И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

1998 МАТЕМАТИКА № 6 (433)

УДК 514.763

С.Г. ЛЕЙКО

P-ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ИХ ГРУППЫ В КАСАТЕЛЬНЫХ РАССЛОЕНИЯХ, ИНДУЦИРОВАННЫЕ КОНЦИРКУЛЯРНЫМИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯМИ БАЗИСНОГО МНОГООБРАЗИЯ

В работе исследованы уплощающие свойства группы Ли G_r^I преобразований касательного расслоения $T(M)$, наделенного полным лифтом ∇^I аффинной связности ∇ и полным лифтом g^I метрики g на базе M, которая индуцирована группой Ли G_r концикулярных преобразований M. Как и для группы геодезических (проективных) преобразований [1], полученные результаты выявляют определенные геометрические особенности индуцированной группы G_r^I в рамках теории p-геодезических отображений и дают конструктивный способ построения таких отображений, исходя из концикулярных преобразований базы.

1. P-геодезические конечные и инфинитезимальные преобразования

Приведем вначале необходимые для дальнейшего факты из теории p-геодезических конечных и инфинитезимальных преобразований [1]–[3].

Рассмотрим дифференцируемое многообразие M^n с аффинной связностью без кручения ∇. Пусть $x^h = x^h(t)$ — параметрические уравнения кривой $\gamma : (t_0, t_1) \to M^n$ относительно локальных координат $x^1, \dots, x^n$, $\xi^h = dx^h/dt$ — ее касательный вектор, $\xi_q^h = \nabla_t \xi_{q-1}^h = d\xi_{q-1}^h/dt + \Gamma_{ij}^h \xi^i \xi_{q-1}^j$ — вектор q-й кривизны кривой. Здесь $\xi_0^h \equiv \xi^h$, $i, j, k, \dots = \overline{1, n}$; $\Gamma_{ij}^h(x)$ — коэффициенты ∇.

Определение 1. Если в точке $\gamma(t)$ кривой γ векторы $\xi^h, \xi_1^h, \dots, \xi_{p-1}^h$ линейно независимы, а вектор ξ_p^h уже линейно зависим с ними, то говорят, что в этой точке кривая γ имеет уплощение p-го порядка. В случае, когда кривая γ имеет уплощение p-го порядка в каждой своей точке, ее называем p-геодезической кривой.

Таким образом, p-геодезические кривые характеризуются условиями

$$\xi^{[h} \xi_1^{h_1} \dots \xi_p^{h_p]} = 0, \quad \xi^{[h} \xi_1^{h_1} \dots \xi_{p-1}^{h_{p-1}]} \neq 0,$$

а их дифференциальные уравнения имеют вид

$$\xi_p^h(t) = \rho_{p-1} \xi_{p-1}^h + \dots + \rho_1 \xi_1^h + \rho_0 \xi^h,$$

где $\rho_{p-\alpha}(t)$, $\alpha = \overline{1, p}$, — некоторые функции параметра.

Параметр t на геодезической кривой называем α-каноническим, если $\rho_{p-\alpha}(t) \equiv 0$ вдоль этой кривой. Такой параметр всегда существует на любой p-геодезической кривой, а отдельные из них допускают кратный α-канонический (для нескольких α) и абсолютный (для всех α) канонический параметр.

В (псевдо)римановых пространствах вдоль p-геодезических кривых обращаются в нуль все ее кривизны, начиная с p-й [2]–[4].

Определение 2. Диффеоморфизм $\rho : M^n \to \overline{M}^n$ двух аффинносвязных пространств без кручения называется p-геодезическим, если для каждой геодезической кривой $\gamma : (t_0, t_1) \to M^n$ ее образ — кривая $\rho \circ \gamma$ — имеет в каждой точке уплощение порядка $q \leq p$. Число q в общем случае зависит как от выбора кривой γ, так и точки на ней, а число p фиксировано и максимальное из всех q. P-геодезический диффеоморфизм (на себя) $\pi : M^n \to M^n$ называем p-геодезическим конечным преобразованием аффинносвязного пространства (M^n, ∇).

Таким образом, p-геодезические диффеоморфизмы характеризуются с геометрической точки зрения тем, что они отображают всякую геодезическую кривую так, что ее образ есть q-геодезическая кривая, причем q может меняться от точки к точке и $q \leq p$. Если при p-геодезическом диффеоморфизме ρ канонический параметр каждой геодезической кривой γ является на p-геодезических кривых $\rho \circ \gamma$ α-каноническим параметром, то ρ называем α-каноническим p-геодезическим диффеоморфизмом.

Диффеоморфизм $\rho : M^n \to \overline{M}^n$ двух пространств с аффинными связностями без кручения ∇, $\overline{\nabla}$ будет p-геодезическим тогда и только тогда, когда в общей по этому диффеоморфизму локальной системе координат выполняются условия

$$\delta^{[h}_{(a} P^{h_1}_{a_1 a_2} \dots P^{h_p]}_{b_1 \dots b_{p+1})} = 0, \tag{1}$$

$$\delta^{[h}_{(a} P^{h_1}_{a_1 a_2} \dots P^{h_{p-1}]}_{b_1 \dots b_p)} \neq 0 \quad (p > 1). \tag{2}$$

Здесь

$$P^h_{ij} = \overline{\Gamma}^h_{ij} - \Gamma^h_{ij}, \quad P^h_{a_1 \dots a_{q+1}} = \overline{\nabla}_{(a_{q+1}} P^h_{a_1 \dots a_q)} + q P^b_{(a_1 a_2} P^h_{a_3 \dots a_{q+1})b},$$

круглые скобки означают симметрирование, а квадратные — альтернирование.

