*Известия вузов. Математика* *http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/*
*2010, №4, с. 19–35* *Гос. номер статьи по НТЦ "Информрегистр" 0421000123\0034*

*Л.В. МАСЛОВСКАЯ, О.М. МАСЛОВСКАЯ*

# МОРТАР-МЕТОД НИТШЕ СТЫКОВКИ СЕТОК В СМЕШАННОМ МЕТОДЕ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

*Аннотация.* Известно, что в методе конечных элементов часто используются нестыкующиеся сетки. Стыковка сеток обычно производится по линиям или поверхностям, которые разделяют область на подобласти и называются интерфейсами. Стыковка по интерфейсу — это удовлетворение некоторых условий непрерывности при переходе через интерфейс. Прямые процедуры стыковки можно разделить на три группы: методы, использующие множители Лагранжа, mortar-методы, основанные на технике Нитше, и методы штрафа.

*Ключевые слова*: смешанный метод конечных элементов, схема Германна–Джонсона, mortar-метод стыковки сеток, скорость сходимости, потеря скорости сходимости.

*УДК*: 519.632

*Abstract.* It is well-known that nonmatching grids are often used in finite element methods. Usually, grids are being matched along lines or surfaces that divide a domain into subdomains. Such lines or surfaces are called interfaces. The interface matching means the satisfaction of some continuity conditions when crossing the interface. The direct matching procedures fall into three groups: methods that use Lagrangian multipliers, mortar-methods based on the Nitsche technique, and penalty methods.

*Keywords*: mixed finite element methods, Hermann–Johnson scheme, mortar-method for grid matching, convergence rate, loss of convergence rate.

## Введение

Идеи, лежащие в основе методов, использующих множители Лагранжа, и mortar-методов с техникой Нитше, изложены в [1], [2]. Указанные методы использовались для удовлетворения главным условиям на границе области в некотором слабом смысле и в более поздних работах [3], [4] были перенесены на случай стыковки сеток. В [5], [6] для приближенного удовлетворения главным условиям на границе области был предложен метод штрафа. В [7]–[9] мы впервые использовали метод штрафа стыковки сеток для уравнений второго и четвертого порядка. Следует отметить,что в методе штрафа для уравнений второго порядка при аппроксимации решения сплайнами первой степени при определенном выборе штрафа скорость сходимости в норме $H^1$ имеет порядок $h$ [7], т. е. она такая же, как и в методе конечных элементов на стыкующейся сетке. Однако это свойство не сохраняется для сплайнов более высоких степеней, так же, как и для смешанного метода конечных элементов. В этих случаях имеет место потеря в скорости сходимости по сравнению с соответствующими методами конечных элементов на стыкующихся сетках.

Поступила 11.02.2008

Известно, что в mortar-методе Нитше [3] в случае эллиптического уравнения второго порядка для сплайнов произвольной степени сохраняется та же скорость сходимости, что и в методе конечных элементов на стыкующихся сетках. За это приходится расплачиваться некоторыми дополнительными слагаемыми в вариационной формулировке mortar-метода по сравнению с методом штрафа, что усложняет формирование матрицы системы.

В данной работе сформулирован и исследован mortar-метод Нитше для смешанных методов конечных элементов. Рассмотрена схема Германна–Джонсона для бигармонического уравнения [10], [11].

Построен mortar-метод Нитше, использующий два параметра, которые можно назвать штрафами. Исследована mortar-задача, доказаны теоремы существования и единственности этой задачи при определенных ограничениях на параметры. Получены оценки для нормы разности между решением mortar-задачи и решением исходной задачи, зависящие от шага и штрафов, даны рекомендации по выбору шага и штрафов.

Здесь имеет место потеря скорости сходимости по сравнению со смешанным методом конечных элементов на стыкующихся сетках. Однако эта потеря меньше, чем в методе штрафа, и она одинакова для любой степени сплайнов, кроме самой низкой.

## 1. Смешанная вариационная формулировка

В двумерной выпуклой полигональной области $\Omega$ с границей $\partial\Omega$ рассматривается краевая задача

$$\Delta^2 w = q(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \Omega, \tag{1.1}$$

$$w|_{\partial\Omega} = 0, \quad \partial_n w|_{\partial\Omega} = 0. \tag{1.2}$$

Гладкость решения задачи (1.1), (1.2) зависит от гладкости правой части и гладкости границы области. Известно [12], что если $\Omega$ — выпуклая полигональная область и если $q \in H_\Omega^{-1}$, то решение задачи (1.1), (1.2) $w \in H_\Omega^r$, $r \geq 3$.

Рассмотрим смешанную вариационную формулировку, на основе которой строится схема Германна–Джонсона [10], [11].

Введем пространства $M$ и $W$ и билинейные формы $a(\cdot,\cdot)$, $b(\cdot,\cdot)$, определенные на $M \times M$, $M \times W$ соответственно следующим образом.

Рассмотрим регулярную триангуляцию $T_h$ с диаметром $h$ области $\Omega$ ([13], гл. 2, 2.1, с. 48; гл. 3, 3.1, с. 133) и тензорную функцию $m = (m_{ij})$, $m_{ij} \in H^1(T)$, $1 \leq i, j \leq 2$, $m_{12} = m_{21}$. Определим

$$M_n(m) = \sum_{i,j=1}^{2} m_{ij} n^j n^i, \quad M_{nt}(m) = \sum_{i,j=1}^{2} m_{ij} n^j t^i,$$

$$Q_n(m) = \sum_{i,j=1}^{2} \partial_j m_{ij} n^i, \tag{1.3}$$

$n = (n^1, n^2)$ — единичный вектор нормали к $\partial T$, внешней к $T$, и $t = (t^1, t^2) = (n^2, -n^1)$ — единичный вектор касательной вдоль $\partial T$.

Определим билинейные формы [14]

$$a(m, \mu) = \sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega m_{ij} \mu_{ij} dx,$$

$$b(m,\mu) = \sum_{T\in T_h}\bigg(\sum_{i,j=1}^{2}\int_T m_{ij}\partial^2_{ij}w\,dx - \int_{\partial T} M_n(m)\partial_n w\,ds\bigg).$$

Пространство $\widetilde{M}$ вводится двумя эквивалентными определениями:

$$1)\qquad \widetilde{M} = (H^1_{h,\Omega})^4 = \{m \mid m \in (L_{2,\Omega})^4,\ \ m \in (H^1_T)^4\ \ \forall T \in T_h,\qquad (1.4)$$
$$M_{n_1}(m_{T_1})|_{\partial T_{12}} = M_{n_2}(m_{T_2})|_{\partial T_{12}} \equiv M_n(m)|_{\partial T_{12}}$$

для каждой пары треугольников $T_1$ и $T_2$, имеющих общую сторону $\partial T_{12}$; равенство понимается в смысле совпадения следов функций из $H^1_{T_1}$ и $H^1_{T_2}\}$,

$$2)\qquad \widetilde{M} = (H^1_{h,\Omega})^4 = \{m \mid m \in (L_{2,\Omega})^4,\ \ m \in\ (H^1_T)^4\ \ \forall T \in T_h,\qquad (1.5)$$
$$M_n(m) \in H^1$$

для каждой пары смежных треугольников$\}$; норма пространства $\widetilde{M}$

$$\|m\|^2_{\widetilde{M}} = \sum_{i,j=1}^{2}\sum_{T\in T_h}\|m_{ij}\|^2_{1,T}$$

либо

$$\|m\|^2_{0,h,\Omega} = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{2}|m_{ij}|^2dx + h\int_{\Gamma_h}|M_n(m)|^2ds, \qquad (1.6)$$

где $\Gamma_h = \bigcup\limits_{T\in T_h}\partial T$; на внутреннем ребре $\partial T_{12} = \partial T_1\cap\partial T_2$ триангуляции $T_h$ полагаем $M_n(m) = M_{n_1}(m) = M_{n_2}(m)$, а на граничном ребре $T'$ триангуляции $T_h$ полагаем $M_n(m) = M_n(m)|_{T'}$.

Определяя $M$ как замыкание $\widetilde{M}$ в норме $\|\cdot\|_{0,h,\Omega}$, отождествим его с пространством

$$\{m \mid m \in (L_{2,\Omega})^4,\ M_n(m) \in L_{2,\Gamma_h}\}.$$

Норма в пространстве $M$ определяется (1.6).

Определим пространство

$$H^2_{h,\Omega} = \{w \in H^1_\Omega : w|_T \in H^2(T)\ \ \forall T \in T_h\}$$

с нормой

$$\|w\|^2_{2,h,\Omega} = \sum_{T\in T_h}\|w\|^2_{2,T} + h^{-1}\int_{\Gamma_h}|J\partial_n w|^2ds. \qquad (1.7)$$

Если $\partial T_{12} = \partial T_1\cap\partial T_2$ является внутренним ребром триангуляции $T_h$, то предполагается

$$J\partial_n w|_{\partial T_{12}} = \partial_{n_1}w|_{\partial T_{12}} + \partial_{n_2}w|_{\partial T_{12}},$$

где $n_j$ является единичной нормалью к $\partial T_{12}$, внешней по отношению к $T_j$, $j = 1, 2$, и если $T'$ есть ребро на границе $T_h$, то предполагается

$$J\partial_n w|_{\partial T'} = \partial_n w|_{T'}.$$

Обозначим $W = H^2_{h,\Omega}\cap H^1_{0,\Omega}$, где

$$H^1_{0,\Omega} = \{w \in H^1_\Omega,\ w|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

Норма в пространстве $W$ определяется (1.7).

