\alpha}{\underset{\beta}{P}}X] - \overset{\alpha}{\underset{\alpha}{P}}[\overset{\alpha}{\underset{\alpha}{P}}Z; \overset{\alpha}{\underset{\alpha}{P}}X]. \tag{30}$$

Принимая во внимание (1), (7), (8) и (17), получаем

$$\nabla_X Z = \overset{0}{\underset{0}{P}}\nabla_{\overset{0}{\underset{0}{P}}X}(\overset{0}{\underset{0}{P}}Z) + \overset{0}{\underset{1}{P}}\nabla_{\overset{0}{\underset{0}{P}}X}(\overset{1}{\underset{0}{P}}Z) + \overset{1}{\underset{0}{P}}\nabla_{\overset{1}{\underset{1}{P}}X}(\overset{0}{\underset{1}{P}}Z) + \overset{1}{\underset{1}{P}}\nabla_{\overset{1}{\underset{1}{P}}X}(\overset{1}{\underset{1}{P}}Y) + l\nabla_{mX}Z.$$

Отсюда, с учетом соотношений (27), а также (29) и (30) (при $\alpha = 1$, $\beta = 0$ и $\alpha = 0$, $\beta = 1$), находим

$$\begin{aligned} \nabla_X Z = \overset{1}{\underset{0}{P}}[\overset{1}{\underset{1}{P}}Z; \overset{0}{\underset{1}{P}}X] - \overset{1}{\underset{1}{P}}[\overset{1}{\underset{1}{P}}Z; \overset{1}{\underset{1}{P}}X] + \overset{0}{\underset{0}{P}}[\overset{1}{\underset{0}{P}}Z; \overset{0}{\underset{1}{P}}X] - \\ - \overset{0}{\underset{1}{P}}[\overset{1}{\underset{0}{P}}Z; \overset{1}{\underset{1}{P}}X] + \overset{1}{\underset{1}{P}}[\overset{0}{\underset{1}{P}}Z; \overset{1}{\underset{0}{P}}X] - \overset{1}{\underset{0}{P}}[\overset{0}{\underset{1}{P}}Z; \overset{0}{\underset{0}{P}}X] + \\ + \overset{0}{\underset{1}{P}}[\overset{0}{\underset{0}{P}}Z; \overset{1}{\underset{0}{P}}X] - \overset{0}{\underset{0}{P}}[\overset{0}{\underset{0}{P}}Z; \overset{0}{\underset{0}{P}}X] + l[mX; lZ], \end{aligned} \tag{31}$$

которое эквивалентно следующему

$$\nabla_X Z = \sum_{\alpha,\beta,\gamma=0}^{1} (-1)^{\gamma+\beta+1} \overset{\alpha}{\underset{\beta}{P}}[\overset{\gamma}{\underset{\alpha}{P}}X; \overset{\beta}{\underset{\gamma}{P}}Z] + l[mX, lZ]. \tag{32}$$

Путем прямых вычислений нетрудно убедиться, что соотношениями (32) на M определяется вполне идемпотентная псевдосвязность (l, ∇), удовлетворяющая условиям (26). $\square$

Подобным образом может быть доказана и

Теорема 2. *Пусть* $(J; I)$ — *антикватернионная* f*-структура на* M*, тогда на* M *существует единственная псевдосвязность* (l, ∇)*, удовлетворяющая условиям*

$$\text{а) } \nabla J = \nabla I = 0; \quad \text{б) } S(mX, lY) = 0; \quad \text{в) } S(\overset{\alpha}{\underset{\alpha}{P}}X, \overset{\beta}{\underset{\beta}{P}}Y) = 0 \ \ (\alpha \neq \beta). \tag{33}$$

Доказательство. Рассуждениями, аналогичными проведенным в доказательстве теоремы 1, получаем, что псевдосвязность, удовлетворяющая условиям (33), определяется соотношениями

$$\nabla_X Y = \sum_{\alpha,\beta=0}^{1} \overset{\lambda(\alpha)}{\underset{\beta}{P}} [\overset{\alpha}{\underset{\alpha}{P}}X, \overset{\beta}{\underset{\lambda(\alpha)}{P}}Y] + l[mX, lY], \tag{34}$$

где $\lambda(1) = 0$; $\lambda(0) = 1$. $\square$

Псевдосвязности, задаваемые соотношениями (32) и (34), будем называть соответственно первой и второй каноническими псевдосвязностями многообразия антикватернионной f-структуры.

