ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 6 (433)

УДК 514.76

МИЛЕВА ПРВАНОВИЧ

О ВПОЛНЕ ОМБИЛИЧЕСКИХ ПОДМНОГООБРАЗИЯХ, ПОГРУЖЕННЫХ В СЛАБО СИММЕТРИЧЕСКОЕ РИМАНОВО МНОГООБРАЗИЕ

1. *Введение.* Понятие слабо симметрического риманова многообразия было введено и исследовано в работах [1] и [12]. Это — неплоское риманово многообразие $(\widetilde{M},\widetilde{g})$, тензор кривизны $\widetilde{R}$ которого удовлетворяет условию

$$(\widetilde{\nabla}_X\widetilde{R})(Y,Z)=A(X)\widetilde{R}(Y,Z)W+B(Y)\widetilde{R}(X,Z)W+C(Z)\widetilde{R}(Y,X)W+\\ +D(W)\widetilde{R}(Y,Z)X+\widetilde{g}(\widetilde{R}(Y,Z)W,X)F,$$

где $\widetilde{\nabla}$ означает связность Леви-Чивита на $(\widetilde{M},\widetilde{g})$, A, B, C, D — 1-формы, F — векторное поле, одновременно не обращающееся в нуль. В [10] было показано, что эти формы и векторное поле связаны соотношениями

$$B(X)=C(X)=D(X),\quad \langle X,F\rangle=D(X)\ \ \forall X,$$

т. е. слабо симметрическое многообразие характеризуется условием

$$(\widetilde{\nabla}_X\widetilde{R})(Y,Z)W=A(X)\widetilde{R}(Y,Z)W+D(Y)\widetilde{R}(X,Z)W+\\ +D(Z)\widetilde{R}(Y,X)W+D(W)\widetilde{R}(Y,Z)X+g(\widetilde{R}(Y,Z)W,X)F,\quad (1.1)$$

$$\langle X,F\rangle=D(X).$$

1-формы A и D называются первой и второй ассоциированными 1-формами соответственно.

Выделим следующие частные случаи.

1) $A=D=0$; тогда $(\widetilde{M},\widetilde{g})$ становится симметрическим многообразием Картана. Поэтому естественно назвать многообразия, удовлетворяющие условию (1.1), слабо симметрическими ([1], [12]).

2) $A\neq 0$, $D=0$; тогда $(\widetilde{M},\widetilde{g})$ становится рекуррентным многообразием ([11], гл. V).

3) $A=2D$; тогда $(\widetilde{M},\widetilde{g})$ является псевдосимметрическим пространством в смысле Chaki ([2], [3]). Каждое рекуррентное многообразие удовлетворяет условию

$$(\widetilde{\nabla}_X\widetilde{R})(Y,Z)W=2D(X)\widetilde{R}(Y,Z)W+D(Y)\widetilde{R}(X,Z)W+\\ +D(Z)\widetilde{R}(Y,X)W+D(W)\widetilde{R}(Y,Z)X+\widetilde{g}(\widetilde{R}(Y,Z)W,X)F,\quad (1.2)$$

$$\langle X,F\rangle=D(X).$$

Обратно, если многообразие $(\widetilde{M},\widetilde{g})$ помимо (1.2) удовлетворяет условию

$$D(X)\widetilde{R}(Y,Z)+D(Y)\widetilde{R}(Z,X)+D(Z)\widetilde{R}(X,Y)=0,\quad (1.3)$$

то (1.2) приводится к виду

$$(\widetilde{\nabla}_X\widetilde{R})(Y,Z)W=4D(X)\widetilde{R}(Y,Z)W,$$

т. е. $(\widetilde{M},\widetilde{g})$ становится рекуррентным римановым многообразием. Поэтому (учитывая то, что в ряде работ, напр., в [4], термин "псевдосимметрическое многообразие" понимается в ином смысле) назовем риманово многообразие, удовлетворяющее только условию (1.2), обобщенно рекуррентным [9].

Вполне омбилические подмногообразия симметрических или рекуррентных многообразий рассматривались в [7], а обобщенно рекуррентных — в [6]. В данной работе рассматриваем свойства вполне омбилических подмногообразий, погруженных в слабо симметрическое многообразие. Изучая некоторые частные случаи, найдем новые аналоги условия рекуррентности.

Большей частью используем обозначения из [7].

2. *Исходные факты.* Пусть $(\widetilde{M},\widetilde{g})$ — m-мерное риманово многообразие, покрытое системой координатных окрестностей (U,y^α). Пусть (M,g) — n-мерное $(n<m)$ подмногообразие в $(\widetilde{M},\widetilde{g})$, определенное в локальных координатах уравнениями $y^\alpha=y^\alpha(x^i)$, где g — индуцированная метрика. Здесь и далее греческие индексы пробегают значения $1,2,\dots,m$, а латинские — значения $1,2,\dots,n$. Пусть $N_\mathcal{P}$ $(\mathcal{P},Q=n+1,\dots,m)$ — единичные взаимно ортогональные нормальные векторы к (M,g), а $B_i^\alpha=\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}$. Тогда

$$\begin{aligned}&g_{ij}=\widetilde{g}_{\alpha\beta}B_i^\alpha B_j^\beta,\quad \widetilde{g}_{\alpha\beta}N_\mathcal{P}^\alpha B_j^\beta=0,\\&\widetilde{g}_{\alpha\beta}N_\mathcal{P}^\alpha N_\mathcal{P}^\beta=e_\mathcal{P},\quad e_\mathcal{P}=\pm1,\quad \widetilde{g}_{\alpha\beta}N_\mathcal{P}^\alpha N_Q^\beta=0\quad(\mathcal{P}\neq Q).\end{aligned}\tag{2.1}$$

Второй фундаментальный тензор $H_{ji\mathcal{P}}$ для $N_\mathcal{P}^\alpha$ дается формулой

$$H_{ji\mathcal{P}}=H_{ji}^\alpha N_{\mathcal{P}\alpha},\tag{2.2}$$

где

$$H_{ji}^\alpha=\nabla_j B_i^\alpha,$$

а ∇_j — символ ковариантной производной в метрике g многообразия (M,g). Имеем

$$H_{ji}^\alpha=\sum_\mathcal{P} e_\mathcal{P}H_{ji\mathcal{P}}N_\mathcal{P}^\alpha.\tag{2.3}$$