Нетрудно проверить [11], что существуют константы $\alpha > 0$, $\beta > 0$ такие, что

$$a(m,m) \geq \alpha \|m\|_{(L_{2,\Omega})^4} \quad \forall m \in M,$$

$$\sup_{\mu \in \widetilde{M}} \frac{b(\mu,w)}{\|\mu\|_{0,h,\Omega}} \geq \ \beta \|w\|_{2,h,\Omega} \quad \forall w \in W.$$

Смешанная вариационная формулировка записывается следующим образом:

пусть $q \in W'$, найти пару $(m,w) \in M \times W$, удовлетворяющую вариационным уравнениям:

$$a(m,\mu) - b(\mu,w) = 0 \qquad \forall \mu \in M, \tag{1.8}$$

$$b(m,\omega) = \langle q,\omega \rangle \quad \forall \omega \in W, \tag{1.9}$$

где $\langle q,\omega \rangle$ — отношение двойственности между $W'$ и $W$.

Имеет место

**Теорема 1.1** ([11])**.** *Пусть $q \in H_\Omega^{-1}$. Если $w$ — обобщенное решение задачи* (1.1), (1.2) *и $m = (m_{ij})$, $i,j = 1,2$, определяется как $m_{ij} = \partial_{ij}^2 w$, то $(m,w)$ является единственным решением задачи* (1.8), (1.9)*. И наоборот, если $(m,w)$ является решением задачи* (1.8), (1.9)*, то $w$ есть решение задачи* (1.1), (1.2) *и $m_{ij} = \partial_{ij}^2 w$.*

## 2. Построение и исследование задачи с интерфейсом

Разобьем область $\Omega$ на две неналегающие подобласти: $\Omega_1$ с границей $\partial\Omega_1$ и $\Omega_2$ с границей $\partial\Omega_2$. Общая часть $\partial\Omega_{12}$ границ $\partial\Omega_1$ и $\partial\Omega_2$ называется интерфейсом. Предположим, что $\partial\Omega_{12}$ является ломаной.

Пусть $w_i$, $m_i$, $q_i$ — следы функций $w$, $m$, $q$ соответственно на $\Omega_i$, $i = 1,2$. Тогда задачу (1.1), (1.2) можно переписать в виде

$$\Delta^2 w_1 = q_1(x_1,x_2), \quad (x_1,x_2) \in \Omega_1, \tag{2.1}$$

$$\Delta^2 w_2 = q_2(x_1,x_2), \quad (x_1,x_2) \in \Omega_2, \tag{2.2}$$

$$w_1|_{\partial\Omega_1 \setminus \partial\Omega_{12}} = 0, \quad \partial_n w_1|_{\partial\Omega_1 \setminus \partial\Omega_{12}} = 0, \tag{2.3}$$

$$w_2|_{\partial\Omega_2 \setminus \partial\Omega_{12}} = 0, \quad \partial_n w_2|_{\partial\Omega_2 \setminus \partial\Omega_{12}} = 0, \tag{2.4}$$

$$w_1|_{\partial\Omega_{12}} = w_2|_{\partial\Omega_{12}}, \tag{2.5}$$

$$\partial_{n_1} w_1|_{\partial\Omega_{12}} = -\partial_{n_2} w_2|_{\partial\Omega_{12}}, \tag{2.6}$$

$$M_{n_1}(m_1)|_{\partial\Omega_{12}} = M_{n_2}(m_2)|_{\partial\Omega_{12}}, \tag{2.7}$$

$$Q_{n_1}(m_1)|_{\partial\Omega_{12}} = -Q_{n_2}(m_2)|_{\partial\Omega_{12}}, \tag{2.8}$$

$$M_{n_1 t_1}(m_1)|_{\partial\Omega_{12}} = M_{n_2 t_2}(m_2)|_{\partial\Omega_{12}} = 0. \tag{2.9}$$

Проведем триангуляцию с диаметром $h_1$ области $\Omega_1$ и триангуляцию с диаметром $h_2$ области $\Omega_2$. Обе триангуляции предполагаются квазирегулярными [14]. Напомним, что триангуляция $T_{h_i}$, $i = 1,2$, называется квазирегулярной, если существует константа $\tau_i > 0$ такая, что

$$\frac{h_i}{h_T} \leq \tau_i \ \ \forall T \in T_{h_i}.$$

Обозначим полученную сетку через $T_h \equiv T_{h_1} \times T_{h_2}$, $h = \max(h_1,h_2)$. На интерфейсе $\partial\Omega_{12}$ сетки не стыкуются, т. е. если узел одной сетки принадлежит интерфейсу, то он необязательно является узлом второй сетки.

Введем следы сеток $T_{h_1}$, $T_{h_2}$ на интерфейсе $\partial\Omega_{12}$:

$$\partial\Omega_{12}^i = \{E_i : E_i = T \cap \partial\Omega_{12},\ \ T \subset T_{h_i},\ \ i = 1, 2\}$$

и пространства

$$\widetilde{M}_{\Omega_k} = (H^1_{h,\Omega_k})^4 = \{m_k \mid m_k \in (L_{2,\Omega_k})^4,\ \ m_k \in (H^1_T)^4,$$
$$\forall T \in T_{h_k}\ \ M_{n_1}(m_{T_1})|_{\partial T_{12}} = M_{n_2}(m_{T_2})|_{\partial T_{12}},\ \ k = 1, 2,$$

для каждой пары треугольников $T_1$ и $T_2$, имеющих общую сторону $\partial T_{12}$; равенство понимается в смысле совпадения следов функций из $H^1_{T_1}$ и $H^1_{T_2}\}$, $k = 1, 2$, с нормой

$$\|m\|^2_{0,h,\Omega_k} = \int_{\Omega_k} \sum_{i,j=1}^{2} |m_{k,ij}|^2 dx + h_k \int_{\Gamma_{h_k}} |M_n(m_k)|^2 ds. \tag{2.10}$$

$\overline{M}_{\Omega_k}$ определяется как замыкание $\widetilde{M}_{\Omega_k}$ в норме (2.10).

Введем пространство

$$\overline{M} = \{m \equiv (m_1, m_2) \in \overline{M}_{\Omega_1} \times \overline{M}_{\Omega_2},\ \ M_{n_1}(m_1)|_{\partial\Omega_{12}} = M_{n_2}(m_2)|_{\partial\Omega_{12}}\} \tag{2.11}$$

с нормой

$$\|m\|^2_{\overline{M}} = \sum_{k=1}^{2} \Big[ \int_{\Omega_k} \sum_{i,j=1}^{2} |m_{k,ij}|^2 dx + h_k \int_{\Gamma_{h_k}} |M_n(m_k)|^2 ds \Big]. \tag{2.12}$$

Обозначим $\overline{W}_{\Omega_i} = H^2_{h,\Omega_i} \cap H^1_{0,\Omega_i}$, $i = 1, 2$, где

$$H^1_{0,\Omega_i} = \{w \in H^1_{\Omega_i},\ \ w|_{\partial\Omega_i \setminus \partial\Omega_{12}} = 0\}.$$

Введем пространство

$$\overline{W} = \{w \equiv (w_1, w_2) \in \overline{W}_{\Omega_1} \times \overline{W}_{\Omega_2},\ \ w_1|_{\partial\Omega_{12}} = w_2|_{\partial\Omega_{12}}\} \tag{2.13}$$

с нормой

$$\|w\|^2_{\overline{W}} = \sum_{i=1}^{2} \|w_i\|^2_{2,h_i,\Omega_i}. \tag{2.14}$$

Дадим вариационную формулировку задачи (2.1)–(2.9).

Пусть $q \in \overline{W}'$, найти пару $(m, w) \in \overline{M} \times \overline{W}$, удовлетворяющую вариационным уравнениям:

$$a(m, \mu) - b(\mu, w) = 0 \qquad \forall \mu \in \overline{M}, \tag{2.15}$$

$$b(m, \omega) = \langle q, \omega \rangle \ \ \forall \omega \in \overline{W}, \tag{2.16}$$

где

$$a(m, \mu) = \sum_{k=1}^{2} \sum_{i,j=1}^{2} \int_{\Omega_k} m_{k,ij} \mu_{k,ij} dx, \tag{2.17}$$

$$b(m, \omega) = \sum_{k=1}^{2} \sum_{T \in T_{h_k}} \Bigg( \sum_{i,j=1}^{2} \int_T m_{k,ij} \partial^2_{ij} \omega_k dx - \int_{\partial T} M_n(m_k) \partial_n \omega_k ds \Bigg). \tag{2.18}$$

Легко проверить [10], что существуют константы $\alpha > 0$, $\beta > 0$ такие, что

$$\forall m \in \overline{M}\ \ \ a(m, m) \geq \alpha \|m\|_{(L_{2,\Omega_1})^4 \times (L_{2,\Omega_2})^4}, \tag{2.19}$$

$$\forall w \in \overline{W}\ \ \ \sup_{\mu \in \overline{M}} \frac{b(\mu, w)}{\|\mu\|_{\overline{M}}} \geq \beta \|w\|_{\overline{W}}. \tag{2.20}$$

С использованием (2.19) и (2.20) нетрудно доказывается

**Теорема 2.1.** *Пусть* $q \in H_\Omega^{-1}$. *Если* $w = (w_1, w_2)$ *— обобщенное решение задачи* (2.1)–(2.9) *и* $m_k = (m_{k,ij})$, $k, i, j = 1, 2$, *определяется как* $m_{k,ij} = \partial^2_{ij} w_k$, *то пара* $(m, w)$ *является единственным решением задачи* (2.15)–(2.18). *И наоборот, если* $(m, w)$ *является решением задачи* (2.15)–(2.18), *то* $w$ *есть решение задачи* (2.1)–(2.9) *и* $m_{k,ij} = \partial^2_{ij} w_k$.