3. Касательное расслоение над многообразием с вполне идемпотентной псевдосвязностью

1. Пусть $T(M)$ — касательное расслоение многообразия M, $\pi : T(M) \to M$ — естественная проекция, (x^i, y^i) — индуцированная система координат на $T(M)$. К. Яно и Ш. Кобаяси в [3] ввели понятия вертикального и полного лифтов тензорных полей из многообразия в касательное расслоение. Эти лифты характеризуются следующими свойствами:

$$\begin{aligned} &\text{а) } (S \otimes T)^V = S^V \otimes T, && \text{б) } f^V = f, \\ &\text{в) } (df)^V = d(f)^V, && \text{г) } X^V(f^C) = (X(f))^V, \end{aligned} \tag{35}$$

$$\begin{aligned} &\text{а) } (S \otimes T)^C = S^V \otimes T^C + S^C \otimes T^V, && \text{б) } f^C = \partial f, \\ &\text{в) } (df)^C = d(f^C), && \text{г) } X^C(f)^C = (Xf)^C, \end{aligned} \tag{36}$$

где T, S — тензоры; $X \in T^1_0(M)$, $f \in f(M)$, и обозначено $\partial f = y^i \partial_i f$. Из (35) и (36) вытекают соотношения

$$\text{а) } (\partial_i)^V = \partial_{n+i}; \quad (\partial_i)^C = \partial_i; \qquad \text{б) } (dx^i)^V = dx^i; \quad (dx^i)^C = dy^i, \tag{37}$$

где $\partial_{n+1} = \partial/\partial y^i$.

Приведем координатные выражения этих лифтов в индуцированной системе координат для некоторых типов тензоров, используемые в дальнейшем

$$\begin{aligned} &\text{а) } (X)^V = \left(\frac{0}{X}\right); && \text{б) } (X)^C = \left(\frac{X}{\partial X}\right); && \text{в) } (F)^V = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline F & 0 \end{array}\right); \\ &\text{г) } (F)^C = \left(\begin{array}{c|c} F & 0 \\ \hline \partial F & F \end{array}\right); && \text{д) } (\omega)^V = (\omega; 0); && \text{е) } (\omega)^C = (\omega; \partial\omega); \\ &\text{ж) } (g)^V = \left(\begin{array}{c|c} g & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right); && \text{з) } (g)^C = \left(\begin{array}{c|c} \partial g & g \\ \hline g & 0 \end{array}\right). \end{aligned}$$

где $X \in T^1_0(M)$, $\omega \in T^0_1(M)$, $F \in T^1_1(M)$, $g \in T^0_2(M)$. Заметим, что конструкции вертикальных лифтов позволяют строить продолжения тензорных полей, зависящих от базисных и слоевых координат.

Если на M задана линейная псевдосвязность (h, ∇), то подобно тому, как это делалось в [4] для горизонтальных лифтов относительно аффинной связности, определим горизонтальный лифт тензорных полей из M в $T(M)$ по следующей формуле:

$$(T)^H = T^C - \nabla_Y T \; (\forall T \in T^s_q(M)), \tag{38}$$

где $\nabla_Y T = y^k \nabla_k T^{i_1 \ldots i_s}_{j_1 \ldots j_q} \partial_{n+i} \otimes \cdots \otimes \partial_{n+i_s} dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{j_q}$, т. е. вертикальное поднятие тензора $y^k \nabla_k T^{i_1 \ldots i_s}_{j_1 \ldots j_q}$. С учетом соотношений (3) и (37) нетрудно получить выражения для горизонтальных лифтов в индуцированной системе координат (x^i, y^i) на $T(M)$. Так, например,