Нам потребуются уравнения Гаусса и Кодацци для (M,g). Обозначая через $\widetilde{R}_{\delta\gamma\beta\alpha}$ и R_{lkji} компоненты тензоров кривизны соответственно многообразий $(\widetilde{M},\widetilde{g})$ и (M,g), эти уравнения можно записать в виде

$$R_{lkji}=\widetilde{R}_{\delta\gamma\beta\alpha}B_l^\delta B_k^\gamma B_j^\beta B_i^\alpha+\sum_\mathcal{P} e_\mathcal{P}(H_{kj\mathcal{P}}H_{li\mathcal{P}}-H_{lj\mathcal{P}}H_{ki\mathcal{P}}),\tag{2.4}$$

$$\widetilde{R}_{\delta\gamma\beta\alpha}B_k^\delta N_\mathcal{P}^\alpha B_j^\beta B_i^\alpha=\nabla_j H_{ki\mathcal{P}}-\nabla_i H_{kj\mathcal{P}}+\sum_Q e_Q(L_{\mathcal{P}Qi}H_{kjQ}-L_{\mathcal{P}Qj}H_{kjQ}),\tag{2.5}$$

где

$$L_{Q\mathcal{P}i}=\nabla_i N_{Q\alpha}N_\mathcal{P}^\alpha=-L_{\mathcal{P}Qi}.\tag{2.6}$$

Всюду далее будем предполагать, что (M,g) — вполне омбилическое подмногообразие. Такое подмногообразие характеризуется условием

$$H_{ji}{}^\alpha=g_{ji}H^\alpha.\tag{2.7}$$

Вектор H^α называется вектором средней кривизны; он удовлетворяет равенству

$$H^\alpha=\frac{1}{n}g^{ij}H_{ij}{}^\alpha.\tag{2.8}$$

Средняя кривизна H многообразия (M,g) определена формулой $H^2=|H_\alpha H^\alpha|$. Подставляя (2.7) в (2.2), находим

$$H_{ji\mathcal{P}}=g_{ji}H^\alpha N_{\mathcal{P}\alpha},\tag{2.9}$$

в силу чего (2.3) принимает вид

$$H_{ji}{}^{\alpha} = g_{ji} \sum_{\mathcal{P}} e_{\mathcal{P}} H^{\beta} N_{\mathcal{P}\beta} N^{\alpha}_{\mathcal{P}}. \tag{2.10}$$

Положим $H^{\alpha} N_{\mathcal{P}\alpha} = \rho_{\mathcal{P}}$. Тогда (2.9), (2.10) и (2.8) запишутся в виде

$$H_{ji\mathcal{P}} = \rho_{\mathcal{P}} g_{ji}, \tag{2.11}$$

$$H_{ji}{}^{\alpha} = g_{ji} \sum_{\mathcal{P}} e_{\mathcal{P}} \rho_{\mathcal{P}} N^{\alpha}_{\mathcal{P}}, \tag{2.12}$$

$$H^{\alpha} = \sum_{\mathcal{P}} e_{\mathcal{P}} \rho_{\mathcal{P}} N^{\alpha}_{\mathcal{P}}. \tag{2.13}$$

Используя (2.1), находим

$$H_{\alpha} H^{\alpha} = \sum_{\mathcal{P}} e_{\mathcal{P}} \rho^2_{\mathcal{P}}, \tag{2.14}$$

откуда

$$\frac{1}{2} \nabla_i (H_{\alpha} H^{\alpha}) = \sum_{\mathcal{P}} e_{\mathcal{P}} \rho_{\mathcal{P}} \nabla_i \rho_{\mathcal{P}}. \tag{2.15}$$

Подставляя (2.11) в (2.4) и учитывая (2.14), получаем

$$R_{lkji} = \widetilde{R}_{\delta\gamma\beta\alpha} B^{\delta}_l B^{\gamma}_k B^{\beta}_j B^{\alpha}_i + H_{\alpha} H^{\alpha} (g_{li} g_{kj} - g_{lj} g_{ki}), \tag{2.16}$$

откуда, применяя оператор ∇_r и подставляя (2.12), имеем

$$\begin{aligned} \nabla_r R_{lkji} = {} & B^{\varepsilon}_r \widetilde{\nabla}_{\varepsilon} \widetilde{R}_{\delta\gamma\beta\alpha} B^{\delta}_l B^{\gamma}_k B^{\beta}_j B^{\alpha}_i + \widetilde{R}_{\delta\gamma\beta\alpha} \Bigl(\sum_{\mathcal{P}} e_{\mathcal{P}} \rho_{\mathcal{P}} N^{\delta}_{\mathcal{P}} \Bigr) B^{\gamma}_k B^{\beta}_j B^{\alpha}_i g_{rl} + \\ & + \widetilde{R}_{\delta\gamma\beta\alpha} B^{\delta}_l \Bigl(\sum_{\mathcal{P}} e_{\mathcal{P}} \rho_{\mathcal{P}} N^{\gamma}_{\mathcal{P}} \Bigr) B^{\beta}_j B^{\alpha}_i g_{rk} + \widetilde{R}_{\delta\gamma\beta\alpha} B^{\delta}_l B^{\gamma}_k \Bigl(\sum_{\mathcal{P}} e_{\mathcal{P}} \rho_{\mathcal{P}} N^{\beta}_{\mathcal{P}} \Bigr) B^{\alpha}_i g_{rj} + \\ & + \widetilde{R}_{\delta\gamma\beta\alpha} B^{\delta}_l B^{\gamma}_k B^{\beta}_j \Bigl(\sum_{\mathcal{P}} e_{\mathcal{P}} \rho_{\mathcal{P}} N^{\alpha}_{\mathcal{P}} \Bigr) g_{ri} + \nabla_r (H_{\alpha} H^{\alpha}) (g_{li} g_{kj} - g_{lj} g_{ki}). \end{aligned} \tag{2.17}$$

С другой стороны, подстановка (2.11) в (2.5) и учет (2.15) и (2.6) приводит к равенству

$$\widetilde{R}_{\delta\gamma\beta\alpha} B^{\delta}_k \Bigl(\sum_{\mathcal{P}} e_{\mathcal{P}} \rho_{\mathcal{P}} N^{\gamma}_{\mathcal{P}} \Bigr) B^{\beta}_j B^{\alpha}_i = \frac{1}{2} g_{ki} \nabla_j (H_{\alpha} H^{\alpha}) - \frac{1}{2} g_{kj} \nabla_i (H_{\alpha} H^{\alpha}).$$