## 3. Построение mortar-задачи

Введем пространство

$$\widehat{M} = \{m \equiv (m_1, m_2) \in \overline{M}_{\Omega_1} \times \overline{M}_{\Omega_2}\} \tag{3.1}$$

с нормой

$$\|m\|^2_{\widehat{M}} = \sum_{k=1}^{2} \Big[ \int_{\Omega_k} \sum_{i,j=1}^{2} |m_{k,ij}|^2 dx + h_k \int_{\Gamma_{h_k}} |M_n(m_k)|^2 ds \Big]. \tag{3.2}$$

Введем пространство

$$\widehat{W} = \{w \equiv (w_1, w_2) \in \overline{W}_{\Omega_1} \times \overline{W}_{\Omega_2}\} \tag{3.3}$$

с нормой

$$\|w\|^2_{\widehat{W}} = \sum_{i=1}^{2} \|w_i\|^2_{2,h_i,\Omega_i}. \tag{3.4}$$

**Лемма 3.1.** *Пространство* $\overline{M}$, *определяемое* (2.11), (2.12), *является замкнутым подпространством пространства* $\widehat{M}$.

**Лемма 3.2.** *Пространство* $\overline{W}$, *определяемое* (2.13), (2.14), *является замкнутым подпространством пространства* $\widehat{W}$.

Заметим, что в определении пространства $\widehat{M}$ уже нет требования совпадения $M_{n_1}$ и $M_{n_2}$ на интерфейсе, а в определении пространства $\widehat{W}$ нет требования совпадения $w_1$ и $w_2$ на интерфейсе. Это важно для численной реализации, так как при дискретизации задачи (2.15)–(2.18) методом конечных элементов возникают трудности, если необходимо обеспечить совпадение $w_1$ с $w_2$ и $m_1$ с $m_2$ на интерфейсе $\partial\Omega_{12}$. Данные условия являются главными для смешанной вариационной формулировки.

Определим

$$M_h = \{m_h = (m_{1,h_1}, m_{2,h_2}) \in \widehat{M};\ m_{s,h_s,ij} \in P_{k-1},\ s, i, j = 1, 2,\ \forall T \in T_h\},$$

где $P_{k-1}$ — пространство многочленов степени не больше $k-1$, $k \geq 1$, относительно переменных $x_1$ и $x_2$,

$$W_h = \{w_h = (w_{1,h_1}, w_{2,h_2}) \in \widehat{W};\ w_{i,h_i} \in P_k\ \forall T \in T_h,\ i = 1, 2\},$$

где $P_k$ — пространство многочленов степени не больше $k$, $k \geq 1$, относительно переменных $x_1$ и $x_2$. Отметим, что нормальные моменты, а также элементы пространства $W_h$ терпят разрыв при переходе через интерфейс.

Рассмотрим вариационную формулировку mortar-метода. Найти пару $(m_h, w_h) \in M_h \times W_h$, удовлетворяющую вариационным уравнениям

$$a'(m_h, \mu_h) - b'(\mu_h, w_h) = 0 \quad \forall \mu_h \in M_h, \tag{3.5}$$

$$b'(m_h, \omega_h) + c(w_h, \omega_h) = \langle q, \omega_h \rangle \quad \forall \omega_h \in W_h, \tag{3.6}$$

где

$$a'(m_h,\mu_h) = a(m_h,\mu_h) + \sigma_m h \int_{\partial\Omega_{12}} JM_n(m_h) JM_n(\mu_h) ds, \tag{3.7}$$

$$c(w_h,\omega_h) = \sigma_w h^{-1} \int_{\partial\Omega_{12}} Jw_h J\omega_h ds,$$

$$b'(m_h,\omega_h) = b(m_h,\omega_h) + \int_{\partial\Omega_{12}} \{JM_n(m_h)[\partial_n\omega_h] + [Q_n(m_h)]Jw_h\} ds. \tag{3.8}$$

Здесь $[Q_n(m_h)] = (Q_{n_1}(m_{1,h_1}), Q_{n_2}(m_{2,h_2}))$, где $Q_{n_i}(m_{i,h_i})$, $i=1,2$, является сплайном, определенным на $\partial\Omega^i_{12}$. На каждом $E_i \in \partial\Omega^i_{12}$ это многочлен $Q_{n_i}(m_{i,h_i})$, который вычисляется по формуле, аналогичной (1.3).

В (3.7) и (3.8) величины $a(m_h,\mu_h)$, $b(m_h,\omega_h)$ определяются формулами (2.17) и (2.18) соответственно и

$$[\partial_n\omega_h] = \frac{1}{2}\partial_{n_1}\omega_{1,h_1} - \frac{1}{2}\partial_{n_2}\omega_{2,h_2},$$

$$[Q_n(m_h)] = \frac{1}{2}Q_{n_1}(m_{1,h_1}) - \frac{1}{2}Q_{n_2}(m_{2,h_2}).$$

Здесь $\sigma_m > 0$, $\sigma_w > 0$ — параметры, которые могут зависеть от $h$, о выборе которых см., например, (4.9); (4.10), (4.11); (4.13), (4.14); (4.15), (4.16). Эти параметры можно назвать штрафами.

**Теорема 3.1.** *Пусть $w = (w_1, w_2)$ — обобщенное решение задачи* (2.1)–(2.9), $m_k = (m_{k,ij})$, $k,i,j = 1,2$, *определяется как $m_{k,ij} = \partial^2_{ij} w_k$. Предположим, что $w \in H^r_{\Omega_1} \times H^r_{\Omega_2}$, $r \geq 7/2$. Тогда пара $(m,w)$ удовлетворяет вариационным уравнениям*

$$a'(m,\mu_h) - b'(\mu_h, w) = 0 \qquad \forall \mu_h \in M_h, \tag{3.9}$$

$$b'(m,\omega_h) + c(w,\omega_h) = \langle q,\omega_h\rangle \quad \forall\omega_h \in W_h, \tag{3.10}$$

*где*

$$a'(m,\mu_h) = a(m,\mu_h) + \sigma_m h \int_{\partial\Omega_{12}} JM_n(m) JM_n(\mu_h) ds, \tag{3.11}$$

$$c(w,\omega_h) = \sigma_w h^{-1} \int_{\partial\Omega_{12}} Jw J\omega_h ds, \tag{3.12}$$

$$b'(m,\omega_h) = b(m,\omega_h) + \int_{\partial\Omega_{12}} \{JM_n(m)[\partial_n\omega_h] + [Q_n(m)]J\omega_h\} ds. \tag{3.13}$$

*Доказательство.* Так как $w$ — обобщенное решение задачи (2.1)–(2.9) и $m_{k,ij} = \partial^2_{ij} w_k$, $k,i,j = 1,2$, то из (3.11)–(3.13) следует

$$a'(m,\mu_h) = a(m,\mu_h) \quad \forall\mu_h \in M_h, \tag{3.14}$$

$$b'(\mu_h, w) = \sum_{k=1}^{2} \sum_{T\in T_{h_k}} \sum_{i,j=1}^{2} \int_T \mu_{k,h_k,ij} \partial^2_{ij} w_k dx \quad \forall\mu_h \in M_h, \tag{3.15}$$

$$c(w,\omega_h) = 0 \quad \forall\omega_h \in W_h. \tag{3.16}$$

Очевидно, (3.9) следует из (3.14), (3.15) и равенства $m_{k,ij} = \partial^2_{ij} w_k$, $k,i,j = 1,2$.

Умножив обе части (2.1) на пробную функцию $\omega_{1,h_1}$ и проинтегрировав полученное равенство по $\Omega_1$, а также умножив обе части (2.2) на пробную функцию $\omega_{2,h_2}$ и проинтегрировав по $\Omega_2$, а затем сложив полученные равенства, получим

$$\sum_{k=1}^{2}\sum_{T\in T_{h_k}}\sum_{i=1}^{2}\int_T \Delta^2 w_i\omega_{i,h_i}dx = \langle q,\omega_h\rangle. \tag{3.17}$$

Из интегрирования в левой части (3.17) по частям дважды и того, что $m_{k,ij} = \partial^2_{ij}w_k$, $k,i,j=1,2$, имеем

$$\sum_{k=1}^{2}\sum_{T\in T_{h_k}}\left(\sum_{i,j=1}^{2}\int_T m_{k,ij}\partial^2_{ij}\omega_{k,h_k}dx - \int_{\partial T} M_n(m_k)\partial_n\omega_{k,h_k}ds\right)+ \\ + \int_{\partial\Omega_{12}}[Q_n(m)]J\omega_h ds = \langle q,\omega_h\rangle,$$

т. е.

$$b'(m,\omega_h) = \langle q,\omega_h\rangle. \tag{3.18}$$

Вариационное равенство (3.10) следует из (3.16) и (3.18). □

## 4. Исследование mortar-задачи. Сходимость

Исследуем дискретную задачу (3.5), (3.6).