$$\text{а) } (X)^H = \left(\frac{hX}{\overset{*}{\Gamma} X} \right); \quad \text{б) } (\omega)^H = (\omega\Gamma; \omega h); \quad \text{в) } (F)^H = \left(\begin{array}{c|c} hFh & 0 \\ \hline \overset{*}{\Gamma} F + F\Gamma & hFh \end{array} \right), \tag{39}$$

где $\overset{*}{\Gamma}{}^i_j = (e_k h^i_j - \Gamma^i_{kj}) y^k$; $\Gamma^i_j = \Gamma^i_{kj} y^k$; $X \in T^1_0(M)$, $\omega \in T^0_1(M)$, $F \in T^1_1(M)$.

2. В дальнейшем будут построены более широкие классы лифтов, позволяющие получить различные типы геометрических структур на $T(M)$. Для этого потребуется следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть $(h; \nabla)$ — вполне идемпотентная псевдосвязность на M, тогда на $T(M)$ существует изотранслируемая π-структура.*

Доказательство. Как известно [8], задание на M линейной псевдосвязности (h, ∇) равносильно заданию на $T(M)$ аффинора $\overline{P}$, имеющего в индуцированной системе координат (x^i, y^i) следующий вид:

$$(\overline{P}) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline \overline{\Gamma} & h \end{array} \right),$$

где $\overline{\Gamma}{}^i_j = \Gamma^i_{jk} y^k$. Рассмотрим на $T(M)$, кроме того, следующие аффиноры:

$$\text{а) } \underset{0}{\overset{0}{P}} = \overline{P} + (S)^V, \quad \text{б) } \underset{1}{\overset{1}{P}} = h^C - \underset{0}{\overset{0}{P}}, \quad \text{в) } \underset{1}{\overset{0}{P}} = h^V, \tag{40}$$

где $S^i_j = S^i_{kj} y^k$ (S^i_{kj} — компоненты тензора кручения псевдосвязности (h, ∇)). В индуцированной системе координат эти аффиноры задаются матрицами

$$\text{а) } \underset{0}{\overset{0}{P}} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline \Gamma & h \end{array} \right), \quad \text{б) } \underset{1}{\overset{1}{P}} = \left(\begin{array}{c|c} h & 0 \\ \hline \Gamma & 0 \end{array} \right), \quad \text{в) } \underset{1}{\overset{0}{P}} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline h & 0 \end{array} \right). \tag{41}$$

Покажем, что соотношениями

$$\text{а) } \underset{0}{\overset{1}{P}} \underset{1}{\overset{0}{P}} = \underset{1}{\overset{1}{P}}, \quad \text{б) } \underset{0}{\overset{1}{P}} \underset{0}{\overset{0}{P}} = \underset{0}{\overset{1}{P}} \tag{42}$$

на $T(M)$ однозначно определяется аффинор $\underset{0}{\overset{1}{P}}$. Действительно, пусть в индуцированной системе координат

$$\underset{0}{\overset{1}{P}} = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right),$$

тогда из (42а), учитывая (41), получаем

$$\text{а) } Bh = h, \quad \text{б) } Dh = \overset{*}{\Gamma}. \tag{43}$$

Аналогично, из (42б) следует

$$\text{а) } A = B\Gamma; \quad \text{б) } Bh = B; \quad \text{в) } D\Gamma = C; \quad \text{г) } Dh = D. \tag{44}$$