Соотношения (1), (2) называем основными уравнениями p-геодезического диффеоморфизма. В случае α-канонического диффеоморфизма в (1) нужно соответственно $\alpha = p, p-1, \dots, 1$ опускать множитель, стоящий на первом, втором, ..., предпоследнем месте. При этом для кратных α-канонических диффеоморфизмов опускаются соответственно сразу несколько сомножителей, а для абсолютно канонического p-геодезического диффеоморфизма

$$P^h_{b_1 \dots b_{p+1}} = 0. \tag{3}$$

Пусть $\tau : \widetilde{x}^h = x^h + \varepsilon X^h(x^1, \dots, x^n)$ — инфинитезимальное преобразование многообразия (M^n, ∇), соответствующее векторному полю $X = X^h \partial / \partial x^h$ (ε — инфинитезимальный параметр).

Определение 3. Будем говорить, что инфинитезимальное преобразование τ (или векторное поле X) сообщает геодезической кривой $\gamma : x^h = x^h(t)$ уплощение q-го порядка в точке $\gamma(t)$, если

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-q} \widetilde{\xi}^{[h} \widetilde{\xi}^{h_1}_1 \dots \widetilde{\xi}^{h_q]} = 0$$

и число q минимальное из возможных.

Определение 4. Инфинитезимальное локальное преобразование τ многообразия (M^n, ∇) называем p-геодезическим инфинитезимальным преобразованием (p-г. и. п.), если на каждой геодезической кривой $\gamma : (t_0, t_1) \to M^n$ оно сообщает каждой точке $\gamma(t)$ уплощение q-го порядка, $q \leq p$. Число q может зависеть как от выбора геодезической кривой γ, так и от выбора точки на ней, а число p максимальное из всех возможных чисел q.

С геометрической точки зрения p-г. и. п. обладают той особенностью, что они преобразуют всякую геодезическую кривую γ в кривую $\widetilde{\gamma} = \tau \circ \gamma$, для которой ее уплощенное приближение $\widetilde{\gamma}_\varepsilon$ является на отдельных участках q-геодезической кривой, $q \leq p$. Если при p-г. и. п. τ канонический параметр каждой геодезической кривой γ является на соответствующих уплощенных приближениях $\widetilde{\gamma}_\varepsilon$ α-каноническим параметром, то τ называется α-каноническим p-г. и. п.

Инфинитезимальное преобразование $\tau : M^n \to M^n$ будет p-геодезическим тогда и только тогда, когда для поля X выполнены условия

$$\delta^{[h}_{(a} L^{h_1}_{a_1 a_2} \dots L^{h_p]}_{b_1 \dots b_{p+1})} = 0, \tag{4}$$

$$\delta^{[h}_{(a} L^{h_1}_{a_1 a_2} \dots L^{h_{p-1}]}_{b_1 \dots b_p)} \neq 0 \quad (p > 1). \tag{5}$$

Здесь $L^h_{ij} = L_X \Gamma^h_{ij}$ — производная Ли коэффициентов связности ∇,

$$L^h_{i_1 \dots i_{q+1}} = \nabla_{(i_{q+1}} L^h_{i_1 \dots i_q)}.$$

Соотношения (4), (5) называем основными уравнениями p-г. и. п. Для α-канонического p-г. и. п. в уравнениях (4) нужно опускать соответствующие множители в точности так же, как и в случае α-канонического p-геодезического диффеоморфизма, а для абсолютного p-г. и. п. имеем

$$L^h_{b_1 \dots b_{p+1}} = 0. \tag{6}$$

2. P-геодезические преобразования $T(M)$, индуцированные концикулярными преобразованиями базы M

В дальнейшем будем использовать известные факты из дифференциальной геометрии касательных расслоений [5], [6].

Рассмотрим (псевдо)риманово пространство (M^n, g) с римановой связностью ∇, порожденной метрикой g. Инфинитезимальное преобразование τ этого пространства, соответствующее векторному полю X, называется концикулярным, если оно конформное, т. е.

$$L_X g_{ij} = a g_{ij}, \tag{7}$$

и функция a порождает специальное концикулярное ковекторное поле $a_i = \partial a / \partial x^i$:

$$\nabla_j a_i = \varphi g_{ij}. \tag{8}$$

Векторное поле X называют конформным Киллинговым полем. Концикулярное инфинитезимальное преобразование геометрически характеризуется тем, что оно с точностью до членов второго порядка сохраняет геодезические окружности (циклы) ([7], сс. 195–200, 354–360), т. е. кривые, у которых первая кривизна Френе постоянна, а последующие — нули.

Это преобразование является специальным 2-г. и. п. Действительно, используя свойства производных Ли [8], из (7), (8) получим

$$\begin{aligned} L^h_{ij} = L_X \Gamma^h_{ij} &= \frac{1}{2} g^{kh} [\nabla_j (L_X g_{ik}) + \nabla_i (L_X g_{kj}) - \nabla_k (L_X g_{ij})] = \\ &= \frac{1}{2} (a_j \delta^h_i + a_i \delta^h_j - a^h g_{ij}), \quad a^h = g^{hk} a_k; \\ L^h_{ijk} = \nabla_{(k} L^h_{ij)} &= \frac{1}{2} \varphi g_{(ij}\, \delta^h_{k)}. \end{aligned} \tag{9}$$

Отсюда вытекает

$$\delta^{[h}_{(l} L^{m]}_{ijk)} = 0, \quad \delta^h_{(k} L^l_{ij)} \neq 0, \quad \text{если} \quad a \neq \mathrm{const},$$

что в сопоставлении с (4), (5) позволяет сделать вывод: концикулярное негомотетическое инфинитезимальное преобразование является 1-каноническим 2-г. и. п.