Подставляя последнее в (2.17), находим

$$\begin{aligned} \nabla_r r_{lkji} = {} & B^{\varepsilon}_r \widetilde{\nabla}_{\varepsilon} \widetilde{R}_{\delta\gamma\beta\alpha} B^{\delta}_l B^{\gamma}_k B^{\beta}_j B^{\alpha}_i + \nabla_r (H_{\alpha} H^{\alpha}) G_{lkji} + \\ & + \frac{1}{2} [\nabla_l (H_{\alpha} H^{\alpha}) G_{rkji} + \nabla_k (H_{\alpha} H^{\alpha}) G_{lrji} + \nabla_j (H_{\alpha} H^{\alpha}) G_{lkri} + \nabla_i (H_{\alpha} H^{\alpha}) G_{lkjr}], \end{aligned} \tag{2.18}$$

где $G_{lkji} = g_{ei} g_{kj} - g_{ej} g_{ki}$.

Предположим теперь, что $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ — слабо симметрическое многообразие. Условие (1.1), характеризующее такое многообразие, можно переписать в виде

$$\widetilde{\nabla}_{\varepsilon} \widetilde{R}_{\delta\gamma\beta\alpha} = A_{\varepsilon} \widetilde{R}_{\delta\gamma\beta\alpha} + D_{\delta} \widetilde{R}_{\varepsilon\gamma\beta\alpha} + D_{\gamma} \widetilde{R}_{\delta\varepsilon\beta\alpha} + D_{\beta} \widetilde{R}_{\delta\gamma\varepsilon\alpha} + D_{\alpha} \widetilde{R}_{\delta\gamma\beta\varepsilon}.$$

Подставляя это в (2.18) и учитывая (2.16), имеем

$$\nabla_r R_{lkji} = A_r(R_{lkji} - H_\alpha H^\alpha G_{lkji}) + \nabla_r(H_\alpha H^\alpha)G_{lkji} + D_l(R_{rkji} - H_\alpha H^\alpha G_{rkji}) + \\ + D_k(R_{lrji} - H_\alpha H^\alpha G_{lrji}) + D_j(R_{lkri} - H_\alpha H^\alpha G_{lkri}) + D_i(R_{lkjr} - H_\alpha H^\alpha G_{lkjr}) + \\ + \frac{1}{2}[\nabla_l(H_\alpha H^\alpha)G_{rkji} + \nabla_k(H_\alpha H^\alpha)G_{lrji} + \nabla_j(H_\alpha H^\alpha)G_{lkri} + \nabla_i(H_\alpha H^\alpha)G_{lkjr}], \quad (2.19)$$

где положено

$$A_r = A_\varepsilon B_r^\varepsilon, \quad D_l = D_\delta B_l^\delta. \quad (2.20)$$

Таким образом, доказана

Теорема 2.1. *Пусть (M,g) — вполне омбилическое подмногообразие слабо симметрического многообразия. Тогда для тензора кривизны R_{lkji} многообразия (M,g) выполняется условие* (2.19) *с учетом обозначений* (2.20).

Ниже рассмотрим следующие частные случаи:

$$A_r = D_r = 0; \quad A_r \neq 0; \quad D_r = 0; \quad A_r = 0, \quad D_r \neq 0; \quad A_r = kD_r.$$

3. $A_r = D_r = 0$. В этом случае условие (2.19) приводится к виду

$$\nabla_r R_{lkji} = \nabla_r(H_\alpha H^\alpha)G_{lkji} + \frac{1}{2}[\nabla_l(H_\alpha H^\alpha)G_{rkji} + \\ + \nabla_k(H_\alpha H^\alpha)G_{lrji} + \nabla_j(H_\alpha H^\alpha)G_{lkri} + \nabla_i(H_\alpha H^\alpha)G_{lkjr}]. \quad (3.1)$$

Обозначая скалярную кривизну многообразия (M,g) через R, получаем из (3.1)

$$\nabla_r(H_\alpha H^\alpha) = \frac{1}{(n-1)(n+2)}\nabla_r R, \quad (3.2)$$

после чего (3.1) принимает вид

$$\nabla_r R_{lkji} = \frac{1}{(n-1)(n-2)}[\nabla_r R G_{lkji} + \tfrac{1}{2}\nabla_l R G_{rkji} + \tfrac{1}{2}\nabla_k R G_{lrji} + \tfrac{1}{2}\nabla_j R G_{lkri} + \tfrac{1}{2}\nabla_i R G_{lkjr}]. \quad (3.3)$$

Если $H_\alpha H^\alpha = \mathrm{const}$, то $\nabla_r R = 0$, и (3.3) дает $\nabla_r R_{lkji} = 0$. Обратно, для симметрического риманова многообразия $\nabla_r R = 0$, а значит, из (3.2) следует $H_\alpha H^\alpha = \mathrm{const}$. Поэтому справедлива

Теорема 3.1. *Пусть (M,g) — вполне омбилическое подмногообразие слабо симметрического многообразия, и пусть оба ассоциированных векторных поля ортогональны к (M,g). Тогда*

1) *подмногообразие (M,g) является симметрическим многообразием тогда и только тогда, когда его средняя кривизна постоянна*;
2) *если средняя кривизна подмногообразия (M,g) не постоянна, то выполнено условие* (3.3).

4. $A_r \neq 0$, $D_r = 0$. Тогда (2.19) принимает вид

$$\nabla_r R_{lkji} = A_r(R_{lkji} - H_\alpha H^\alpha G_{lkji}) + \nabla_r(H_\alpha H^\alpha)G_{lkji} + \\ + \frac{1}{2}[\nabla_l(H_\alpha H^\alpha)G_{rkji} + \nabla_k(H_\alpha H^\alpha)G_{lrji} + \nabla_j(H_\alpha H^\alpha)G_{lkri} + \nabla_i(H_\alpha H^\alpha)G_{lkjr}]. \quad (4.1)$$

Будем различать следующие случаи.