Из (43а) и (44б) получаем $B = h$. Отсюда с учетом соотношения $h\Gamma = \Gamma$, а также (44а) следует $A = \Gamma$. Далее, из условий (43б) и (44г) вытекает $D = \overset{*}{\Gamma}$, откуда, учитывая (44в), получаем $C = \overset{*}{\Gamma}\Gamma$. Таким образом,

$$\underset{0}{\overset{1}{P}} = \left(\begin{array}{c|c} \Gamma & h \\ \hline \overset{*}{\Gamma}\Gamma & \Gamma \end{array}\right). \tag{45}$$

Непосредственной проверкой с учетом (41) и (45) нетрудно убедиться, что аффиноры $\underset{0}{\overset{0}{P}}$; $\underset{1}{\overset{0}{P}}$ $\underset{0}{\overset{1}{P}}$; $\underset{1}{\overset{1}{P}}$ удовлетворяют соотношениям (19б), т. е. определяют на $T(M)$ изотранслируемую π-структуру. □

Замечание 1. Как было показано выше, задание изотранслируемой π-структуры равносильно заданию антикватернионной структуры (J, I), где $J = \underset{1}{\overset{1}{P}} - \underset{0}{\overset{0}{P}}$, $I = \underset{1}{\overset{0}{P}} + \underset{0}{\overset{1}{P}}$. Эти аффиноры J и I в индуцируемой системе координат определяются матрицами

$$J = \left(\begin{array}{c|c} h & 0 \\ \hline h - 2\Gamma & -h \end{array}\right), \qquad I = \left(\begin{array}{c|c} \Gamma & h \\ \hline h + \overset{*}{\Gamma}\Gamma & \Gamma \end{array}\right). \tag{46}$$

Отметим, что $J^2 = I^2 = h^C$. Структура (J, I) является естественным обобщением антикватернионной структуры на $T(M)$, рассматривавшейся в [5]. Эта структура получается из (J, I) в предположении, что $\operatorname{rk} h = n$ (т. е. $h = \mathrm{id}$).

Замечание 2. Справедливы следующие соотношения:

$$\begin{gathered} \text{а) } \underset{0}{\overset{0}{P}}(hX)^V = (hX)^V, \quad \text{б) } \underset{1}{\overset{1}{P}}(hX)^H = (hX)^H, \quad \text{в) } h^C(VX)^V = 0, \\ \text{г) } h^C(VX)^C = 0, \quad \text{д) } \underset{1}{\overset{0}{P}}(hX)^V = (hX)^H, \quad \text{е) } \underset{0}{\overset{1}{P}}(hX)^H = (hX)^V \quad (V = \mathrm{id} - h). \end{gathered} \tag{47}$$

Таким образом, если $\{e_{i_1}\}$ — базис $\operatorname{Im} h$, а $\{e_{i_1}\}$ — базис $\operatorname{Ker} h$ ($i_1 = 1, \ldots, r$, $i_2 = r+1, \ldots, n$), то репер $\{\overline{e}_{i_1}, \overline{e}_{i_2}, \overline{e}_{n+i_1}, \overline{e}_{n+i_2}\} = \{(e_{i_1})^H, (e_{i_2})^C, (e_{i_1})^V, (e_{i_2})^V\}$ будет адаптированным к антикватернионной f-структуре на $T(M)$.

Замечание 3. Наличие изотранслируемой π-структуры, как это следует из теорем 1 и 2, приводит к возникновению на $T(M)$ вполне идемпотентных псевдосвязностей (первой и второй канонических псевдосвязностей). Особый интерес представляет собой первая каноническая псевдосвязность, т. к. она может быть интерпретирована как обобщение горизонтального лифта связности. Обозначим ее $(h^H; \nabla^H)$ и назовем псевдогоризонтальным лифтом псевдосвязности (h, ∇).