Рассмотрим теперь инфинитезимальные преобразования касательного расслоения $T(M)$, соответствующие вертикальному и полному лифтам векторного поля X,

$$X^0 : \begin{pmatrix} 0 \\ X^h \end{pmatrix}, \quad X^I : \begin{pmatrix} X^h \\ \partial X^h \end{pmatrix}, \quad \partial X^h = x^{\overline{k}} \partial_k X^h.$$

Таким образом, в индуцированных координатах $x^A = (x^a, x^{\overline{a}})$, $A, B, C, \ldots = 1, \ldots, n, \overline{1}, \ldots, \overline{n}$ имеем

$$\tau^0 : \begin{cases} \widetilde{x}^k = x^k; \\ \widetilde{x}^{\overline{k}} = x^{\overline{k}} + \varepsilon X^k, \end{cases} \qquad \tau^I : \begin{cases} \widetilde{x}^k = x^k + \varepsilon X^k; \\ \widetilde{x}^{\overline{k}} = x^{\overline{k}} + \varepsilon \partial X^k. \end{cases}$$

На $T(M)$ рассмотрим полный лифт аффинной связности ∇^I, который, как известно, является римановой связностью полного лифта метрики g^I. В индуцированных координатах

$$g^I : \begin{pmatrix} \partial g_{ij} & g_{ij} \\ g_{ij} & 0 \end{pmatrix}, \qquad g^0 : \begin{pmatrix} g_{ij} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\nabla^I : \widetilde{\Gamma}^h_{ij} = \Gamma^h_{ij}, \quad \widetilde{\Gamma}^h_{\overline{i}j} = 0, \quad \widetilde{\Gamma}^h_{i\overline{j}} = 0, \quad \widetilde{\Gamma}^h_{\overline{i}\overline{j}} = 0,$$
$$\widetilde{\Gamma}^{\overline{h}}_{ij} = \partial \Gamma^h_{ij}, \quad \widetilde{\Gamma}^{\overline{h}}_{\overline{i}j} = \Gamma^h_{ij}, \quad \widetilde{\Gamma}^{\overline{h}}_{i\overline{j}} = \Gamma^h_{ij}, \quad \widetilde{\Gamma}^{\overline{h}}_{\overline{i}\overline{j}} = 0.$$

Задача, таким образом, сводится к изучению уплощающих свойств инфинитезимальных преобразований τ^0, τ^I (псевдо)риманова пространства $(T(M), g^I)$.

Обозначим $A = a^h \partial/\partial x^h$, $\omega = a_i dx^i$. Тогда (7), (8) можем записать в инвариантной безындексной форме

$$L_X g = a g, \quad \nabla \omega = \varphi g, \quad \nabla A = \varphi \delta,$$

где δ — единичный аффинор. Отсюда получаем

$$L_{X^0} g^I = (L_X g)^0 = a g^0, \quad L_{X^I} g^I = (L_X g)^I + a g^I + a^I g^0, \tag{10}$$
$$\nabla^I \omega^I = (\nabla \omega)^I = \varphi g^I + \varphi^I g^0, \quad \nabla^I \omega^0 = (\nabla \omega)^0 = \varphi g^0,$$
$$\nabla^I A^I = (\nabla A)^I = \varphi \widetilde{\delta} + \varphi^I F, \quad \nabla^I A^0 = (\nabla A)^0 = \varphi F, \tag{11}$$

где $\widetilde{\delta} = \delta^I$ — единичный аффинор на $T(M)$, $F = \delta^0 : \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \delta^h_i & 0 \end{pmatrix}$ — вертикальный лифт единичного аффинора.

Представим (9) в инвариантной форме

$$(L_X \nabla)(Y, Z) = \frac{1}{2}[\omega(Y) Z + \omega(Z) Y - A g(Y, Z)]$$

и возьмем вертикальный и полный лифты этого равенства

$$(L_{X^0} \nabla^I)(Y^I, Z^I) = \frac{1}{2}\omega^0(Y^I) F(Z^I) + \frac{1}{2}\omega^0(Z^I) F(Y^I) - \frac{1}{2} A^0 g^0(X^I, Y^I);$$
$$(L_{X^I} \nabla^I)(Y^I, Z^I) = \frac{1}{2}\omega^I(Y^I) F(Z^I) + \frac{1}{2}\omega^I(Z^I) F(Y^I) +$$
$$+ \frac{1}{2}\omega^0(Y^I) Z^I + \frac{1}{2}\omega^0(Z^I) Y^I - \frac{1}{2} A^0 g^I(Y^I, Z^I) - \frac{1}{2} A^I g^0(Y^I, Z^I).$$

Как известно ([5], с. 33), для совпадения тензорных полей типа $\binom{0}{s}$, $\binom{1}{s}$ на $T(M)$ достаточно их совпадения на полных лифтах векторных полей. Следовательно, из последних двух равенств соответственно X^0, X^I получаем

$$X^0 : L^D_{AB} = \frac{1}{2}\omega^0_A F^D_B + \frac{1}{2}\omega^0_B F^D_A - \frac{1}{2}(A^0)^D g^0_{AB}; \tag{12}$$
$$X^I : L^D_{AB} = \frac{1}{2}\omega^0_A \delta^D_B + \frac{1}{2}\omega^0_B \delta^D_A + \frac{1}{2}\omega^I_A F^D_B + \frac{1}{2}\omega^I_B F^D_A - \frac{1}{2}(A^0)^D g^I_{AB} - \frac{1}{2}(A^I)^D g^0_{AB}. \tag{13}$$