а) $H_\alpha H^\alpha = 0$, тогда

$$\nabla_r R_{lkji} = A_r R_{lkji}, \quad (4.2)$$

т. е. (M, g) — рекуррентное многообразие. Обратно, если (4.1) приводится к (4.2), то можно показать, что $(n-2)H_\alpha H^\alpha A_k = 0$. Поэтому при $n > 2$ получим $H_\alpha H^\alpha = 0$, т. к. $A_k \neq 0$. Итак, справедлива

Теорема 4.1. *Пусть (M, g) — вполне омбилическое подмногообразие слабо симметрического многообразия. Пусть первый ассоциированный вектор из объемлющего пространства не ортогонален к (M, g), а второй ортогонален к (M, g). Если $\dim(M, g) > 2$, то (M, g) будет рекуррентным многообразием тогда и только тогда, когда его средняя кривизна обращается в нуль.*

Замечание. Всякое двумерное риманово пространство симметрично, если его гауссова кривизна постоянна, и рекуррентно в противном случае ([11], с. 167).

б) $H_\alpha H^\alpha = c = \mathrm{const} \neq 0$, тогда равенство (4.1) принимает вид

$$\nabla_r R_{lkji} = A_r(R_{lkji} - cG_{lkji}). \tag{4.3}$$

Из (4.3) следует

$$\nabla_s \nabla_r r_{lkji} = (\nabla_s A_r + A_s A_r)(R_{lkji} - cG_{lkji}). \tag{4.4}$$

Тем же приемом, что и в ([11], с.153–154), отсюда можно вывести, что либо $R_{lkji} = cG_{lkji}$, либо $\nabla_s A_r = \nabla_r A_s$. Первое противоречит предположению, что $A_k \neq 0$. Значит, $\nabla_s A_r = \nabla_r A_s$, и в силу этого из (4.4) следует

$$\nabla_s \nabla_r R_{lkji} - \nabla_r \nabla_s R_{lkji} = 0.$$

Применяя тождество Риччи, запишем последнее уравнение в виде

$$R_{akji}R^a{}_{lrs} + R_{laji}R^a{}_{krs} + R_{lkai}R^a{}_{jrs} + R_{lkja}R^a{}_{irs} = 0. \tag{4.5}$$

Ковариантно дифференцируя (4.5), используя (4.3) и (4.5) и принимая во внимание, что $A_p \neq 0$, $c \neq 0$, получим

$$R_{skji}g_{lr} + R_{lsji}g_{kr} + R_{lksi}g_{jr} + R_{lkjs}g_{ir} - R_{rkji}g_{ls} - R_{lrji}g_{ks} - R_{lkri}g_{js} - R_{lkjr}g_{is} = 0.$$

Свертывая последнее соотношение с g^{er}, имеем

$$(n-1)R_{skji} = R_{kj}g_{is} - R_{ki}g_{js}. \tag{4.6}$$

Но из (4.6) следует $R_{si} = \frac{R}{n}g_{si}$, т. е. (4.6) приводится к виду

$$R_{skji} = \frac{R}{n(n-1)}(g_{si}g_{kj} - g_{ki}g_{js}). \tag{4.7}$$

Если $n > 2$, то (4.7) означает, что (M, g) — многообразие постоянной кривизны, а это противоречит предположению $A_r \neq 0$.

Если $n = 2$ и гауссова кривизна не постоянна, то (M, g) — рекуррентное пространство в соответствии со сделанным выше замечанием. Но в этом случае (M, g) удовлетворяет также условию (4.3). Иначе говоря, для двумерного многообразия $R_{lkji} = \mathcal{K}G_{lkji}$, а значит,

$$\nabla_r R_{lkji} = \mathcal{K}_r(g_{li}g_{kj} - g_{lj}g_{ki}), \quad \mathcal{K}_r = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial x^r}.$$

Но последнее соотношение можно переписать в виде

$$\nabla_r R_{lkji} = \frac{\mathcal{K}r}{\mathcal{K} - c}(\mathcal{K} - c)(g_{li}g_{kj} - g_{lj}g_{ki}) = \frac{\mathcal{K}r}{\mathcal{K} - c}(R_{lkji} - cG_{lkji}),$$

что совпадает с условием (4.3), где $A_r = \frac{\mathcal{K}r}{\mathcal{K}-c}$. Таким образом, установлены две теоремы.

Теорема 4.2. *Единственным римановым многообразием, удовлетворяющим условию* (4.3) *при* $A_r \neq 0$, $c = \mathrm{const} \neq 0$, *является двумерное многообразие непостоянной гауссовой кривизны. Каждое такое многообразие удовлетворяет условию* (4.3).

Теорема 4.3. *Пусть* (M, g) *— вполне омбилическое подмногообразие слабо симметрического многообразия. Пусть первое ассоциированное векторное поле объемлющего пространства не ортогонально к* (M, g), *тогда как второе ортогонально. Тогда средняя кривизна подмногообразия* (M, g) *не может быть нулевой константой, за исключением случая* $\dim(M, g) = 2$ *при условии непостоянства гауссовой кривизны многообразия* (M, g).

в) $H_\alpha H^\alpha \neq \mathrm{const}$, $\dim(M, g) > 2$. Положим $H_\alpha H^\alpha = \psi$, $\nabla_r \psi = \psi_r$. Перепишем (4.1) в виде

$$\nabla_r R_{lkji} = A_r(R_{lkji} - \psi G_{lkji}) + \psi_r G_{lkji} + \frac{1}{2}(\psi_l G_{rkji} + \psi_k G_{lrji} + \psi_j G_{lkri} + \psi_i G_{lkjr}), \tag{4.8}$$

откуда в силу тождества Бианки

$$A_r(R_{lkji} - \psi G_{lkji}) + A_l(R_{rkji} - \psi G_{rkji}) + A_k(R_{rlji} - \psi G_{rlji}) = 0. \tag{4.9}$$

Приступим к доказательству равенств

$$A_s \psi_r - A_r \psi_s = 0, \tag{4.10}$$

$$\nabla_s A_r - \nabla_r A_s = 0. \tag{4.11}$$

Сначала докажем (4.10). Свертывая (4.8) с $g^{li} g^{kj}$ и дифференцируя полученное соотношение ковариантно, получим

$$\nabla_s \nabla_r R = (\nabla_s A_r + A_r A_s)[R - n(n-1)\psi] + 2(n-1) A_r \psi_s + (n-1)(n+2) \nabla_s \psi_r,$$

откуда

$$(\nabla_s A_r - \nabla_r A_s)[R - n(n-1)\psi] = -2(n-1)(A_r \psi_s - A_s \psi_r). \tag{4.12}$$