**Лемма 4.1** ([14]). *Существует константа $C_1>0$, не зависящая от $h$, такая, что*

$$\|m_h\|_{\widehat{M}} \le C_1\|m_h\|_{(L_{2,\Omega_1})^4\times(L_{2,\Omega_2})^4} \quad \forall m_h\in M_h.$$

Следствием этой леммы является

**Лемма 4.2.** *Справедливо неравенство*

$$a(m_h,m_h) \ge C_1\|m_h\|_{\widehat{M}} \quad \forall m_h\in M_h, \quad \forall h.$$

С использованием интерполянта Джонсона [10], по аналогии с [10] доказывается

**Лемма 4.3.** *Существует константа $C_2>0$, не зависящая от $h$, такая, что*

$$\sup_{\mu_h\in M_h}\frac{|b(\mu_h,w_h)|}{\|\mu_h\|_{\widehat{M}}} \ge C_2\|w_h\|_{\widehat{W}} \quad \forall w_h\in\ W_h, \quad \forall h.$$

Важную роль в получении теоремы сходимости играют два интерполянта [10], [11]: интерполянт Джонсона $\Pi_h m\in M_h$ и интерполянт Фалка и Осборна $\Sigma_h w\in W_h$. Сформулируем их свойства.

**Лемма 4.4.** *Справедливы следующие равенства*:

$\forall m\in\widehat{M}$

$$b(m-\Pi_h m,\omega_h)=0 \quad \forall\omega_h\in W_h,$$

$\forall w\in\widehat{W}$

$$b(\mu_h,w-\Sigma_h w)=0 \quad \forall\mu_h\in M_h. \tag{4.1}$$

Имеют место следующие оценки аппроксимации [14], [11], [3].

**Лемма 4.5.** *Пусть $w\in H^r_{\Omega_1}\times H^r_{\Omega_2}$, $r\ge 7/2$, и $\operatorname{tr} w|_{\partial\Omega_{12}}\in H^r_{\partial\Omega_{12}}\times H^r_{\partial\Omega_{12}}$. Тогда*

$$\begin{gathered}\|w-\Sigma_h w\|_{H^1_{\Omega_1}\times H^1_{\Omega_2}} \le Ch^{p-1}\|w\|_{H^p_{\Omega_1}\times H^p_{\Omega_2}},\\ \|J(w-\Sigma_h w)\|_{L_{2,\partial\Omega_{12}}} \le Ch^p\|w\|_{H^p_{\partial\Omega_{12}}\times H^p_{\partial\Omega_{12}}},\\ p=\min(k+1,r).\end{gathered} \tag{4.2}$$

**Лемма 4.6** ([11], [14]). *Пусть* $m \in (H^{r-2}_{\Omega_1})^4 \times (H^{r-2}_{\Omega_2})^4$, $r \geq 7/2$, *а значит,* $\operatorname{tr} m|_{\partial\Omega_{12}} \in (H^{r-5/2}_{\partial\Omega_{12}})^4 \times (H^{r-5/2}_{\partial\Omega_{12}})^4$. *Тогда*

$$\begin{gathered} \|m - \Pi_h m\|_{\widehat{M}} \leq C h^s \|m\|_{(H^s_{\Omega_1})^4 \times (H^s_{\Omega_2})^4}, \\ \|JM_n(m - \Pi_h m)\|_{L_{2,\partial\Omega_{12}}} \leq C h^{\overline{s}} \|m\|_{(H^{\overline{s}}_{\partial\Omega_{12}})^4 \times (H^{\overline{s}}_{\partial\Omega_{12}})^4}, \\ s = \min(k, r-2), \quad \overline{s} = \min(k, r - 5/2). \end{gathered} \tag{4.3}$$

Отметим, что справедливость неравенств (4.2) и (4.3) следует из условий гладкости и того, что следы интерполянтов $\Sigma_h w$ и $M_n(\Pi_h m)$ на стороне треугольника определяются только значениями аппроксимируемых функций на этой стороне.

В *случае* $k > 1$ в выражении для $b'(m_h, \omega_h)$ присутствует слагаемое $\int\limits_{\partial\Omega_{12}} [Q_n(m_h)] J w_h ds$, которого нет в (3.8) для случая $k = 1$ и которое используется в дальнейших оценках. Случай $k = 1$ будет рассмотрен далее.

Из лемм 4.2, 4.3 и [1], [15] следует

**Лемма 4.7.** *Справедливо условие Бабушки*

$$\sup_{(\mu_h,\omega_h)\in M_h\times W_h} \frac{|a'(m_h,\mu_h) - b(\mu_h, w_h) + b(m_h,\omega_h) + c(w_h,\omega_h)|}{\|(\mu_h,\omega_h)\|} \geq$$
$$\geq C_3 \|(m_h, w_h)\| \quad \forall (m_h, w_h) \in M_h \times W_h,$$

*где*

$$\|(\mu_h,\omega_h)\| = \|\mu_h\|_{\widehat{M}} + \sigma_m^{1/2} h^{1/2} \|JM_n(\mu_h)\|_{L_{2,\partial\Omega_{12}}} + \|\omega_h\|_{\widehat{W}} + \sigma_w^{1/2} h^{-1/2} \|J\omega_h\|_{L_{2,\partial\Omega_{12}}}.$$

**Лемма 4.8.** *Пусть* $w_h \in W_h$. *Тогда имеет место неравенство*

$$\frac{\int\limits_{\partial\Omega_{12}} JM_n(\mu_h)[\partial_n w_h] ds}{\|(\mu_h,\omega_h)\|_{\widehat{W}}} \geq -C_4 \sigma_m^{-1/2} \|w_h\|_{\widehat{W}} \quad \forall (\mu_h,\omega_h) \in M_h \times W_h. \tag{4.4}$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial\Omega_{12}} JM_n(\mu_h)[\partial_n w_h] ds \right| &\leq \|JM_n(\mu_h)\|_{L_{2,\partial\Omega_{12}}} \|[\partial_n w_h]\|_{L_{2,\partial\Omega_{12}}} \leq \\ &\leq C_4 \sigma_m^{1/2} h^{1/2} \|JM_n(\mu_h)\|_{L_{2,\partial\Omega_{12}}} \sigma_m^{-1/2} h^{-1/2} \|[\partial_n w_h]\|_{L_{2,\partial\Omega_{12}}} \leq \\ &\leq C_4 \sigma_m^{-1/2} \|(\mu_h,\omega_h)\| \cdot \|w_h\|_{\widehat{W}}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Неравенство (4.4) следует из (4.5). □

**Лемма 4.9.** *Пусть* $w_h \in W_h$. *Тогда имеет место неравенство*

$$\frac{\int\limits_{\partial\Omega_{12}} [Q_n(\mu_h)] J w_h ds}{\|(\mu_h,\omega_h)\|} \geq -C_5 h^{-3/2} \|J w_h\|_{L_{2,\partial\Omega_{12}}} \quad \forall (\mu_h,\omega_h) \in M_h \times W_h. \tag{4.6}$$

*Доказательство.* Используя обратное неравенство

$$\|\mu_h\|_{\left(H^{3/2}_{h_1,\Omega_1}\right)^4 \times \left(H^{3/2}_{h_2,\Omega_2}\right)^4} \leq C_5 h^{-3/2} \|\mu_h\|_{(L_{2,\Omega_1})^4 \times (L_{2,\Omega_2})^4}, \tag{4.7}$$

получим

$$\left| \int_{\partial\Omega_{12}} [Q_n(\mu_h)] J w_h ds \right| \leq \|[Q_n(\mu_h)]\|_{L_{2,\partial\Omega_{12}}} \|J w_h\|_{L_{2,\partial\Omega_{12}}} \leq$$

$$\leq \|\mu_h\|_{\left(H^{3/2}_{h_1,\Omega_1}\right)^4\times\left(H^{3/2}_{h_2,\Omega_2}\right)^4}\|Jw_h\|_{L_{2,\partial\Omega_{12}}} \leq C_5 h^{-3/2}\|\mu_h\|_{(L_{2,\Omega_1})^4\times(L_{2,\Omega_2})^4}\cdot$$
$$\cdot\|Jw_h\|_{L_{2,\partial\Omega_{12}}} \leq C_5 h^{-3/2}\|(\mu_h,\omega_h)\|\,\|Jw_h\|_{L_{2,\partial\Omega_{12}}}, \quad (4.8)$$

где

$$\|\mu_{k,h_k}\|^2_{\left(H^{3/2}_{h_k,\Omega_k}\right)^4} = \sum_{T\subset T_{h_k}}\|\mu_{k,h_k}\|^2_{\left(H^{3/2}_{h_k,T}\right)^4}, \quad k=1,2.$$

Неравенство (4.6) вытекает из (4.8). □

Из лемм 4.7–4.9 следует

**Лемма 4.10.** *Имеет место неравенство*

$$\sup_{(\mu_h,\omega_h)\in M_h\times W_h}\frac{|a'(m_h,\mu_h)-b'(\mu_h,w_h)+b'(m_h,\omega_h)+c(w_h,\omega_h)|}{\|(\mu_h,w_h)\|}\geq$$
$$\geq C_3(\|m_h\|_{\widehat{M}}+\sigma_m^{1/2}h^{1/2}\|JM_n(m_h)\|_{L_{2,\partial\Omega_{12}}})+(C_3-C_4\sigma_m^{-1/2})\|w_h\|_{\widehat{W}}+$$
$$+\sigma_w^{1/2}h^{-1/2}(C_3-C_5\sigma_w^{-1/2}h^{-1})\|Jw_h\|_{L_{2,\partial\Omega_{12}}}. \quad (4.9)$$

**Следствие.** Пусть $\sigma_m$ и $\sigma_w$ удовлетворяют неравенствам

$$\sigma_m \geq \left(\frac{2C_4}{C_3}\right)^2, \quad (4.10)$$

$$\sigma_w \geq \left(\frac{2C_5}{C_3 h}\right)^2. \quad (4.11)$$

Тогда

$$\sup_{(\mu_h,\omega_h)\in M_h\times W_h}\frac{|a'(m_h,\mu_h)-b'(\mu_h,w_h)+b'(m_h,\omega_h)+c(w_h,\omega_h)|}{\|(\mu_h,w_h)\|}\geq\frac{1}{2}C_3\|(m_h,w_h)\|. \quad (4.12)$$

Утверждение вытекает из (4.9).