Из соотношений (32), учитывая (41), (45), (47), получаем

$$\begin{gathered} \text{а) } \nabla^H_{X^V} Z^V = 0, \quad \text{б) } \nabla^H_{X^V}(hZ)^H = 0, \quad \text{в) } \Delta^H_{X^V}(VZ)^C = 0, \quad \text{г) } \Delta^H_{(hX)^H} Z^V = (\nabla_X Z)^V, \\ \text{д) } \Delta^H_{(hX)^H} Z^H = (\nabla_X Z)^H, \quad \text{е) } \Delta^H_{(VX)^C}(Z)^V = (\nabla_{VX} Z)^V, \quad \text{ж) } \Delta^H_{(VX)^C} Z^H = (\nabla_{VX} Z)^H. \end{gathered} \tag{48}$$

Из соотношений (48) следует, что в адаптированном репере $(\overline{e}_{i_1}, \overline{e}_{i_1}, \overline{e}_{n+i_1}, \overline{e}_{n+i_2})$ на $T(M)$ псевдосвязность $(h^H; \nabla^H)$ имеет ненулевыми лишь следующие компоненты:

$$\overset{H}{\Gamma}{}^{i_1}_{j_1\,k_1} = \overset{H}{\Gamma}{}^{n+i_1}_{j_1\,n+k_1} = \Gamma^{i_1}_{j_1\,k_1}; \quad \overset{H}{\Gamma}{}^{i_1}_{j_2\,k_1} = \overset{H}{\Gamma}{}^{i_1}_{j_2\,n+k_1} = \Gamma^{i_1}_{j_2\,k_1}. \tag{49}$$

Рассматривая аналогичным образом соотношения (34) в адаптированном репере, легко убедиться, что вторая каноническая псевдосвязность на $T(M)$ может быть интерпретирована как горизонтальный лифт псевдосвязности $(h, \overline{\nabla})$, где $\overline{\nabla} = \nabla - S$, а S — тензор кручения псевдосвязности ∇.

Замечание 4. Наряду с изотранслируемой π-структурой $\{\overset{\alpha}{\underset{\beta}{P}}\}$ на $T(M)$ можно ввести изотранслируемую π-структуру $\{\overset{\alpha}{\underset{\beta}{\overline{P}}}\}$ соотношениями

$$\overset{\alpha}{\underset{\beta}{\overline{P}}} = \sum_{\gamma,\mu=0}^{1} \overset{\alpha}{\underset{\mu}{f}} \overset{\mu}{\underset{\gamma}{P}} \overset{\gamma}{\underset{\beta}{f}}{}^{-1} \quad (\alpha, \beta = 0, 1), \tag{50}$$

где $\overset{\alpha}{\underset{\beta}{f}} = \mathrm{const}$ — произвольная невырожденная матрица, а $\overset{\alpha}{\underset{\beta}{f}}{}^{-1}$ — обратная к ней. Аффиноры $\{\overset{\alpha}{\underset{\beta}{\overline{P}}}\}$ удовлетворяют (19б). Такую изотранслируемую π-структуру будем называть изотранслируемой π-структурой равносильной $\{\overset{\alpha}{\underset{\beta}{P}}\}$. Из (32) и (34) следует, что канонические псевдосвязности у равносильных изотранслируемых π-структур совпадают.

3. Пусть (h, ∇) — линейная псевдосвязность на M, тогда аналогично тому, как это делалось в [3], можно показать, что на $T(M)$ существует единственная псевдосвязность $(h^C, \overset{C}{\nabla})$, удовлетворяющая условиям

$$\overset{C}{\nabla}_{X^C} Z^C = (\nabla_X Z)^C. \tag{51}$$

Эту псевдосвязность будем называть полным лифтом псевдосвязности $(h; \nabla)$. Если Z заменить на fZ, а X — на qX, где f, q — произвольные дифференцируемые функции, то из (51), учитывая (1), (2), (36), получим

$$\text{а) } \overset{C}{\nabla}_{X^C} Z^V = (\nabla_X Z)^V, \quad \text{б) } (\overset{C}{\nabla}_{X^V} Z^C) = (\nabla_X Z)^V, \quad \text{в) } \overset{C}{\nabla}_{X^V} Z^V = 0. \tag{52}$$