Значит, если $R - n(n-1)\psi = 0$, то равенство (4.10) справедливо. Чтобы доказать, что это равенство имеет место и в случае $R - n(n-1)\psi \neq 0$, положим

$$r = \frac{2(n-1)}{R - n(n-1)\psi}$$

и перепишем (4.12) в виде

$$\nabla_s A_r - \nabla_r A_s = r(A_S \psi_r - A_r \psi_s). \tag{4.13}$$

С другой стороны, дифференцируя (4.8), получим в силу (4.8)

$$\begin{aligned}\nabla_s \nabla_r R_{lkji} - \nabla_r \nabla_s R_{lkji} = (\nabla_s A_r - \nabla_r A_s)(R_{lkji} - \psi G_{lkji}) +\\ + \tfrac{1}{2}[(A_r \psi_l - \nabla_r \psi_l) G_{skji} + (A_r \psi_k - \nabla_r \psi_k) G_{lsji} + (A_r \psi_j - \nabla_r \psi_j) G_{lksi} +\\ + (A_r \psi_i - \nabla_r \psi_i) G_{lkjs} - (A_s \psi_l - \nabla_s \psi_l) G_{rkji} - (A_s \psi_k - \nabla_s \psi_k) G_{lrji} -\\ - (A_s \psi_j - \nabla_s \psi_j) G_{lkri} - (A_s \psi_i - \nabla_s \psi_i) G_{lkjr}].\end{aligned} \tag{4.14}$$

Подставляя это выражение в хорошо известное тождество (см., напр., [11], с. 153)

$$\nabla_s \nabla_r R_{lkji} - \nabla_r \nabla_s R_{lkji} + \nabla_k \nabla_l R_{jirs} - \nabla_l \nabla_k R_{jirs} + \nabla_i \nabla_j R_{rslk} - \nabla_j \nabla_i R_{rslk} = 0 \tag{4.15}$$

и используя (4.13), имеем

$$\begin{aligned}r(A_s \psi_r - A_r \psi_s)(R_{lkji} - \psi G_{lkji}) + r(A_k \psi_l - A_l \psi_k)(R_{jirs} - \psi G_{jirs}) + r(A_i \psi_j - A_j \psi_i)(R_{rslk} - \psi G_{rslk}) +\\ + \tfrac{1}{2}[(A_l \psi_s - A_s \psi_l) G_{rkji} + (A_s \psi_k - A_k \psi_s) G_{jirl} + (A_j \psi_s - A_s \psi_j) G_{lkri} + (A_s \psi_i - A_i \psi_s) G_{rjlk} +\\ + (A_j \psi_k - A_k \psi_j) G_{lirs} + (A_k \psi_i - A_i \psi_k) G_{rslj} + (A_r \psi_k - A_k \psi_r) G_{jils} + (A_r \psi_i - A_i \psi_r) G_{jslk} +\\ + (A_l \psi_i - A_i \psi_l) G_{rsjk} + (A_r \psi_l - A_l \psi_r) G_{skji} + (A_r \psi_j - A_j \psi_r) G_{lksi} + (A_l \psi_j - A_j \psi_l) G_{kirs}] = 0.\end{aligned} \tag{4.16}$$

Предположим, что $A_s\psi_j - A_j\psi_s \neq 0$, например,

$$A_2\psi_1 - A_1\psi_2 \neq 0. \tag{4.17}$$

Полагая в (4.16) $l = j = r = 1$, $k = i = s = 2$, получим в силу (4.17)

$$r(R_{1212} - \psi G_{1212}) = G_{1212}. \tag{4.18}$$

Полагая в (4.16) $l = r = 1$, $k = i = s = 2$ и учитывая (4.17) и (4.18), получим

$$r(R_{12j2} - \psi G_{12j2}) = G_{12j2} \tag{4.19}$$

для всех значений j. Аналогично, беря в (4.16) $l = i = r = 1$, $k = s = 2$, получим для всех j

$$r(R_{12j1} - \psi G_{12j1}) = G_{12j1}. \tag{4.20}$$

Затем, полагая в (4.16) $l = r = 1$, $k = s = 2$ и учитывая (4.18), имеем

$$\begin{aligned}2r(A_2\psi_1 - A_1\psi_2)(R_{12ji} - \psi G_{12ji}) - (A_2\psi_1 - A_1\psi_2)G_{12ji} - \psi_1(A_iG_{12j2} + A_jG_{122i}) +\\ + \psi_2(A_jG_{121i} - A_iG_{121j}) + \psi_i(-A_jG_{1212} + A_2G_{121j} +\\ + A_1G_{12j2}) + \psi_j(A_iG_{1212} - A_2G_{121i} + A_1G_{122i}) = 0.\end{aligned} \tag{4.21}$$

С другой стороны, полагая в (4.9) $l = i = 2$, $k = j = 1$ и заменяя r на j, получим

$$A_j(R_{2112} - \psi G_{2112}) + A_2(R_{1j12} - \psi G_{1j12}) + A_1(R_{j212} - \psi G_{j212}) = 0,$$

или

$$A_jG_{2112} + A_2G_{1j12} + A_1G_{j212} = 0,$$

поскольку верны равенства (4.18), (4.19), (4.20). Аналогично найдем

$$A_iG_{1212} + A_1G_{122i} + A_2G_{12i1} = 0.$$

Более того, из (4.9)

$$A_i(R_{12j2} - \psi G_{12j2}) + A_j(R_{122i} - \psi G_{122i}) + A_2(R_{12ij} - \psi G_{12ij}) = 0.$$

В силу (4.19) это можно переписать в виде

$$-\psi_1(A_iG_{12j2} + A_jG_{122i}) = -A_2\psi_1 r(R_{12ji} - \psi G_{12ji}).$$

Аналогично

$$\psi_2(A_jG_{121i} + A_iG_{12j1}) = A_1\psi_2 r(R_{12ji} - \psi G_{12ji}).$$

Из (4.21) с учетом (4.17) и полученных соотношений выводим равенство

$$r(R_{12ji} - \psi G_{12ji}) = G_{12ji}, \tag{4.22}$$

справедливое для всех i, j. Если $l = j = r = 1$, $s = 2$, то (4.16) в силу (4.20) и (4.17) дает

$$r(R_{1k1i} - \psi G_{1k1i}) = G_{1k1i}. \tag{4.23}$$

Но при $l = r = 1$, $j = s = 2$ из (4.16) с учетом (4.9), (4.17), (4.18), (4.19) и (4.20) находим