Укажем некоторые частные случаи выбора $\sigma_m$ и $\sigma_w$, когда удовлетворяются условия (4.10), (4.11) соответственно.

Если $\sigma_m$ — константа, то из (4.10) следует, что ограничений на шаг нет.

Если положить

$$\sigma_m = h^{-\alpha}, \quad \alpha > 0, \quad (4.13)$$

то (4.10) выполняется при

$$h \leq \left(\frac{C_3}{2C_4}\right)^{2/\alpha}. \quad (4.14)$$

Таким образом, выбор (4.13) дает ограничение на шаг в виде (4.14).

Если положить

$$\sigma_w = C_6 h^{-2}, \quad (4.15)$$

то (4.11) выполняется, если

$$C_6 \geq \left(\frac{2C_5}{C_3}\right)^2. \quad (4.16)$$

Таким образом, выбор $\sigma_w$ в виде (4.15) не дает ограничения на шаг.

Если положить

$$\sigma_w = h^{-\beta}, \quad \beta > 2, \quad (4.17)$$

то (4.11) выполняется, если

$$h \le \left(\frac{C_3}{2C_5}\right)^{2/(\beta-2)}. \tag{4.18}$$

Таким образом, выбор $\sigma_w$ в виде (4.17) дает ограничение на шаг в виде (4.18).

Из (4.12) следует

**Теорема 4.1.** *Пусть $\sigma_m$ и $\sigma_w$ удовлетворяют условиям* (4.10) *и* (4.11) *соответственно. Тогда* mortar-*задача* (3.5), (3.6) *однозначно разрешима для тех $h$, которые удовлетворяют ограничениям, связанным с выбором $\sigma_w$ и $\sigma_m$.*

Обозначим $\varepsilon^m = m - \Pi_h m$, $e^m = m - m_h$, $\varepsilon^w = w - \Sigma_h w$, $e^w = w - w_h$, где $(m, w)$ — решение задачи (2.15), (2.16), а $(m_h, w_h)$ — решение mortar-задачи (3.5), (3.6).

Очевидно,

$$\begin{aligned} e^m - \varepsilon^m &= m - m_h - m - \Pi_h m = m_h - \Pi_h m \in M_h,\\ e^w - \varepsilon^w &= w - w_h - w - \Sigma_h w = w_h - \Sigma_h w \in W_h. \end{aligned}$$

Положив в (4.12) $m_h = e^m - \varepsilon^m$, $w_h = e^w - \varepsilon^w$, получим следующую лемму.

**Лемма 4.11.** *Если $\sigma_m$ и $\sigma_w$ удовлетворяют условиям* (4.10) *и* (4.11) *соответственно, то справедливо неравенство*

$$\sup_{(\mu_h,\omega_h)\in M_h\times W_h} \frac{|a'(e^m-\varepsilon^m,\mu_h) - b'(\mu_h, e^w-\varepsilon^w) + b'(e^m-\varepsilon^m,\omega_h) + c(e^w-\varepsilon^w,\omega_h)|}{\|(\mu_h,\omega_h)\|} \ge$$
$$\ge \frac{1}{2} C_3 \|(e^m-\varepsilon^m, e^w-\varepsilon^w)\|.$$

**Лемма 4.12.** *Пусть $(m, w)$ — решение задачи* (2.15), (2.16), $w \in \overline{W} \cap (H^r_{\Omega_1} \times H^r_{\Omega_2})$, $m \in \overline{M} \cap ((H^{r-2}_{\Omega_1})^4 \times (H^{r-2}_{\Omega_2})^4)$, $r \ge 7/2$, $\operatorname{tr} w|_{\partial\Omega_{12}} \in H^r_{\partial\Omega_{12}} \times H^r_{\partial\Omega_{12}}$. *При этих условиях справедливо неравенство*

$$\sup_{(\mu_h,\omega_h)\in M_h\times W_h} \frac{|a'(e^m-\varepsilon^m,\mu_h) - b'(\mu_h, e^w-\varepsilon^w) + b'(e^m-\varepsilon^m,\omega_h) + c(e^w-\varepsilon^w,\omega_h)|}{\|(\mu_h,\omega_h)\|} \le$$
$$\le C_7[(h^s + h^{\overline{s}} + \sigma_m^{1/2} h^{\overline{s}+1/2} + \sigma_w^{-1/2} h^{s-1})(\|m\|_{(H^s_{\Omega_1})^4\times(H^s_{\Omega_2})^4} + \|m\|_{(H^{\overline{s}}_{\partial\Omega_{12}})^4\times(H^{\overline{s}}_{\partial\Omega_{12}})^4})+$$
$$+ (h^{p-3/2} + \sigma_m^{-1/2} h^{p-2} + \sigma_w^{1/2} h^{p-1/2})(\|w\|_{H^p_{\Omega_1}\times H^p_{\Omega_2}} + \|w\|_{H^p_{\partial\Omega_{12}}\times H^p_{\partial\Omega_{12}}})], \tag{4.19}$$

*где*

$$p = \min(k+1, r), \quad s = \min(k, r-2), \quad \overline{s} = \min\big(k, r - 5/2\big).$$

*Доказательство.* a) В силу теоремы 3.1 и того, что $(m_h, w_h)$ — решение mortar-задачи (3.5), (3.6), имеем

$$a'(e^m, \mu_h) - b'(\mu_h, e^w) = [a'(m, \mu_h) - b'(\mu_h, w)] - [a'(m_h, \mu_h) - b'(\mu_h, w_h)] = 0.$$

Таким образом,

$$a'(e^m, \mu_h) - b'(\mu_h, e^w) = 0. \tag{4.20}$$

b) Аналогично

$$\begin{aligned} b'(e^m, \omega_h) + c(e^w, \omega_h) &= b'(m - m_h, \omega_h) + c(w - w_h, \omega_h) =\\ &= [b'(m, \omega_h) + c(w, \omega_h)] - [b'(m_h, \omega_h) + c(w_h, \omega_h)] = f(\omega_h) - f(\omega_h) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$b'(e^m,\omega_h)+c(e^w,\omega_h)=0. \tag{4.21}$$

c) Используя теоремы аппроксимации и обратное неравенство (4.7), получаем некоторые вспомогательные оценки

$$\begin{aligned}\Big|\int_{\partial\Omega_{12}} JM_n(\mu_h)[\partial_n(w-\Sigma_h w)]ds\Big| \le \\ \le \|JM_n(\mu_h)\|_{L_{2,\partial\Omega_{12}}}\cdot\|[\partial_n(w-\Sigma_h w)]\|_{L_{2,\partial\Omega_{12}}\times L_{2,\partial\Omega_{12}}} \le \\ \le C_8\|JM_n(\mu_h)\|_{L_{2,\partial\Omega_{12}}}\cdot\|w-\Sigma_h w\|_{H^{3/2}_{\Omega_1}\times H^{3/2}_{\Omega_2}} \le \\ \le C_9\sigma_m^{1/2}h^{1/2}\|JM_n(\mu_h)\|_{L_{2,\partial\Omega_{12}}}\cdot\sigma_m^{-1/2}h^{p-2}\|w\|_{H^p_{\Omega_1}\times H_{\Omega_2^p}} \le \\ \le C_9\sigma_m^{-1/2}h^{p-2}\|w\|_{H^p_{\Omega_1}\times H^p_{\Omega_2}}\cdot\|(\mu_h,\omega_h)\|, \quad p=\min(k+1,r-1),\end{aligned} \tag{4.22}$$

$$\begin{aligned}\Big|\int_{\partial\Omega_{12}}[Q_n(\mu_h)]J(w-\Sigma_h w)ds\Big| \le \|[Q_n(\mu_h)]\|_{L_{2,\partial\Omega_{12}}}\cdot\|J(w-\Sigma_h w)\|_{L_{2,\partial\Omega_{12}}} \le \\ \le C_{10}\|\mu_h\|_{\left(H^{3/2}_{h_1,\Omega_1}\right)^4\times\left(H^{3/2}_{h_2,\Omega_2}\right)^4}\cdot h^p\|w\|_{H^p_{\partial\Omega_{12}}\times H^p_{\partial\Omega_{12}}} \le \\ \le C_{11}h^{p-3/2}\|\mu_h\|_{(L_{2,\Omega_1})^4\times(L_{2,\Omega_2})^4}\|w\|_{H^p_{\partial\Omega_{12}}\times H^p_{\partial\Omega_{12}}} \le \\ \le C_{11}h^{p-3/2}\|w\|_{H^p_{\partial\Omega_{12}}\times H^p_{\partial\Omega_{12}}}\|(\mu_h,\omega_h)\|.\end{aligned} \tag{4.23}$$