Найдем теперь величины $L^D_{ABC} = \nabla_{(C} L^D_{AB)}$. При этом учтем (11), $\nabla^I F = 0$, $\nabla^I g^0 = \nabla^I g^I = 0$. Тогда из (12), (13) соответственно вытекает

$$X^0 : L^D_{ABC} = F^D_{(A} \nabla^I_C \omega^0_{B)} - \frac{1}{2} g^0_{(AB} \nabla^I_{C)} (A^0)^D = \frac{\varphi}{2} g^0_{(AB} F^D_{C)}; \tag{14}$$

$$\begin{aligned} X^I : L^D_{ABC} &= \delta^D_{(A} \nabla^I_C \omega^0_{B)} + F^D_{(A} \nabla^I_C \omega^I_{B)} - \frac{1}{2} g^I_{(AB} \nabla^I_{C)} (A^0)^D - \frac{1}{2} g^0_{(AB} \nabla^I_{C)} (A^I)^D = \\ &= \varphi \delta^D_{(A} g^0_{BC)} + F^D_{(A} [\varphi g^I_{BC)} + \varphi^I g^0_{BC)}] - \frac{1}{2} \varphi g^I_{(AB} F^D_{C)} - \\ &\quad - \frac{1}{2} g^0_{(AB} [\varphi \delta^D_{C)} + \varphi^I F^D_{C)}] = \frac{1}{2} \varphi g^0_{(AB} \delta^D_{C)} + \frac{1}{2} [\varphi g^I_{(AB} + \varphi^I g^0_{(AB}] F^D_{C)}. \end{aligned} \tag{15}$$

Аналогичным образом находим величины

$$L^E_{ABCD} = \nabla^I_{(D} L^E_{ABC)}; \quad X^0 : L^E_{ABCD} = \frac{1}{2} \varphi_{(D} g^0_{AB} F^E_{C)}, \quad \varphi_D = \partial\varphi / \partial x^D; \tag{16}$$

$$X^I : L^E_{ABCD} = \frac{1}{2} \varphi_{(D} g^0_{AB} \delta^E_{C)} + \frac{1}{2} [\varphi_{(D} g^I_{AB} + \varphi^I_{(D} g^0_{AB}] F^E_{C)}. \tag{17}$$

Равенства (14)–(17) позволяют заключить, что

$$X^0 : L^{[E_1}_{(A_1 B_1 C_1} L^{E_2]}_{A_2 B_2 C_2 D_2)} = 0, \tag{18}$$

$$X^I : L^{[E_1}_{(A_1 B_1 C_1} L^{E_2}_{A_2 B_2 C_2 D_2} L^{E_3]}_{A_3 B_3 C_3 D_3 F_3)} = 0. \tag{19}$$

Сопоставляя (18), (19) с основными уравнениями p-г. и. п., приходим к следующему результату.

Теорема 1. *Пусть τ — конциркулярное (не гомотетическое, т. е. $a \neq \mathrm{const}$) инфинитезимальное преобразование (псевдо)риманова пространства (M, g), соответствующее конформному Киллингову полю X. Тогда инфинитезимальные преобразования τ^0, τ^I касательного расслоения $T(M)$ относительно метрики полного лифта g^I обладают следующими уплощающими свойствами:*

I. *в общем случае $\varphi \neq \mathrm{const}$*
   0. *τ^0 является $3,2$-каноническим 3-г. и. п.;*
   1. *τ^I является $4,3$-каноническим 4-г. и. п.;*

II. *в случае $\varphi = \mathrm{const} \neq 0$, τ^0, τ^I являются абсолютно каноническими 3-г. и. п.;*

III. *в случае $\varphi = \mathrm{const} = 0$, τ^0, τ^I являются абсолютно каноническими 2-г. и. п.*

Если же τ гомотетическое (т. е. $a = \mathrm{const}$), то τ^0, τ^I являются абсолютно каноническими (1-г. и. п.) (т. е. аффинными), причем τ^I является также гомотетическим.

Как показал К. Яно ([7], сс. 442–448, 505–511), если $\exp(tX)$ является 1-параметрической группой конформных конечных преобразований (псевдо)риманова пространства (M, g), соответствующей конциркулярному полю X, то эта группа переводит геодезические окружности снова в геодезические окружности. Соответствующие преобразования $\pi \in \exp(tX)$ названы конциркулярными. Основные уравнения конциркулярного преобразования π имеют вид

$$\overline{g}_{ij} = e^{2\sigma} g_{ij}, \quad \nabla_j \sigma_i = \sigma_i \sigma_j + \nu g_{ij}, \quad \sigma_i = \partial\sigma / \partial x^i, \tag{20}$$

где $\overline{g}_{ij}(x) = g_{ij}(\pi(x))$ — метрический тензор, увлеченный из g преобразованием π.

Для соответствующих g и $\overline{g}$ символов Кристоффеля получаем тензор аффинной деформации, порожденной π ([4], с. 607)

$$P^h_{ij} = \overline{\Gamma}^h_{ij} - \Gamma^h_{ij} = \sigma_i \delta^h_j + \sigma_j \delta^h_i - \sigma^h g_{ij}, \quad \sigma^h = g^{hk} \sigma_k. \tag{21}$$

Обозначим $B=\sigma^h\partial/\partial x^h$, $\theta=\sigma_i dx^i$ и представим (20), (21) в инвариантной безындексной форме

$$\overline{g}=e^{2\sigma}g,\quad \nabla\theta=\theta\otimes\theta+\nu g,\quad \nabla B=B\otimes\theta+\nu\delta; \tag{22}$$
$$P(Y,Z)=\theta(Y)Z+\theta(Z)Y-Bg(Y,Z). \tag{23}$$

Рассмотрим тензор $\widetilde{P}$ аффинной деформации на $(T(M),g^I)$, порожденный преобразованием $d\pi$. Так как полный лифт ∇^I метрической римановой связности ∇ совпадает с римановой связностью метрики g^I, то $\widetilde{P}=P^I$. Взяв полный лифт равенств (23), аналогично предыдущему получим

$$\widetilde{P}^C_{AB}=\theta^0_A\delta^C_B+\theta^0_B\delta^C_A+\theta^I_AF^C_B+\theta^I_BF^C_A-(B_0)^Cg^I_{AB}-(B^I)^Cg^0_{AB}. \tag{24}$$