$$r(R_{1k2i} - \psi G_{1k2i}) = G_{1k2i}. \tag{4.24}$$

Полагая в (4.16) $r = 1$, $l = j = s = 2$ и учитывая (4.17) и (4.19), имеем

$$r(R_{2k2i} - \psi G_{2k2i}) = G_{2k2i}. \tag{4.25}$$

В силу (4.17), (4.20), (4.22), (4.23), (4.24) равенство (4.16) при $l = r = 1$, $s = 2$ дает

$$r(R_{1kji} - \psi G_{1kji}) = G_{1kji} \tag{4.26}$$

для всех значений k, j, i. Чтобы доказать, что

$$r(R_{2kji} - \psi G_{2kji}) = G_{2kji} \tag{4.27}$$

для всех k, j, i, положим в (4.16) $r = 1$, $l = s = 2$ и учтем (4.17), (4.19), (4.22), (4.25), (4.24). Наконец, полагая в (4.16) $l = 2$, $s = 1$ и учитывая (4.17), (4.22), (4.24), (4.26), (4.27), найдем

$$r(R_{rkji} - \psi G_{rkji}) = G_{rkji}. \tag{4.28}$$

Аналогично можно показать, что наличие любой ненулевой компоненты $A_p\psi_s - A_s\psi_p$ приводит к равенству (4.28) при всех значениях r, k, j, i. Значит, и в случае $\dim(M, g) > 2$, $H_\alpha H^\alpha \neq \mathrm{const}$ при $R - n(n-1)\psi \neq 0$, $A_r\psi_s - A_S\psi_r \neq 0$ имеем $R_{lkji} = \left(\frac{1}{r} + \psi\right)G_{lkji}$, т.е. (M, g) является многообразием постоянной кривизны. Но это противоречит предположению $A_r \neq 0$. Значит, условие (4.10) справедливо в любом случае.

Что касается условия (4.11), то оно является непосредственным следствием (4.10) и (4.13) при $R - n(n-1)\psi \neq 0$. Если же $R - n(n-1)\psi = 0$, то справедливость условия (4.11) можно установить следующим образом. Подставляя (4.14) в (4.15) и используя (4.10), находим

$$(\nabla_s A_r - \nabla_r A_s)(R_{lkji} - \psi G_{lkji}) + (\nabla_k A_l - \nabla_l A_k)(R_{jirs} - \psi G_{jirs}) + (\nabla_i A_j - \nabla_j A_i)(R_{rslk} - \psi G_{rslk}) = 0,$$

что в силу леммы 2 из ([11], с. 153) означает либо $\nabla_s A_r - \nabla_r A_s = 0$, либо $R_{lkji} - \psi G_{lkji} = 0$. Это влечет справедливость условия (4.11), поскольку (M, g) не является многообразием постоянной кривизны.

Задавая в произвольной точке $P \in (M, g)$ вектор (B^i) так, чтобы иметь $A_rB^r = 1$, и полагая $\beta = \psi_r B^r$, получим из (4.10)

$$\psi_s = \beta A_s, \tag{4.29}$$

в силу чего равенство (4.8) приобретает вид

$$\nabla_r R_{lkji} = A_r[R_{lkji} + (\beta - \psi)G_{lkji}] + \frac{\beta}{2}(A_l G_{rkji} + A_k G_{lrji} + A_j G_{lkri} + A_i G_{lkjr}). \tag{4.30}$$

В итоге произведенных рассуждений доказана

Теорема 4.4. *Пусть (M, g) — вполне омбилическое подмногообразие слабо симметрического риманова многообразия. Пусть первое ассоциированное векторное поле объемлющего пространства не ортогонально к (M, g), тогда как второе ортогонально. Тогда если $\dim(M, g) > 2$ и средняя кривизна $|H_\alpha H^\alpha| \neq \mathrm{const}$, то тензор кривизны многообразия (M, g) удовлетворяет условию (4.30), где векторное поле A_r градиентно и связано с функцией $\psi = H_\alpha H^\alpha$ равенством (4.29).*

5. $A_r = 0$, $D_r \neq 0$. Этот случай фактически не отличается от изученного в п. 4. Именно, если $A_r = 0$, $D_r \neq 0$, то (2.19) принимает вид

$$\begin{aligned}\nabla_r R_{lkji} = {} & D_l(R_{rkji} - H_\alpha H^\alpha G_{rkji}) + D_k(R_{lrji} - H_\alpha H^\alpha G_{lrji}) + D_j(R_{lkri} - H_\alpha H^\alpha G_{lkri}) + \\ & + D_i(R_{lkjr} - H_\alpha H^\alpha G_{lkjr}) + \nabla_r(H_\alpha H^\alpha)G_{lkji} + \tfrac{1}{2}[\nabla_l(H_\alpha H^\alpha)G_{rkji} + \\ & + \nabla_k(H_\alpha H^\alpha)G_{lrji} + \nabla_j(H_\alpha H^\alpha)G_{lkri} + \nabla_i(H_\alpha H^\alpha)G_{lkjr}].\end{aligned} \tag{5.1}$$

Применяя тождество Бианки, находим

$$D_l(R_{rkji} - H_\alpha H^\alpha G_{rkji}) + D_k(R_{lrji} - H_\alpha H^\alpha G_{lrji}) = D_r(R_{lkji} - H_\alpha H^\alpha G_{lkji}), \tag{5.2}$$

$$D_j(R_{lkri} - H_\alpha H^\alpha G_{lkri}) + D_i(R_{lkjr} - H_\alpha H^\alpha G_{lkjr}) = D_r(R_{lkji} - H_\alpha H^\alpha G_{lkji}). \tag{5.3}$$

Подставляя (5.2) и (5.3) в (5.1), имеем

$$\begin{aligned}\nabla_r R_{lkji} = {} & 2D_r(R_{lkji} - \psi G_{lkji}) + \nabla_r(H_\alpha H^\alpha)G_{lkji} + \\ & + \tfrac{1}{2}[\nabla_l(H_\alpha H^\alpha)G_{rkji} + \nabla_k(H_\alpha H^\alpha)G_{lrji} + \nabla_j(H_\alpha H^\alpha)G_{lkri} + \nabla_i(H_\alpha H^\alpha)G_{lkjr}].\end{aligned}$$

Но это — условие (4.1), где вместо A_r фигурирует $2D_r$. Следовательно, если в теоремах 4.1, 4.2 и 4.4 поменяем ролями первый и второй ассоциированные векторы и заменим A_r на $2D_r$, то теоремы останутся справедливыми.