Согласно (4.1), (4.22), (4.23) и лемме 4.6 получаем

$$\begin{aligned}a'(\varepsilon^m,\mu_h)-b'(\mu_h,\varepsilon^w)=a'(m-\Pi_h m,\mu_h)-b(\mu_h,w-\Sigma_h w)- \\ -\int_{\partial\Omega_{12}} JM_n(\mu_h)[\partial_n(w-\Sigma_h w)]ds-\int_{\partial\Omega_{12}}[Q_n(\mu_h)]J(w-\Sigma_h w)ds= \\ =a(m-\Pi_h m,\mu_h)+\sigma_m h\int_{\partial\Omega_{12}} JM_n(m-\Pi_h m)\cdot JM_n(\mu_h)ds- \\ -\int_{\partial\Omega_{12}} JM_n(\mu_h)[\partial_n(w-\Sigma_h w)]ds-\int_{\partial\Omega_{12}}[Q_n(\mu_h)]J(w-\Sigma_h w)ds \le \\ \le \|m-\Pi_h m\|_{(L_{2,\Omega_1})^4\times(L_{2,\Omega_2})^4}\cdot\|\mu_h\|_{(L_{2,\Omega_1})^4\times(L_{2,\Omega_2})^4}+ \\ +h^{1/2}\|JM_n(m-\Pi_h m)\|_{L_{2,\partial\Omega_{12}}}\cdot\sigma_m h^{1/2}\|JM_n(\mu_h)\|_{L_{2,\partial\Omega_{12}}}+ \\ +(C_9\sigma_m^{-1/2}h^{p-2}\|w\|_{H^p_{\Omega_1}\times H^p_{\Omega_2}}+C_{11}h^{p-3/2}\|w\|_{H^p_{\partial\Omega_{12}}\times H^p_{\partial\Omega_{12}}})\|(\mu_h,\omega_h)\| \le \\ \le C_{12}(h^s\|m\|_{(H^s_{\Omega_1})^4\times(H^s_{\Omega_2})^4}+\sigma_m^{1/2}h^{\bar s+1/2}\|m\|_{(H^{\bar s}_{\partial\Omega_{12}})^4\times(H^{\bar s}_{\partial\Omega_{12}})^4}+ \\ +\sigma_m^{-1/2}h^{p-2}\|w\|_{H^p_{\Omega_1}\times H^p_{\Omega_2}}+h^{p-3/2}\|w\|_{H^p_{\partial\Omega_{12}}\times H^p_{\partial\Omega_{12}}})\|(\mu_h,\omega_h)\|.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}a'(\varepsilon^m,\mu_h)-b'(\mu_h,\varepsilon^w)\le C_{12}(h^s\|m\|_{(H^s_{\Omega_1})^4\times(H^s_{\Omega_2})^4}+\sigma_m^{1/2}h^{\bar s+1/2}\|m\|_{(H^{\bar s}_{\partial\Omega_{12}})^4\times(H^{\bar s}_{\partial\Omega_{12}})^4}+ \\ +\sigma_m^{-1/2}h^{p-2}\|w\|_{H^p_{\Omega_1}\times H^p_{\Omega_2}}+h^{p-3/2}\|w\|_{H^p_{\partial\Omega_{12}}\times H_{\partial\Omega^p_{12}}})\|(\mu_h,\omega_h)\|.\end{aligned} \tag{4.24}$$

d) Используя теоремы аппроксимации, получаем некоторые вспомогательные оценки

$$\int_{\partial\Omega_{12}} JM_n(m-\Pi_h(m))[\partial_n\omega_h]ds \leq$$
$$\leq \|JM_n(m-\Pi_h(m))\|_{L_{2,\partial\Omega_{12}}}\|[\partial_n\omega_h]\|_{L_{2,\partial\Omega_{12}}\times L_{2,\partial\Omega_{12}}} \leq$$
$$\leq C_{13}h^{\overline{s}}\|m\|_{(H^{\overline{s}}_{\partial\Omega_{12}})^4\times(H^{\overline{s}}_{\partial\Omega_{12}})^4}\cdot\|\omega_h\|_{H^{3/2}_{\Omega_1}\times H^{3/2}_{\Omega_2}} \leq$$
$$\leq C_{13}h^{\overline{s}}\|m\|_{(H^{\overline{s}}_{\partial\Omega_{12}})^4\times(H^{\overline{s}}_{\partial\Omega_{12}})^4}\|(\mu_h,\omega_h)\|, \quad (4.25)$$

$$\int_{\partial\Omega_{12}}[Q_n(m-\Pi_hm)]J\omega_hds \leq \|Q_n(m-\Pi_hm)\|_{L_{2,\partial\Omega_{12}}}\cdot\|J\omega_h\|_{L_{2,\partial\Omega_{12}}} \leq$$
$$\leq C_{14}\|m-\Pi_hm\|_{\left(H^{3/2}_{h_1,\Omega_1}\right)^4\times\left(H^{3/2}_{h_2,\Omega_2}\right)^4}\cdot\|J\omega_h\|_{L_{2,\partial\Omega_{12}}} \leq$$
$$\leq C_{15}\sigma_w^{-1/2}h^{s-1}\|m\|_{(H^s_{\Omega_1})^4\times(H^s_{\Omega_2})^4}\cdot\sigma_w^{1/2}h^{-1/2}\|J\omega_h\|_{L_{2,\partial\Omega_{12}}} \leq$$
$$\leq C_{15}\sigma_w^{-1/2}h^{s-1}\|m\|_{(H^s_{\Omega_1})^4\times(H^s_{\Omega_2})^4}\cdot\|(\mu_h,\omega_h)\|. \quad (4.26)$$

Используя (4.2), (4.25), (4.26) и лемму 4.6, имеем

$$b'(\varepsilon^m,\omega_h)+c(\varepsilon^w,\omega_h)=b(m-\Pi_hm,\omega_h)+$$
$$+\int_{\partial\Omega_{12}}JM_n(m-\Pi_h(m))[\partial_n\omega_h]ds+\int_{\partial\Omega_{12}}[Q_n(m-\Pi_hm)]J\omega_hds+c(w-\Sigma_hw,\omega_h)=$$
$$=\int_{\partial\Omega_{12}}JM_n(m-\Pi_h(m))[\partial_n\omega_h]ds+\int_{\partial\Omega_{12}}[Q_n(m-\Pi_hm)]J\omega_hds+$$
$$+\sigma_wh^{-1}\int_{\partial\Omega_{12}}J(w-\Sigma_hw)J\omega_hds \leq$$
$$\leq C_{13}h^{\overline{s}}\|m\|_{(H^{\overline{s}}_{\partial\Omega_{12}})^4\times(H^{\overline{s}}_{\partial\Omega_{12}})^4}\|(\mu_h,\omega_h)\|+C_{15}\sigma_w^{-1/2}h^{s-1}\|m\|_{(H^s_{\Omega_1})^4\times(H^s_{\Omega_2})^4}\cdot\|(\mu_h,\omega_h)\|+$$
$$+\sigma_w^{1/2}h^{-1/2}\|J(w-\Sigma_hw)\|_{L_{2,\partial\Omega_{12}}}\sigma_w^{1/2}h^{-1/2}\|J\omega_h\|_{L_{2,\partial\Omega_{12}}} \leq$$
$$\leq C_{16}(h^{\overline{s}}\|m\|_{(H^{\overline{s}}_{\partial\Omega_{12}})^4\times(H^{\overline{s}}_{\partial\Omega_{12}})^4}+\sigma_w^{-1/2}h^{s-1}\|m\|_{(H^s_{\Omega_1})^4\times(H^s_{\Omega_2})^4}+$$
$$+\sigma_w^{1/2}h^{p-1/2}\|w\|_{H^p_{\partial\Omega_{12}}\times H^p_{\partial\Omega_{12}}})\|(\mu_h,w_h)\|.$$

Таким образом,

$$b'(\varepsilon^m,\omega_h)+c(\varepsilon^w,\omega_h)\leq C_{16}(h^{\overline{s}}\|m\|_{(H^{\overline{s}}_{\partial\Omega_{12}})^4\times(H^{\overline{s}}_{\partial\Omega_{12}})^4}+\sigma_w^{-1/2}h^{s-1}\|m\|_{(H^s_{\Omega_1})^4\times(H^s_{\Omega_2})^4}+$$
$$+\sigma_w^{1/2}h^{p-1/2}\|w\|_{H^p_{\partial\Omega_{12}}\times H^p_{\partial\Omega_{12}}})\|(\mu_h,w_h)\|. \quad (4.27)$$

Неравенство (4.19) следует из (4.20), (4.21), (4.24), (4.27). □

Из лемм 4.11 и 4.12 вытекает

**Лемма 4.13.** *Пусть* $(m,w)$ *— решение задачи* (2.1)–(2.9), $w\in\overline{W}\cap(H^r_{\Omega_1}\times H^r_{\Omega_2})$, $m\in\overline{M}\cap((H^{r-2}_{\Omega_1})^4\times(H^{r-2}_{\Omega_2})^4)$, $r\geq 7/2$, $\operatorname{tr}w|_{\partial\Omega_{12}}\in H^r_{\partial\Omega_{12}}\times H^r_{\partial\Omega_{12}}$. *Тогда имеет место неравенство*

$$\|e^m-\varepsilon^m\|_{\widehat{M}}+\sigma_m^{1/2}h^{1/2}\|JM_n(e^m-\varepsilon^m)\|_{L_{2,\partial\Omega_{12}}}+$$
$$+\|e^w-\varepsilon^w\|_{H^1_{\Omega_1}\times H^1_{\Omega_2}}+\sigma_w^{1/2}h^{-1/2}\|J(e^w-\varepsilon^w)\|_{L_{2,\partial\Omega_{12}}}\leq\|(e^m-\varepsilon^m,e^w-\varepsilon^w)\|\leq$$

$$\le C_{17}[(h^s + h^{\overline{s}} + \sigma_m^{1/2} h^{\overline{s}+1/2} + \sigma_w^{-1/2} h^{s-1})(\|m\|_{(H^s_{\Omega_1})^4\times(H^s_{\Omega_2})^4} + \|m\|_{(H^{\overline{s}}_{\partial\Omega_{12}})^4\times(H^{\overline{s}}_{\partial\Omega_{12}})^4}) +$$
$$+ (h^{p-3/2} + \sigma_m^{-1/2} h^{p-2} + \sigma_w^{1/2} h^{p-1/2})(\|w\|_{H^p_{\Omega_1}\times H^p_{\Omega_2}} + \|w\|_{H^p_{\partial\Omega_{12}}\times H^p_{\partial\Omega_{12}}})],$$
$$C_{17} = 2C_7/C_3, \quad p = \min(k+1, r), \quad s = \min(k, r-2), \quad \overline{s} = \min\big(k, r - 5/2\big).$$