В свою очередь, полные лифты равенств (22) дают

$$\overline{g}^I=e^{2\sigma}g^I+(e^{2\sigma})^Ig^0, \tag{25}$$
$$\nabla^I_B\theta^0_A=\theta^0_A\theta^0_B+\nu g^0_{AB},\quad \nabla^I_A(B^0)^C=(B^0)^C\theta^0_A+\nu F^C_A; \tag{26}$$
$$\begin{aligned}&\nabla^I_B\theta^I_A=\theta^0_A\theta^I_B+\theta^I_A\theta^0_B+\nu g^I_{AB}+\nu^Ig^0_{AB},\\ &\nabla^I_A(B^I)^C=(B^0)^C\theta^I_A+(B^I)^C\theta^0_A+\nu\delta^C_A+\nu^IF^C_A.\end{aligned} \tag{27}$$

Кроме этого имеют место алгебраические соотношения

$$\begin{aligned}&F^C_BF^B_A=0,\quad F^C_A(B^0)^A=0,\quad F^C_A(B^I)^A=(B^0)^C,\\ &g^0_{AB}F^B_C=0,\quad g^I_{AB}F^B_C=g^0_{AC},\quad g^0_{AB}(B^0)^B=0,\\ &g^0_{AB}(B^I)^B=\theta^0_A,\quad g^I_{AB}(B^0)^B=\theta^0_A,\quad g^I_{AB}(B^I)^B=\theta^I_A,\\ &\theta^0_E(B^0)^E=0,\quad \theta^0_E(B^I)^E=\sigma_i\sigma^i=\Delta_1\sigma,\quad F^A_B\theta^0_A=0,\\ &\theta^I_E(B^0)^E=\Delta_1\sigma,\quad \theta^I_E(B^I)^E=\partial\Delta_1\sigma,\quad F^A_B\theta^I_A=\theta^0_B.\end{aligned} \tag{28}$$

Возьмем на $(T(M),g^I)$ геодезическую кривую $\gamma: x^A=x^A(t)$, отнесенную к каноническому параметру. Тогда

$$\xi^A_1=\nabla^I_t\xi^A=0,\quad \xi^A=dx^A/dt,\quad g^I_{AB}\xi^A\xi^B=\mathrm{const}. \tag{29}$$

Локальные координаты x^a на M являются общими по преобразованию π, а индуцированные координаты $x^A=(x^a,x^{\overline{a}})$ — общими по преобразованию $d\pi$. Следовательно, преобразованная кривая $(d\pi)\circ\gamma$ имеет те же параметрические уравнения, что и γ, а ее свойство иметь уплощение определенного порядка определяется связностью $\overline{\nabla}^I$, т. е. римановой связностью метрики $\overline{g}^I$. В силу (24), (25) имеем

$$\overline{\xi}^E_1=\overline{\nabla}^I_t\xi^E=\nabla^I_t\xi^E+\widetilde{P}^E_{AB}\xi^A\xi^B=2\theta^0(\xi)\xi^E+2\theta^I(\xi)F^E_B\xi^B-(B^0)^Eg^I_{AB}\xi^A\xi^B-(B^I)^Eg^0_{AB}\xi^A\xi^B. \tag{30}$$

Дифференцированием (30), получим с учетом (24)–(29)

$$\begin{aligned}\overline{\xi}^E_2=\overline{\nabla}^I_t\xi^E_1=\nabla^I_t\overline{\xi}^E_1+P^E_{AB}\xi^A\overline{\xi}^B_1=[6(\theta^0(\xi))^2+\nu(\xi^0,\xi)-\Delta_1\sigma(\xi^0,\xi)]\xi^E+\\ +[12\theta^0(\xi)\theta^I(\xi)+(\nu-\Delta_1\sigma)(\xi^I,\xi)+(\nu^I-\partial\Delta_1\sigma)(\xi^0,\xi)]F^E_A\xi^A-\\ -3[\theta^0(\xi)(\xi^I,\xi)+\theta^I(\xi)(\xi^0,\xi)](B^0)^E-3\theta^0(\xi)(\xi^0,\xi)(B^I)^E,\end{aligned} \tag{31}$$

где $(\xi^0,\xi)=g^0_{AB}\xi^A\xi^B$, $(\xi^I,\xi)=g^I_{AB}\xi^A\xi^B$, $\Delta_1\sigma=g^{ij}\sigma_i\sigma_j$ — первый дифференциальный параметр Бельтрами для функции σ.

Введем обозначения

$$\begin{aligned}
a(\xi,\xi) &= 6(\theta^0(\xi))^2 + (\nu - \Delta_1\sigma)(\xi^0,\xi),\\
b(\xi,\xi) &= 12\theta^0(\xi)\theta^I(\xi) + (\nu - \Delta_1\sigma)(\xi^I,\xi) + (\nu^I - \partial\Delta_1\sigma)(\xi^0,\xi),\\
c(\xi,\xi,\xi) &= -3\theta^0(\xi)(\xi^I,\xi) - 3\theta^I(\xi)(\xi^0,\xi),\\
d(\xi,\xi,\xi) &= -3\theta^0(\xi)(\xi^0,\xi),
\end{aligned}$$

и запишем (31) в более компактном виде

$$\overline{\xi}_2^E = a(\xi,\xi)\xi^E + b(\xi,\xi)F_A^E\xi^A + c(\xi,\xi,\xi)(B^0)^E + d(\xi,\xi,\xi)(B^I)^E. \tag{32}$$