6. $A_r = kD_r$. При этом равенство (2.19) имеет вид

$$\nabla_r R_{lkji} = kD_r(R_{lkji} - H_\alpha H^\alpha G_{lkji}) + D_l(R_{rkji} - H_\alpha H^\alpha G_{rkji}) + D_k(R_{lrji} - H_\alpha H^\alpha G_{lrji}) + \\ + D_j(R_{lkri} - H_\alpha H^\alpha G_{lkri}) + D_i(R_{lkjr} - H_\alpha H^\alpha G_{lkjr}) + \nabla_r(H_\alpha H^\alpha)G_{lkji} + \tfrac{1}{2}[\nabla_l(H_\alpha H^\alpha)G_{rkji} + \\ + \nabla_k(H_\alpha H^\alpha)G_{lrji} + \nabla_j(H_\alpha H^\alpha)G_{lkri} + \nabla_i(H_\alpha H^\alpha)G_{lkjr}]. \quad (6.1)$$

Применяя тождество Бианки, получим

$$(k-2)[D_r(R_{lkji} - H_\alpha H^\alpha G_{lkji}) + D_l(R_{krji} - H_\alpha H^\alpha G_{krji}) + D_k(R_{rlji} - H_\alpha H^\alpha G_{rlji})] = 0,$$
$$(k-2)[D_r(R_{lkji} - H_\alpha H^\alpha G_{lkji}) + D_j(R_{lkir} - H_\alpha H^\alpha G_{lkir}) + D_i(R_{lkrj} - H_\alpha H^\alpha G_{lkrj})] = 0.$$

Значит, если $k \neq 2$, то имеем (5.1) и (5.3) соответственно. Но, подставляя (5.2) и (5.3) в (6.1), находим

$$\nabla_r R_{lkji} = (k+2)D_r(R_{lkji} - H_\alpha H^\alpha G_{lkji}) + \nabla_r(H_\alpha H^\alpha)G_{lkji} + \tfrac{1}{2}[\nabla_l(H_\alpha H^\alpha)G_{rkji} + \\ + \nabla_k(H_\alpha H^\alpha)G_{lrji} + \nabla_j(H_\alpha H^\alpha)G_{lkri} + \nabla_i(H_\alpha H^\alpha)G_{lkjr}]. \quad (6.2)$$

Если $k = -2$, то (6.2) приводится к (3.1). Если же $k \neq 2$ и $k \neq -2$, то (6.2) превращается в условие (4.1), где вместо A_r стоит $(2+k)D_r$. Таким образом, имеем новый случай только при $k = 2$.

Легко видеть, что при $k = 2$ равенство (6.1) тогда и только тогда приводится к виду

$$\nabla_r R_{lkji} = 2D_r R_{lkji} + D_l R_{rkji} + D_k R_{lrji} + D_j R_{lkri} + D_i R_{lkjr}, \quad (6.3)$$

когда

$$\nabla_r(H_\alpha H^\alpha) - 2D_r \cdot H_\alpha H^\alpha = 0,$$

т. е. либо когда $H_\alpha H^\alpha = 0$, либо когда

$$D_r = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^r}\log(H_\alpha H^\alpha). \quad (6.4)$$

К тому же при $k = 2$ равенство (6.1) приводится к виду

$$\nabla_r R_{lkji} = 2D_r(R_{lkji} - H_\alpha H^\alpha G_{lkji}) + D_l(R_{rkji} - H_\alpha H^\alpha G_{rkji}) + D_k(R_{lrji} - H_\alpha H^\alpha G_{lrji}) + \\ + D_j(R_{lkri} - H_\alpha H^\alpha G_{lkri}) + D_i(R_{lkjr} - H_\alpha H^\alpha G_{lkjr}) \quad (6.5)$$

тогда и только тогда, когда $H_\alpha H^\alpha = \mathrm{const} \neq 0$.

Итак, установлена

Теорема 6.1. *Пусть (M, g) — вполне омбилическое подмногообразие слабо симметрического многообразия. Пусть $A_r = kD_r$, где A_r и D_r — ортогональные проекции первого и второго ассоциированных векторов на (M, g). Тогда*

(M, g) удовлетворяет условию (6.3) *либо когда его средняя кривизна обращается в нуль, либо когда выполняется условие* (6.4);

(M, g) удовлетворяет условию (6.5) *тогда и только тогда, когда $H_\alpha H^\alpha = \mathrm{const} \neq 0$.*

Пример. Пусть $(\overline{M}, \overline{g})$ и $(\overset{*}{M}, \overset{*}{g})$ ($\dim \overline{M} = q$, $\dim \overset{*}{M} = n - q$, $1 \leq q < n$) — римановы многообразия, покрытые системой карт $\{\overline{u}, x^a\}$ и $\{\overset{*}{x}, x^A\}$ соответственно, где $a, b, c, d, e \in \{1, 2, \ldots, q\}$,

$A, B, C, D, E \in \{q+1, \dots, n\}$ и, как и раньше, $f, k, j, i, r \in \{1, 2, \dots, n\}$. Пусть σ — положительная C^∞-функция на $\overline{M}$. Косое произведение[1] $M = \overline{M} \times_\sigma \overset{*}{M}$ многообразий $(\overline{M}, \overline{g})$ и $(\overset{*}{M}, \overset{*}{g})$ есть многообразие $\overline{M} \times \overset{*}{M}$ с метрикой $g = \overline{g} \times_\sigma \overset{*}{g}$. Локальные компоненты этого метрического тензора по отношению к произведению карт $\{\overline{u} \times \overset{*}{u}; x^a, x^A\}$ имеют вид

$$g_{ij} = \begin{cases} \overline{g}_{ab}, & \text{если } i = a,\ j = b; \\ \sigma \overset{*}{g}_{AB}, & \text{если } i = A,\ j = B; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Будем помечать черточкой всякий объект, построенный с помощью $\overline{g}_{ab}$, и звездочкой — объект, построенный с помощью $\overset{*}{g}_{AB}$. Объекты без всякой пометки построены с помощью g_{ij}. Локальные компоненты тензора кривизны многообразия $\overline{M} \times_\sigma \overset{*}{M}$, в общем случае не обращающиеся в нуль, имеют вид

$$\begin{aligned} R_{abcd} &= \overline{R}_{abcd}, \\ R_{ABCD} &= \sigma \overset{*}{R}_{ABCD} - \frac{\Delta\sigma}{4\sigma^2} G_{ABCD}, \\ R_{AabB} &= -\frac{1}{2\sigma} T_{ab} g_{AB}, \end{aligned}$$

где

$$\sigma_a = \frac{\partial \sigma}{\partial x^a}, \quad \Delta\sigma = \overline{g}_{ab}\sigma_a\sigma_b, \quad T_{ab} = \overline{\nabla}_a \sigma_b - \frac{1}{2\sigma}\sigma_a\sigma_b,$$

т. е. T — тензор типа $(0, 2)$ с локальными компонентами T_{ij}, имеющими строение T_{ab}, $T_{aB} = T_{Ba} = T_{AB} = 0$.