Из лемм 4.5, 4.6 и 4.13 следует

**Теорема 4.2** (теорема сходимости). *Пусть* $(m, w)$ *— решение задачи* (2.1)–(2.9), $(m_h, w_h)$ *— решение* mortar-*задачи* (3.5), (3.6), *и пусть* $w \in \overline{W} \cap (H^r_{\Omega_1} \times H^r_{\Omega_2})$, $m \in \overline{M} \cap ((H^{r-2}_{\Omega_1})^4 \times (H^{r-2}_{\Omega_2})^4)$, $r \ge 7/2$, $\operatorname{tr} w|_{\partial\Omega_{12}} \in H^r_{\partial\Omega_{12}} \times H^r_{\partial\Omega_{12}}$. *Тогда имеет место неравенство*

$$\|m - m_h\|_{\widehat{M}} + \sigma_m^{1/2} h^{1/2} \|JM_n(m - m_h)\|_{L_{2,\partial\Omega_{12}}} +$$
$$+ \|w - w_h\|_{H^1_{\Omega_1}\times H^1_{\Omega_2}} + \sigma_w^{1/2} h^{-1/2} \|J(w - w_h)\|_{L_{2,\partial\Omega_{12}}} \le$$
$$\le C_{18}[(h^s + h^{\overline{s}} + \sigma_m^{1/2} h^{\overline{s}+1/2} + \sigma_w^{-1/2} h^{s-1})(\|m\|_{(H^s_{\Omega_1})^4\times(H^s_{\Omega_2})^4} + \|m\|_{(H^{\overline{s}}_{\partial\Omega_{12}})^4\times(H^{\overline{s}}_{\partial\Omega_{12}})^4}) +$$
$$+ (h^{p-1} + h^{p-3/2} + \sigma_m^{-1/2} h^{p-2} + \sigma_w^{1/2} h^{p-1/2})(\|w\|_{H^p_{\Omega_1}\times H^p_{\Omega_2}} + \|w\|_{H^p_{\partial\Omega_{12}}\times H^p_{\partial\Omega_{12}}})], \quad (4.28)$$
$$p = \min(k+1, r), \quad s = \min(k, r-2), \quad \overline{s} = \min\big(k, r - 5/2\big).$$

**Следствие.** Пусть $\sigma_m = h^{-1}$, а $\sigma_w$ выбрано согласно (4.15), (4.16), тогда из (4.28) получаем

$$\|m - m_h\|_{\widehat{M}} + \|JM_n(m - m_h)\|_{L_{2,\partial\Omega_{12}}} +$$
$$+ \|w - w_h\|_{H^1_{\Omega_1}\times H^1_{\Omega_2}} + C_6^{1/2} h^{-3/2} \|J(w - w_h)\|_{L_{2,\partial\Omega_{12}}} \le$$
$$\le C_{19}[(h^s + h^{\overline{s}})(\|m\|_{(H^s_{\Omega_1})^4\times(H^s_{\Omega_2})^4} + \|m\|_{(H^{\overline{s}}_{\partial\Omega_{12}})^4\times(H^{\overline{s}}_{\partial\Omega_{12}})^4}) +$$
$$+ h^{p-3/2}(\|w\|_{H^p_{\Omega_1}\times H^p_{\Omega_2}} + \|w\|_{H^p_{\partial\Omega_{12}}\times H^p_{\partial\Omega_{12}}})]. \quad (4.29)$$

Второе слагаемое в правой части (4.29) приводит к потере в скорости сходимости $O(h^{1/2})$ независимо от степени сплайнов по сравнению со скоростью сходимости на стыкующихся сетках. Но эта потеря меньше, чем в методе штрафа [15].

Из (4.29) имеем

$$\|JM_n(m - m_h)\|_{L_{2,\partial\Omega_{12}}} = \|JM_n(m_h)\|_{L_{2,\partial\Omega_{12}}} \le$$
$$\le C_{19}[(h^s + h^{\overline{s}})(\|m\|_{(H^s_{\Omega_1})^4\times(H^s_{\Omega_2})^4} + \|m\|_{(H^{\overline{s}}_{\partial\Omega_{12}})^4\times(H^{\overline{s}}_{\partial\Omega_{12}})^4}) +$$
$$+ h^{p-3/2}(\|w\|_{H^p_{\Omega_1}\times H^p_{\Omega_2}} + \|w\|_{H^p_{\partial\Omega_{12}}\times H^p_{\partial\Omega_{12}}})],$$

$$\|J(w - w_h)\|_{L_{2,\partial\Omega_{12}}} = \|Jw_h\|_{L_{2,\partial\Omega_{12}}} \le$$
$$\le C_{20} h^{3/2}[(h^s + h^{\overline{s}})(\|m\|_{(H^s_{\Omega_1})^4\times(H^s_{\Omega_2})^4} + \|m\|_{(H^{\overline{s}}_{\partial\Omega_{12}})^4\times(H^{\overline{s}}_{\partial\Omega_{12}})^4}) +$$
$$+ h^{p-3/2}(\|w\|_{H^p_{\Omega_1}\times H^p_{\Omega_2}} + \|w\|_{H^p_{\partial\Omega_{12}}\times H^p_{\partial\Omega_{12}}})].$$

В *случае* $k = 1$ имеем самую низкую степень сплайнов: нулевую для моментов и первую для перемещений. В этом случае в выражении для $b'(m_h, \omega_h)$ (3.8) отсутствует слагаемое $\int\limits_{\partial\Omega_{12}} [Q_n(m_h)] Jw_h ds$.

Вместо леммы 4.10 имеет место

**Лемма 4.14.** *Справедливо неравенство*

$$\sup_{(\mu_h,\omega_h)\in M_h\times W_h} \frac{|a'(m_h,\mu_h)-b'(\mu_h,w_h)+b'(m_h,\omega_h)+c(w_h,\omega_h)|}{\|(\mu_h,w_h)\|} \geq$$
$$\geq C_3(\|m_h\|_{\widehat{M}}+\sigma_m^{1/2}h^{1/2}\|JM_n(m_h)\|_{L_{2,\partial\Omega_{12}}})+(C_3-C_4\sigma_m^{-1/2})\|w_h\|_{\widehat{W}}+$$
$$+C_3\sigma_w^{1/2}h^{-1/2}\|Jw_h\|_{L_{2,\partial\Omega_{12}}}.$$

Это приводит к тому, что ограничение на выбор $\sigma_w$ (4.11), которое для случая $k>1$ является следствием леммы 4.10, при $k=1$ отсутствует.

Следовательно, неравенство

$$\sup_{(\mu_h,\omega_h)\in M_h\times W_h} \frac{|a'(m_h,\mu_h)-b'(\mu_h,w_h)+b'(m_h,\omega_h)+c(w_h,\omega_h)|}{\|(\mu_h,w_h)\|} \geq \frac{1}{2}C_3\|(m_h,w_h)\| \quad (4.30)$$

имеет место при $\sigma_m$, удовлетворяющем (4.10), и при любом $\sigma_w>0$.

Из (4.30) вытекает

**Теорема 4.3.** *Пусть $\sigma_m$ удовлетворяет* (4.10), *а $\sigma_w>0$ произвольное. Тогда задача* (3.5), (3.6) *имеет единственное решение.*

Вместо леммы 4.12 имеет место

**Лемма 4.15.** *Пусть $(m,w)$ — решение задачи* (2.15), (2.16), *$w\in\overline{W}\cap(H^r_{\Omega_1}\times H^r_{\Omega_2})$, $m\in\overline{M}\cap((H^{r-2}_{\Omega_1})^4\times(H^{r-2}_{\Omega_2})^4)$, $r\geq 7/2$.*

*При этих условиях справедливо неравенство*

$$\sup_{(\mu_h,\omega_h)\in M_h\times W_h} \frac{|a'(e^m-\varepsilon^m,\mu_h)-b(\mu_h,e^w-\varepsilon^w)+b(e^m-\varepsilon^m,\omega_h)+c(e^w-\varepsilon^w,\omega_h)|}{\|(\mu_h,\omega_h)\|} \leq$$
$$\leq C_{20}[(h+\sigma_m^{1/2}h^{3/2})(\|m\|_{(H^1_{\Omega_1})^4\times(H^1_{\Omega_2})^4}+\|m\|_{(H^1_{\partial\Omega_{12}})^4\times(H^1_{\partial\Omega_{12}})^4})+$$
$$+(\sigma_m^{-1/2}+\sigma_w^{1/2}h^{3/2})(\|w\|_{H^2_{\Omega_1}\times H^2_{\Omega_2}}+\|w\|_{H^2_{\partial\Omega_{12}}\times H^2_{\partial\Omega_{12}}})].$$