Проводя дальнейшее дифференцирование (32), таким же образом получим

$$\overline{\xi}_3^E = \widetilde{a}(\xi,\xi,\xi)\xi^E + \widetilde{b}(\xi,\xi,\xi)F_A^E\xi^A + \widetilde{c}(\xi,\xi,\xi,\xi)(B^0)^E + \widetilde{d}(\xi,\xi,\xi,\xi)(B^I)^E, \tag{33}$$

где

$$\begin{aligned}
\widetilde{a} &= \nabla_t^I a + (\nu + \Delta_1\sigma)d + 2a\theta^0,\\
\widetilde{b} &= \nabla_t^I b + (\nu + \Delta_1\sigma)c + (\nu^I + \partial\Delta_1\sigma)d + 2b\theta^0 + 2a\theta^I,\\
\widetilde{c} &= \nabla_t^I c + \theta^I d + \theta^0 c - a(\xi^I,\xi) - b(\xi^0,\xi),\\
\widetilde{d} &= \nabla_t^I d + \theta^0 d - a(\xi^0,\xi).
\end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что вектор $\overline{\xi}_4^E$ также будет линейной комбинацией векторов ξ^E, $F_A^E\xi^A$, $(B^0)^E$, $(B^I)^E$, а значит,

$$\xi^{[A}\,\overline{\xi}_1^{A_1}\,\overline{\xi}_2^{A_2}\,\overline{\xi}_3^{A_3}\,\overline{\xi}_4^{A_4]} \equiv 0$$

вдоль каждой геодезической γ. Отсюда можем сделать вывод, что преобразование $d\pi$ является 4-геодезическим, или, возможно, 3-геодезическим, если выполнено тождество $\xi^{[A}\,\overline{\xi}_1^{A_1}\,\overline{\xi}_2^{A_2}\,\overline{\xi}_3^{A_3]} \equiv 0$ при условии $\xi^{[A}\,\overline{\xi}_1^{A_1}\,\overline{\xi}_2^{A_2]} \not\equiv 0$.

Рассмотрим последнее тождество. В силу (30)–(33) оно приобретает вид

$$\xi^{[E}\,F_A^{E_1}(B^0)^{E_2}(B^I)^{E_3]}\xi^A \begin{vmatrix} 2\theta^I(\xi) & -(\xi^I,\xi) & -(\xi^0,\xi)\\ b & c & d\\ \widetilde{b} & \widetilde{c} & \widetilde{d} \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Отсюда

$$\xi^{[E}\,F_A^{E_1}(B^0)^{E_2}(B^I)^{E_3]}\xi^A \equiv 0 \tag{34}$$

или

$$\begin{vmatrix} 2\theta^I(\xi) & -(\xi^I,\xi) & -(\xi^0,\xi)\\ b & c & d\\ \widetilde{b} & \widetilde{c} & \widetilde{d} \end{vmatrix} \equiv 0. \tag{35}$$

Принимая во внимание, что векторы, входящие в (34), имеют координаты

$$\xi : \begin{pmatrix} \xi^a \\ \xi^{\overline{a}} \end{pmatrix}, \quad F(\xi) : \begin{pmatrix} 0 \\ \xi^a \end{pmatrix}, \quad B^0 : \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma^a \end{pmatrix}, \quad B^I : \begin{pmatrix} \sigma^a \\ \partial\sigma^a \end{pmatrix},$$

приходим к выводу, что тождество (34) может иметь место только при условии $\sigma^a = 0$, т. е. $\sigma = \mathrm{const}$. В этом случае $d\pi$ является гомотетическим преобразованием.

Для подробного рассмотрения случая (35) находим

$$\begin{aligned}\widetilde{b} &= 72(\theta^0(\xi))^2\theta^I(\xi) + (11\nu - 5\Delta_1\sigma)[\theta^I(\xi)(\xi^0,\xi) + \theta^0(\xi)(\xi^I,\xi) + \\ &\quad + \theta^0(\xi)(\xi^0,\xi)] + \partial_A(\nu - \Delta_1\sigma)\xi^A(\xi^I,\xi) + \partial_A(\nu^I - \partial\Delta_1\sigma)\xi^A(\xi^0,\xi);\\ \widetilde{c} &= -12(\theta^0(\xi))^2(\xi^I,\xi) - 24\theta^0(\xi)\theta^I(\xi)(\xi^0,\xi) + \\ &\quad + (2\Delta_1\sigma - 8\nu)(\xi^0,\xi)(\xi^I,\xi) + (\partial\Delta_1\sigma - 4\nu^I)(\xi^0,\xi)^2;\\ \widetilde{d} &= (\xi^0,\xi)[-12(\theta^0(\xi))^2 - 4\nu(\xi^0,\xi) + \Delta_1\sigma(\xi^0,\xi)].\end{aligned}$$

После подстановки этих величин в (35) получим

$$\begin{aligned}(\nu - \Delta_1\sigma)[9(\theta^I(\xi))^2(\xi^0,\xi) - 15\theta^0(\xi)\theta^I(\xi)(\xi^I,\xi)] - 15(\nu^I - \partial\Delta_1\sigma)\theta^0(\xi)\theta^I(\xi)(\xi^0,\xi) + \\ + 3\theta^I(\xi)[\partial_A(\nu - \Delta_1\sigma)\xi^A(\xi^I,\xi) + \partial_A(\nu^I - \partial\Delta_1\sigma)\xi^A(\xi^0,\xi)] + \\ + (\nu^I - \partial\Delta_1\sigma)\{(\Delta_1\sigma - 4\nu)[(\xi^0,\xi)(\xi^I,\xi) + (\xi^I,\xi)^2] + (\partial\Delta_1\sigma - 4\nu^I)(\xi^0,\xi)^2\} \equiv 0.\end{aligned}$$