Из соотношений (51), (52) видно, что в индуцированной системе координат (x^i, y^i), т. е. в натуральном репере $e_i = (\partial_i)^C$, $e_{n+i} = (\partial_i)^V$, ненулевые компоненты псевдосвязности будут иметь вид

$$\overset{C}{\Gamma}{}^i_{j\,k} = \overset{C}{\Gamma}{}^i_{j\,n+k} = \overset{C}{\Gamma}{}^i_{n+j\,k} = \Gamma^i_{j\,k}; \quad \overset{C}{\Gamma}{}^{n+i}_{j\,k} = \partial \Gamma^i_{j\,k}. \tag{53}$$

Подобно тому, как это делалось в [3], легко убедиться в справедливости следующих утверждений.

Предложение 1. *Если S и R — соответственно тензоры кручения и кривизны псевдосвязности (h, ∇), то S^C и R^C – тензоры кручения и кривизны псевдосвязности $(h^C, \overset{C}{\nabla})$.*

Предложение 2. *Для любого тензорного поля T и любого векторного поля X на M имеют место соотношения*

$$\text{а) } \overset{C}{\nabla}_{X^C} T^C = (\nabla_X T)^C, \quad \text{б)} \overset{C}{\nabla}_{X^C} T^V = (\nabla_X T)^V, \quad \text{в) } \overset{C}{\nabla}_{X^V} T^V = 0, \quad \text{г) } \overset{C}{\nabla}_{X^V} T^C = (\nabla_X T)^V. \tag{54}$$

Кроме этого, отметим некоторые утверждения, имеющие место только для полного лифта псевдосвязности.

Предложение 3. *Пусть (h, ∇) — идемпотентная (коидемпотентная) псевдосвязность, то $(h^C, \overset{C}{\nabla})$ — идемпотентная (коидемпотентная) псевдосвязность.*

Действительно, как известно [3], если утверждение справедливо на множестве полных поднятий, то оно справедливо для любого векторного поля на $T(M)$. Поэтому для идемпотентной псевдосвязности (h,∇) на основании свойств полных лифтов имеем

$$h^C\nabla_{X^C}Z^C = h^C(\nabla_X Z)^C = (h\nabla_X Z)^C = (\nabla_X Z)^C = \nabla_{X^C}Z^C,$$

что говорит об идемпотентности $(h^C,\overset{C}{\nabla})$ (см. (7)). Аналогично, в случае коидемпотентной псевдосвязности получаем

$$\nabla_{X^C}(h^C Z^C) = \nabla_{X^C}(hZ)^C = (\nabla_X(hZ))^C = (\nabla_X Z)^C = \nabla_{X^C}Z^C.$$

Предложение 4. *Пусть (∇,h) — псевдосвязность Леви-Чивита, соответствующая HR-структуре (h,g) на M, тогда $(h^C,\overset{C}{\nabla})$ — псевдосвязность Леви-Чивита, соответствующая HR-структуре (h^C,g^C) на $T(M)$.*

Доказательство. Покажем, во-первых, что если (h,g) — HR-структура ранга r на M, то (h^C,g^C) — HR-структура ранга $2r$ на $T(M)$. Действительно, $\operatorname{rk} h^C = \operatorname{rk} g^C = 2r$, кроме того,

$$g^C(h^C X^C, Z^C) = g^C((hX)^C, Z^C) = (g(hX,Z))^C = (g(X,Z))^C = g^C(X^C,Z^C).$$

Пусть теперь (h,∇) — псевдосвязность Леви-Чивита, соответствующая (h,g), тогда, принимая во внимание (21), имеем

$$(\nabla_{X^C}g^C) = (\nabla_X g)^C = 0,$$
$$g^C(X^C, S(Y^C,Z^C)) = (g(X,S(Y,Z)))^C = (g(Y,S(X,Z)))^C = g^C(Y^C, S^C(X^C,Z^C)).$$