**Лемма 4.16.** *Пусть $(m,w)$ — решение задачи* (2.1)–(2.9), *$w\in\overline{W}\cap(H^r_{\Omega_1}\times H^r_{\Omega_2})$, $m\in\overline{M}\cap((H^{r-2}_{\Omega_1})^4\times(H^{r-2}_{\Omega_2})^4)$, $r\geq 7/2$. Тогда имеет место неравенство*

$$\|e^m-\varepsilon^m\|_{\widehat{M}}+\sigma_m^{1/2}h^{1/2}\|JM_n(e^m-\varepsilon^m)\|_{L_{2,\partial\Omega_{12}}}+$$
$$+\|e^w-\varepsilon^w\|_{H^1_{\Omega_1}\times H^1_{\Omega_2}}+\sigma_w^{1/2}h^{-1/2}\|J(e^w-\varepsilon^w)\|_{L_{2,\partial\Omega_{12}}}\leq$$
$$\leq\|(e^m-\varepsilon^m,e^w-\varepsilon^w)\|\leq$$
$$\leq C_{21}[(h+\sigma_m^{1/2}h^{3/2})(\|m\|_{(H^1_{\Omega_1})^4\times(H^1_{\Omega_2})^4}+\|m\|_{(H^1_{\partial\Omega_{12}})^4\times(H^1_{\partial\Omega_{12}})^4})+$$
$$+(\sigma_m^{-1/2}+\sigma_w^{1/2}h^{3/2})(\|w\|_{H^2_{\Omega_1}\times H^2_{\Omega_2}}+\|w\|_{H^2_{\partial\Omega_{12}}\times H^2_{\partial\Omega_{12}}})].$$

Из лемм 4.5, 4.6 и 4.16 следует

**Теорема 4.4** (теорема сходимости при $k=1$)**.** *Пусть $(m,w)$ — решение задачи* (2.1)–(2.9), *$(m_h,w_h)$ — решение* mortar-*задачи* (3.5), (3.6), *и пусть $w\in\overline{W}\cap(H^r_{\Omega_1}\times H^r_{\Omega_2})$, $m\in\overline{M}\cap((H^{r-2}_{\Omega_1})^4\times(H^{r-2}_{\Omega_2})^4)$, $r\geq 7/2$. Тогда при $\sigma_m$, удовлетворяющем* (4.10), *и произвольном $\sigma_w>0$ имеет место неравенство*

$$\|m-m_h\|_{\widehat{M}}+\sigma_m^{1/2}h^{1/2}\|JM_n(m-m_h)\|_{L_{2,\partial\Omega_{12}}}+\|w-w_h\|_{H^1_{\Omega_1}\times H^1_{\Omega_2}}+$$
$$+\sigma_w^{1/2}h^{-1/2}\|J(w-w_h)\|_{L_{2,\partial\Omega_{12}}}\le C_{22}[(h+\sigma_m^{1/2}h^{3/2})(\|m\|_{(H^1_{\Omega_1})^4\times(H^1_{\Omega_2})^4}+$$
$$+\|m\|_{(H^1_{\partial\Omega_{12}})^4\times(H^1_{\partial\Omega_{12}})^4})+(h+\sigma_m^{-1/2}+\sigma_w^{1/2}h^{3/2})(\|w\|_{H^2_{\Omega_1}\times H^2_{\Omega_2}}+\|w\|_{H^2_{\partial\Omega_{12}}\times H^2_{\partial\Omega_{12}}})]. \quad (4.31)$$

**Следствие.** Наибольшая скорость сходимости получается при

$$\sigma_m=\sigma_w=h^{-3/2}.$$

Такой выбор штрафа возможен, так как на выбор $\sigma_w$ ограничений здесь нет.

Выбор $\sigma_m=h^{-3/2}$ соответствует (4.13), при этом $h$ должно удовлетворять условию (4.14), т. е.

$$h\le\left(\frac{C_3}{2C_4}\right)^{4/3}.$$

При таком выборе параметров из (4.31) имеем

$$\|m-m_h\|_{\widehat{M}}+\|w-w_h\|_{H^1_{\Omega_1}\times H^1_{\Omega_2}}\le C_{22}(h+h^{3/4})(\|m\|_{(H^1_{\Omega_1})^4\times(H^1_{\Omega_2})^4}+$$
$$+\|m\|_{(H^1_{\partial\Omega_{12}})^4\times(H^1_{\partial\Omega_{12}})^4}+\|w\|_{H^2_{\Omega_1}\times H^2_{\Omega_2}}+\|w\|_{H^2_{\partial\Omega_{12}}\times H^2_{\partial\Omega_{12}}}), \quad (4.32)$$

$$\|JM_n(m_h)\|_{L_{2,\partial\Omega_{12}}}\le C_{22}h^{1/4}(h+h^{3/4})(\|m\|_{(H^1_{\Omega_1})^4\times(H^1_{\Omega_2})^4}+\|m\|_{(H^1_{\partial\Omega_{12}})^4\times(H^1_{\partial\Omega_{12}})^4}+$$
$$+\|w\|_{H^2_{\Omega_1}\times H^2_{\Omega_2}}+\|w\|_{H^2_{\partial\Omega_{12}}\times H^2_{\partial\Omega_{12}}}),$$

$$\|J(w-w_h)\|_{L_{2,\partial\Omega_{12}}}\le C_{22}h^{3/4}(h+h^{3/4})(\|m\|_{(H^1_{\Omega_1})^4\times(H^1_{\Omega_2})^4}+\|m\|_{(H^1_{\partial\Omega_{12}})^4\times(H^1_{\partial\Omega_{12}})^4}+$$
$$+\|w\|_{H^2_{\Omega_1}\times H^2_{\Omega_2}}+\|w\|_{H^2_{\partial\Omega_{12}}\times H^2_{\partial\Omega_{12}}}).$$

Из (4.32) следует, что потеря в скорости сходимости по сравнению с методом конечных элементов на стыкующихся сетках имеет порядок $O(h^{1/4})$. Однако эта потеря меньше, чем в методе штрафа [9].

Никакой другой выбор параметров не дает более высокой скорости сходимости.

## Литература


[1] Babuška I. *Error-bounds for finite element method* // Numer.Math. – 1971. – V. 16. – P. 322–333.

[2] Nitsche J.A. *Convergence of nonconforming methods* // Math. Aspects Finite Elem. Partial Differ. Equat., Proc Symp. Madison, 1974. – P. 15–53.

[3] Becker R., Hansbo P., Stenberg R. *A finite element method for domain decomposition with non-matching grids* // Math. Model. Numer. Anal. – 2003. – V. 37. – № 2. – P. 209–225.

[4] Le Tallec P., Sassi T. *Domain decomposition with nonmatching grids: augmented Lagrangian approach* // Math. Comput. – 1995. – V. 64. – № 212. – P. 1367–1396.

[5] Babuška I. *The finite element method with penalty* // Math. Comput. – 1973. – V. 27. – P. 221–228.

[6] Aubin J.-P. *Approximation des problèmes aux limites non homogènes et régularité de la convergence* // Calcolo. – 1969. – V. 6. – P. 117–140.

[7] Масловская Л.В., Масловская О.М. *Метод штрафа для стыковки сеток в методе конечных элементов* // Изв. вузов. Математика. – 2006. – № 10. – С. 33–43.

[8] Масловская Л.В., Масловская О.М. *Некоторые методы стыковки сеток в методе конечных элементов* // Материалы Седьмого Всероссийского семинара: Сеточные методы для краевых задач и приложения. Казань. – 21–24 сентября 2007. – С. 186–189.

[9] Масловская Л.В., Масловская О.М. *Метод штрафа стыковки сеток в смешанном методе конечных элементов* // Изв. вузов. Математика. – 2009. – № 3. – С. 37–54.

[10] Brezzi F., Raviart P.A. *Mixed finite element methods for 4th order elliptic equations* // Topics in Numerical Analysis III. – London, New York, San Francisco: Academic Press. – 1976. – P. 315–338.
[11] Falk R.S., Osborn J.E. *Error estimates for mixed methods* // RAIRO. Anal. numér. – 1980. – V. 14. – № 3. – P. 249–277.
[12] Масловская Л.В. *Поведение решения бигармонического уравнения в областях с угловыми точками* // Дифференц. уравнения. – 1983. – Т. 19. – № 12. – С. 2172–2175.
[13] Сьярле Ф. *Метод конечных элементов для эллиптических задач.* – М.: Мир, 1980. – 512 с.
[14] Babuška I., Osborn J., Pitkaeranta J. *Analysis of mixed methods using mesh dependent norms* // Math. Comput. – 1980 – V. 35. – P. 1039–1062.
[15] Brezzi F. *On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrangian multipliers* // RAIRO, R2. – 1974. – V. 8. – P. 129–151.

*Л.В. Масловская*

*профессор, кафедра вычислительной математики,*
*Одесский национальный университет,*
*ул. Дворянская, д. 2, г. Одесса, 65026, Украина,*

e-mail: nasko1@yandex.ru

*О.М. Масловская*

*доцент, кафедра вычислительной математики,*
*Одесский национальный университет,*
*ул. Дворянская, д. 2, г. Одесса, 65026, Украина,*

e-mail: nasko1@yandex.ru

*L.V. Maslovskaya*

*Professor, Chair of Computational Mathematics,*
*Odessa National University,*
*2 Dvoryanskaya str., Odessa, 65026 Ukraine,*

e-mail: nasko1@yandex.ru

*O.M. Maslovskaya*

*Associate Professor, Chair of Computational Mathematics,*
*Odessa National University,*
*2 Dvoryanskaya str., Odessa, 65026 Ukraine,*

e-mail: nasko1@yandex.ru