Это тождество может иметь место только тогда, когда

$$\nu = \Delta_1\sigma. \tag{36}$$

Аналогичное рассмотрение тождества $\xi^{[A}\,\overline{\xi}_1^{A_1}\,\overline{\xi}_2^{A_2]} \equiv 0$ показывает, что оно возможно только при $\sigma = \mathrm{const}$, и $d\pi$ является гомотетическим (т. е. абсолютным 1-геодезическим преобразованием). Таким образом, (36) при условии $\sigma \neq \mathrm{const}$ характеризует случай, когда $d\pi$ является 3-геодезическим преобразованием. В этом случае основные уравнения (20) допускают промежуточный интеграл. Действительно,

$$\partial_k(\Delta_1\sigma) = \nabla_k(\Delta_1\sigma) = 2g^{ij}\sigma_i\nabla_k\sigma_j = 4\Delta_1\sigma\sigma_k,$$

откуда после интегрирования получим

$$\Delta_1\sigma = ce^{4\sigma}, \quad c \text{ — const},$$

а значит, $\nabla_j\sigma_i = \sigma_i\sigma_j + ce^{4\sigma}g_{ij}$, $\sigma \neq \mathrm{const}$. Сделав замену $e^{-\sigma} = \psi$, получим $\overline{g}_{ij} = \psi^{-2}g_{ij}$,

$$\nabla_{ji}\psi = -c\psi^{-3}g_{ij}, \quad \psi \neq \mathrm{const}\,. \tag{37}$$

В итоге получена

Теорема 2. *Пусть π — концикулярное (не гомотетическое) преобразование (псевдо)риманова пространства (M,g), соответствующее функции конформности ψ^{-2}, $\psi \neq \mathrm{const}$. Тогда дифференциал $d\pi$ на касательном расслоении $T(M)$ относительно метрики полного лифта g^I обладает следующими уплощающими свойствами:*

I. *в общем случае $d\pi$ является 4-геодезическим преобразованием;*

II. *в случае (37) $d\pi$ является 3-геодезическим преобразованием.*

Если же π гомотетическое (т. е. $\psi = \mathrm{const}$), тогда $d\pi$ также гомотетическое и является абсолютно каноническим 1-геодезическим (т. е. аффинным) преобразованием.

Отметим, что указанная выше замена в общем случае приводит (20) к уравнению концикулярного поля вида

$$\nabla_{ji}\psi = f(\psi)g_{ij}. \tag{38}$$

Это уравнение встречается во многих исследованиях. Впервые, по-видимому, оно в общем случае было исследовано А. Фиалковым [9] при изучении конформных геодезических кривых. Им были указаны канонические формы метрик пространств, допускающих решение уравнения (38). В случае, когда $f(\psi)$ — линейная функция, уравнение (38) изучалось Х. Брикманом в связи с задачей конформных отображений пространств Эйнштейна [10]. Случай $f(\psi) = \text{const}$ подробно изучался П.А. Широковым [11]. Важную роль уравнения вида (38) занимают в теории геодезических отображений [3], [12] и групп преобразований римановых пространств [13], [14]. В свете теоремы 2 особый случай соответствует функции $f(\psi) = -c\psi^{-3}$, причем $c \neq 0$ для собственно римановых пространств. Для псевдоримановых пространств при $c = 0$ возможен изотропный случай $\Delta_1\sigma = 0$.

Пусть X_s, $s = 1, \dots, r$, — операторы 1-параметрических концикулярных групп $\exp(tX_s)$, порождающие r-членную группу Ли G_r конечных концикулярных преобразований (M, g). Из структурных уравнений $[X_{s_1}, X_{s_2}] = C^s_{s_1,s_2} X_s$ на основании свойств вертикальных и полных лифтов получаем

$$[X^0_{s_1}, X^0_{s_2}] = 0, \quad [X^0_{s_1}, X^I_{s_2}] = C^s_{s_1,s_2} X^0_s, \quad [X^I_{s_1}, X^I_{s_2}] = C^s_{s_1,s_2} X^I_s.$$

Отсюда на основании второй теоремы Ли [15] вытекает, что X^0_s, X^I_s являются операторами некоторой $2r$-членной группы Ли преобразований $T(M)$, которую обозначим $G^{0,I}_{2r}$. Кроме того, операторы X^0_s выделяют в ней абелеву r-членную подгруппу, а X^I_s — r-членную подгруппу, которые обозначим через G^0_r, G^I_r.

Если $\tau_s : \widetilde{x}^h = x^h + X^h_s dt$ — инфинитезимальное преобразование M, то индуцированное преобразование τ^I_s является инфинитезимальным преобразованием $T(M)$, соответствующим полному лифту X^I_s. Отсюда вытекает ([5], c. 55) $d(\exp(tX_s)) = \exp(tX^I_s)$ — образующие 1-параметрические группы для индуцированной группы G^I_r. Таким образом, если $\pi_s(t) \in \exp(tX_s)$, то индуцированное преобразование $d\pi_s(t) \in \exp(tX^I_s)$. Из теоремы 2 вытекает

Теорема 3. *Пусть G_r — локальная (не гомотетическая) r-членная группа Ли концикулярных преобразований (псевдо)риманова пространства (M, g), соответствующая операторам X_s, $s = 1, \dots, r$. Тогда индуцированная группа G^I_r (соответствующая полным лифтам X^I_s и состоящая из дифференциалов этих преобразований) является r-членной группой Ли 4-геодезических или может содержать и 3-геодезические или гомотетические преобразования $(T(M), g^I)$.*

Как известно [5], если G_r действует глобально на M, т. е. X_s полные, то и X^I_s полные. Значит, G^I_r также действует глобально на $T(M)$. Поэтому теорема 3 дает возможность построения глобальных 4- и 3-геодезических преобразований.