Последние два равенства показывают, что $(h^C,\overset{C}{\nabla})$ удовлетворяет также соотношениям (15) и, следовательно, является псевдосвязностью Леви-Чивита. □

4. Пусть $t\in T^s_q(M)$, τ — целое число $(0\le\tau\le 2^{s+q}-1)$, $(\mu_1,\dots,\mu_{s+q})$ — двоичное представление числа τ, тогда на $T(M)$ можем определить тензор $(t)^{\tau p}$ типа (s,q) при помощи соотношений

$$(t^{\tau p})(X_1,\dots,X_q,X_{q+1},\dots,X_{q+s}) = (t)^V(F_1X_1,\dots,F_qX_q,X_{q+1}F_{q+1},\dots,X_{q+s}F_{q+s}),$$

где $X_1,\dots,X_q\in T^1_0(T(M))$; $X_{q+1},\dots,X_{q+s}\in T^0_1(T(M))$,

$$F_\psi = \begin{cases} \mathrm{id}, & \text{если } \mu_\psi = 0;\\ \overset{0}{\underset{1}{P}}, & \text{если } \mu_\psi = 1,\quad \psi\le q;\\ \overset{1}{\underset{0}{P}}, & \text{если } \mu_\psi = 1,\quad \psi\ge q+1,\end{cases}$$

$\psi = 1,\dots,s+q$. Другими словами

$$(t)^{\tau p} = t^{i_{q+1}\dots i_{q+s}}_{i_1\dots i_q}\overline{\theta}^{i_1}\otimes\dots\otimes\overline{\theta}^{i_q}\overline{e}_{i_{q+1}}\otimes\dots\otimes\overline{e}_{i_{q+s}},$$

где $t^{i_{q+1}\dots i_{q+s}}_{i_1\dots i_q}$ — компоненты тензора t в натуральном репере на M,

$$\overline{\theta}^{i_\psi} = \begin{cases} dX^{i_\psi}, & \text{если } \mu_\psi = 0;\\ h^{i_\psi}_t dX^{n+t} + \Gamma^{i_\psi}_t dX^t, & \text{если } \mu_\psi = 1,\end{cases}$$

$$\overline{e}_{i_\psi} = \begin{cases} \partial_{n+i_\psi}, & \text{если } \mu_\psi = 0;\\ h^t_{i_\psi}\partial_t + \overset{*}{\Gamma}{}^t_{i_\psi}\partial_{n+t}, & \text{если } \mu_\psi = 1.\end{cases}$$

Из определения τP-лифтов, в частности, следует

$$(t)^0 = t^V,\quad t^H = (t)^{1P} + (t)^{3P} + \dots + (t)^{(2^{\tau+s}-1)P}.$$

Кроме этого, тензор $\sum\limits_{\tau=0}^{2^{r+s}-1}(t_\tau)^{\tau P}$ на $T(M)$ может рассматриваться как аналог полного лифта Ф.И. Кагана последовательности тензоров $\{t_\tau\}$ [9]. Однако, отметим, что Ф.И. Каган построил этот лифт, исходя из несколько иных соображений.

5. Используя изотранслируемую структуру на $T(M)$, а также аппарат τP-лифтов на $T(M)$, можно ввести широкие классы различных геометрических структур. Приведем некоторые примеры.

1) Пусть $\{\overset{\beta}{\underset{\alpha}{f}}\} \in f(M)$ — семейство функций на M, удовлетворяющих условиям

$$\sum_\beta \overset{\alpha}{\underset{\beta}{f}}\overset{\beta}{\underset{\gamma}{f}} = e\delta^\alpha_\gamma,$$

где $e = \pm 1$; $\alpha, \beta, \gamma = 0, 1$. Тогда тензор

$$\overline{F} = \sum_{\alpha,\beta} \overset{\alpha}{\underset{\beta}{f}}\overset{\beta}{\underset{\alpha}{P}}$$

определяет на $T(M)$ π-структуру (гиперболического типа при $e = 1$ и эллиптического при $e = -1$). В частности, при $\overset{\alpha}{\underset{\beta}{f}} = \left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{smallmatrix}\right)$ имеем $\overline{F} = J$, а при $\overset{\alpha}{\underset{\beta}{f}} = \left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)$ имеем $\overline{F} = I$.