Не равные тождественно нулю компоненты тензора $\nabla_r R_{lkji}$ таковы

$$\begin{aligned} &\nabla_e R_{abcd} = \overline{\nabla}_e \overline{R}_{abcd}, \quad \nabla_E E_{ABCD} = \sigma \overset{*}{\nabla}_E \overset{*}{R}_{ABCD}, \\ &\nabla_a R_{ABCD} = -\frac{\sigma_a}{\sigma} R_{ABCD} + \frac{1}{4}\left[\frac{\sigma_a}{\sigma^3}\Delta\sigma - \frac{1}{\sigma^2}\frac{\partial}{\partial x^a}\Delta\sigma\right] G_{ABCD}, \\ &\nabla_d R_{AabB} = \frac{1}{2\sigma}\left(\frac{\sigma_d}{\sigma} T_{ab} - \overline{\nabla}_d T_{ab}\right) g_{AB}, \\ &\nabla_B R_{Aabc} = \frac{1}{2\sigma} g_{AB}\left(\delta_d \overline{R}^d{}_{abc} - \frac{\sigma_b}{2\sigma} T_{ac} + \frac{\sigma_c}{2\sigma} T_{ab}\right), \\ &\nabla_D R_{ABCa} = -\frac{\sigma_a}{2\sigma} R_{ABCD} - \frac{1}{4\sigma^2}\sigma^b T_{ba} G_{ABCD.} \end{aligned}$$

Предположим теперь, что

(а) $\overline{M}$ — пространство постоянной кривизны, т. е. $\overline{R}_{abcd} = k\overline{G}_{abcd}$;

(б) функция σ удовлетворяет условию $T_{ab} = -2k\sigma g_{ab}$;

(в) $\overset{*}{M}$ — симметрическое риманово пространство, т. е. $\overset{*}{\nabla}_E \overset{*}{R}_{ABCD} = 0$.

Тогда единственными не равными нулю компонентами тензора $\nabla_r R_{lkji}$ являются

$$\begin{aligned} \nabla_a R_{ABCD} &= -\frac{\sigma_a}{\sigma}(R_{ABCD} - kG_{ABCD}), \\ \nabla_D R_{ABCa} &= -\frac{\sigma_a}{2\sigma}(R_{ABCD} - kG_{ABCD}). \end{aligned}$$

[1] Мы возвращаемся здесь к термину "косое произведение", учитывая, что первоначальный смысл, приданный ему Н. Стинродом, теперь повсеместно нашел выражение в термине "главное расслоенное пространство"; однако всюду далее пространство $\overline{M} \times_\sigma M$ будет называться "полуприводимым римановым пространством"(примечание переводчика).

Значит, если выберем векторное поле D_i так, чтобы иметь $D_a = -\frac{\sigma_a}{2\sigma}$, $D_A = 0$, то выполнится условие (6.5), где $H_\alpha H^\alpha = k = \text{const}$.

Заметим, что если $k = 0$, то (6.5) приводится к (6.3), т. е. получаем пример многообразия, удовлетворяющего условию (1.2). Если $k = 0$ и вместо (в) выполняется предположение

(в′) $\overset{*}{M}$ — рекуррентное многообразие. т. е. $\overset{*}{\nabla}_E \overset{*}{R}_{ABCD} = A_E \overset{*}{R}_{ABCD}$,

то полуприводимое риманово пространство $M = \overline{M} \times_\sigma \overset{*}{M}$ удовлетворяет условию (1.1), где первый ассоциированный вектор имеет компоненты $A_a = 0$, A_E, а второй — компоненты $D_a = -\frac{\sigma_a}{2\sigma}$, $D_a = 0$.

Литература

1. Binh T.Q. *On weakly symmetric Riemannian spaces* // Publ. Math. – 1993. – V. 42. – № 1–2. – P.103–107.
2. Chaki M.C. *On pseudo-symmetric manifolds* // Ann. st. Univ. Iasi. – 1987. – V. 33. – № 1. – P. 53–58.
3. Chaki M.C., De U.C. *On pseudo-symmetric spaces* // Acta Math. – 1989. – V. 54. – P. 185–190.
4. Deszcz R. *On pseudosymmetric spaces* // Bull. Soc. math. Belg. – 1992. – V. 44. – Ser. A. – P. 1–34.
5. Ewert-Krzemieniewski S. *On some generalization of recurrent manifolds* // Mathematica Pannonica – 1993. – V. 4. – № 2. – P. 191–203.
6. Ewert-Krzemieniewski S. *On totally umbilical submanifolds of manifolds with certain recurrent condition imposed on the curvature tensor* // Mathematica Pannonica. – 1994. – V. 5. – № 1. – P. 119–130.
7. Miyazawa T., Chūman G. *On certain subspaces of Riemannian recurrent spaces* // Tensor. – 1972. – V. 23. – № 2. – P. 253–260.
8. Кручкович Г.И. *Об одном классе римановых пространств* // Тр. семин. по векторн. и тензорн. анализу. – 1961. – № 11. – С. 103–128.
9. Prvanović M. *Generalized recurrent Riemannian manifold* // Anal. sti. Univ. Iasi. – 1992. – V. 38. – № 4. – P. 423–434.
10. Prvanović M. *On weakly symmetric Riemannian manifolds* // Publ. Math. – 1995. – V. 46. – № 1–2. – P. 19–25.
11. Ruse H.S., Walker A.G., Willmore T.J. *Harmonic spaces.* – Roma: Edizione Cremonese, 1961.
12. Tamãssy L., Binh T.Q. *On weakly symmetric and weakly projective symmetric Riemannian manifolds* // Coll. Math. Soc. J. Bolyai. – 1992. – V. 56. – P. 663–669.

Белградский университет
(*Югославия*)

Поступила
18.09.1996