Заметим, что отдельные преобразования из G_r могут быть гомотетическими.

Пространства (M, g), в которых для каждого концикулярного инфинитезимального преобразования функция φ, входящая в (8), имеет вид $\varphi = -Ka$, K — const, были введены в рассмотрение А.В. Аминовой [13] и названы пространствами $C_n(K)$. В этих пространствах $(n > 2)$ полная концикулярная группа G_r содержит гомотетическую подгруппу, совпадающую с группой изометрий. Таким образом, наличие в индуцированной группе G^I_r гомотетической подгруппы для некоторых пространств не является исключением. Что же касается существования в G^I_r 3-геодезических преобразований или их подгрупп, то этот вопрос связан с существованием в (M, g) решений дифференциальных уравнений (37) и соответствующих им Киллинговых полей.

Теорема 4. *Если G^I_r индуцирована на $(T(M), g^I)$ глобальной группой G_r концикулярных преобразований компактного риманова пространства (M, g), то эта группа не содержит 3-геодезических преобразований.*

Доказательство. Допустим противное, т. е. что существует функция ψ, удовлетворяющая условиям (37), в которых $c \neq 0$. На основании теоремы Грина [16] для лапласиана функции ψ должны иметь $\Delta\psi = g^{ij}\nabla_{ji}\psi = -c\psi^{-3}n$,

$$\int_M \Delta\psi \, dv = -cn \int_M \psi^{-3} dv = 0,$$

где dv — элемент объема. Поскольку функция ψ сохраняет знак и $c \neq 0$, то последнее равенство невозможно, и противоречие доказывает утверждение. $\square$

В заключение отметим, что группа G_r^0 в отличие от G_r^I не является индуцированной. Теорема 1 дает ответ о характере уплощающих свойств инфинитезимальных образующих этих групп.

Отметим также, что дифференциал $d\pi$ концциркулярного преобразования π переводит каждую геодезическую кривую γ в кривую $(d\pi) \circ \gamma$, которая в силу (30) является (δ^0, B^0, B^I)-характеристической (или планарной) кривой [17] пространства $(T(M), g^I)$. Отображение $d\pi$ обладает свойством взаимности [18], сохраняет совокупности таких кривых и в общем случае является 4-геодезическим преобразованием специального линейного типа.

Подобные результаты можно получить для касательных расслоений высших порядков, а также для других способов лифтирования [6]. В то же время представляют интерес и другие группы преобразований базисного многообразия. В частности, А.В. Аминовой [14], [19] введены в рассмотрение группы почти проективных движений, соответствующие квадратичному и линейному комплексам. Концциркулярная группа является частным случаем таких групп, относящимся к квадратичному комплексу, определяемому тензором g.

Литература

1. Лейко С.Г. *P-геодезические преобразования и их группы в касательных расслоениях, индуцированные геодезическими преобразованиями базисного многообразия* // Изв. вузов. Математика. – 1992. – № 2. – С. 62–71.
2. Лейко С.Г. *P-геодезические отображения пространств аффинной связности* // Rev. Roum. math. pures et appl. – 1983. – V. 28. – № 1. – P. 3–27.
3. Синюков Н.С. *Геодезические отображения римановых пространств.* – М.: Наука, 1979. – 255 с.
4. Рашевский П.К. *Риманова геометрия и тензорный анализ.* – М.: Наука, 1967. – 664 с.
5. Yano K., Ishihara S. *Tangent and cotangent bundles. Differential geometry.* – New York: Marcel Dekker, 1973. – 434 p.
6. Широков А.П. *Геометрия касательных расслоений и пространства над алгебрами* // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Пробл. геометрии. – 1981. – Т. 12. – С. 61–95.
7. Yano K. *Concircular geometry* I–IV // Proc. Imp. Acad. Tokyo. – 1940. – V. 16. – P. 195–511.
8. Yano K. *The theory of Lie derivatives and its applications.* – Amsterdam: North.-Holl. Publ. Co., 1957. – 299 p.
9. Fialkow A. *Conformal geodesics* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1939. – V. 45. – P. 443–473.
10. Петров А.З. *Новые методы в общей теории относительности.* – М.: Наука, 1966. – 496 с.
11. Широков П.А. *Избранные работы по геометрии.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1966. – 432 с.
12. Аминова А.В. *Псевдоримановы многообразия с общими геодезическими* // УМН. – 1993. – Т. 48. – Вып. 2. – С. 107–164.
13. Аминова А.В. *Бесконечно малые преобразования римановых пространств и концциркулярные векторные поля* // VI Всесоюзн. геометрич. конф. по современ. пробл. геометрии. Тез. докл. – Вильнюс, 1975. – С. 16–18.
14. Аминова А.В. *Группы преобразований римановых многообразий* // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Пробл. геометрии. – 1990. – Т. 22. – С. 97–165.
15. Эйзенхарт Л.П. *Непрерывные группы преобразований.* – М.: Ин. лит., 1947. – 360 с.
16. Яно К., Бохнер С. *Кривизна и числа Бетти.* – М.: Ин. лит., 1957. – 152 с.
17. Leiko S., Nicolescu L. *Courbes* $(\overset{1}{F}, \dots, \overset{m}{F}, \overset{1}{X}, \dots, \overset{s}{X})$*-caracteristiques* // Ann. Univ. Bucuresti. Mat. – 1985. – V. 34. – P. 30–39.

18. Лейко С.Г. *Линейные P-геодезические диффеоморфизмы многообразий с аффинной связностью* // Изв. вузов. Математика. – 1982. – № 5. – С. 80–83.
19. Аминова А.В. *Группы почти проективных движений пространств аффинной связности* // Изв. вузов. Математика. – 1979. – № 4. – С. 71–75.

Институт математики, экономики
и механики Одесского
государственного университета

Поступила
06.02.1997