2) Пусть (h, g) — HR-структура ранга r на M и $a^{\alpha\beta} \in f(M)$ — семейство функций таких, что $a^{\alpha\beta} = a^{\beta\alpha}$, $\det(a^{\alpha\beta}) \neq 0$. Обозначим $g_{00} = (g)^{0P}$, $g_{01} = (g)^{1P}$, $g_{10} = (g)^{2P}$, $g_{11} = (g)^{3P}$. Тогда пара $(h^C, \overline{g})$, где $\overline{g} = \sum\limits_{\alpha,\beta} g_{\alpha\beta}a^{\alpha\beta}$, образует HR-структуру ранга $2r$ на $T(M)$. В частности, если $a^{\alpha\beta} = \left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$, то $\overline{g}$ может рассматриваться как аналог метрики Сасаки [5].

3) Пусть F — f-структура (гиперболического или эллиптического типа), (h, g) — HR-структура на M. Пару (J, g) будем называть почти эрмитовой f-структурой, если

$$\text{а) } g(JX, Y) = -g(X, JY)\ (\forall X, Y \in T^0_1(M)), \quad \text{б) } J^2 = h.$$

Нетрудно видеть, что пара $(\overline{F}, \overline{g})$, введенная в примерах 1) и 2), будет почти эрмитовой структурой тогда и только тогда, когда

$$\sum_\gamma (\overset{\alpha\gamma}{a}\overset{\beta}{\underset{\gamma}{f}} + \overset{\beta\gamma}{a}\overset{\alpha}{\underset{\gamma}{f}}) = 0.$$

Нетрудно также видеть, что эти условия будут выполнены, например, для пары (J, g^H), а также для пары, состоящей из $K = JI$ и аналога метрики Сасаки g^S. Пара (J, g^C) будет определять почти эрмитову структуру тогда и только тогда, когда $\nabla g = 0$.

Литература

1. Широков А.П. *Геометрия касательных расслоений и пространства над алгебрами* // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Пробл. геометрии. – 1981. – Т. 12. – С. 61–95.
2. Шапуков Б.Н. *Связности на дифференцируемых расслоениях* // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Пробл. геометрии. – 1983. – Т. 15. – С. 61–93.
3. Yano K., Kobayashi S. *Prolongations of tensor fields and connection to tangent bundle.* I. *General theory* // J. Math. Soc. Japan. – 1966. – V. 18. – № 2. – P. 194–210.
4. Yano K., Ishihara S. *Horizontal lifts of tensor fields and connections to tangent bundles* // J. Math. Mech. – 1967. – V. 16. – № 9. – P. 1015–1030.
5. Каган Ф.И. *Римановы метрики в касательном расслоении над римановым многообразием* // Изв. вузов. Математика. – 1973. – № 6. – С. 42–51.
6. Шандра И.Г. *Обобщенные связности на многообразиях с вырожденной метрикой* // Изв. вузов. Математика. – 1992. – № 6. – С. 103–110.

7. Shandra I.G. *On an isotranslated $n\pi$-structure and connections preserving a non-holonomic* $(n+1)$-*coweb* // Webs and quasigroups, Tver, TSU. – 1994. – P. 60–66.
8. Otsuki T. *On general connections* // Math. J. Okayama Univ. – 1960 – V. 9. – № 2. – P.99–164.
9. Спесивых В.Л. *Обобщение понятия связности в векторном расслоении* // Изв. вузов. Математика. – 1979. – № 6. – С. 74–77.

Финансовая Академия при
Правительстве Российской Федерации

Поступила
23.05.1997