И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

2005 МАТЕМАТИКА № 6 (517)

УДК 515.124

Е.Н. СОСОВ

КАСАТЕЛЬНОЕ ПРОСТРАНСТВО ПО БУЗЕМАНУ

Исследуются метрические свойства касательного пространства для метрического пространства более общего, чем дифференцируемое G-пространство Буземана. Установлено, что метрика на касательном пространстве в произвольной точке пространства неположительной кривизны по Буземану (дифференцируемого по Буземану метрического пространства) внутренняя. Доказано, что касательное пространство в произвольной точке локально полного дифференцируемого по Буземану метрического пространства является полным, а также, что касательное пространство в произвольной точке локально компактного пространства неположительной кривизны по Буземану является конечно-компактным геодезическим.

1. Необходимые определения и теоремы

Рассмотрим метрическое пространство (X,ρ) с выделенным семейством сегментов S (сегментом $[x,y]$ с концами $x,y \in X$ называется непрерывная кривая, соединяющая точки x, y, длина которой равна расстоянию $\rho(x,y)$ между этими точками ([1], с. 42)), удовлетворяющее следующим условиям.

A. Каждый подсегмент произвольного сегмента из S принадлежит S.

B. Для каждого $p \in X$ найдется такое положительное вещественное число $r(p)$, что для любых x, y из открытого шара $B(p,r(p))$ существует единственный сегмент $[x,y] \in S$.

В дальнейшем будем использовать следующие обозначения и определения. $\mathbb{R}_+$ — множество неотрицательных вещественных чисел; $xy = \rho(x,y)$. $B[x,r]$ ($B(x,r)$, $S(x,r)$) — замкнутый шар (открытый шар, сфера) с центром в точке $x \in X$, радиуса $r > 0$. Для $\lambda \in [0,1]$, $x,y \in X$ $\omega_\lambda[x,y]$ — точка сегмента $[x,y] \in S$ такая, что $x\omega_\lambda[x,y] = \lambda xy$.

Пространство (X,ρ), удовлетворяющее условиям A, B, назовем дифференцируемым в точке $p \in X$ по Буземану, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta \in (0, r(p))$, что $|\omega_\lambda[p,x]\omega_\lambda[p,y] - \lambda xy| \le \varepsilon\lambda xy$ для любых $\lambda \in [0,1]$, $x,y \in B(p,\delta)$ ([1], с. 293; [2], с. 21).

Пространство (X,ρ), удовлетворяющее условиям A, B, назовем пространством неположительной кривизны по Буземану, если $2\omega_{1/2}[z,x]\omega_{1/2}[z,y] \le xy$ для любых $x,y,z \in B(p,r(p))$ ([1], с. 304; [3], с. 63).

Метрическое пространство X называется пространством с внутренней метрикой, если для любых $x,y \in X$, $\varepsilon > 0$ найдется конечная последовательность точек $z_0 = x, z_1, \cdots, z_k = y$ такая, что $z_iz_{i+1} < \varepsilon$ $(0 \le i \le k-1)$ и $z_0z_1 + \cdots + z_{k-1}z_k < xy + \varepsilon$ [4].

Пространство (X,ρ) называется геодезическим, если любые две его точки можно соединить сегментом [5] (в первоначальном варианте в этом определении пространство X считали полным метрическим [6]).

Пространство (X,ρ) называется конечно-компактным метрическим пространством, если в нем каждое ограниченное замкнутое множество компактно ([1], с. 18).

Отображение f из метрического пространства (X,ρ) в метрическое пространство (Y,d) называется билипшицевым отображением, если найдется такая константа $\lambda \ge 1$, что $\rho(x,y)/\lambda \le$

$d(f(x),f(y)) \le \lambda\rho(x,y)$ для любых $x,y \in X$. Метрические пространства X, Y называются билипшицево эквивалентными, если существует сюръективное билипшицево отображение $f : X \to Y$ ([7], с. 269).

Сформулируем полученные результаты.

Лемма 1. *Пусть пространство (X,ρ) удовлетворяет условиям* A, B. *Тогда функция*

$$\overline{m}_p : B(p,r(p)) \times B(p,r(p)) \longrightarrow \mathbb{R}_+, \quad \overline{m}_p(x,y) = \overline{\lim_{\lambda\to 0+}} \frac{\omega_\lambda[p,x]\omega_\lambda[p,y]}{\lambda}$$

есть псевдометрика, обладающая следующими свойствами:

$$\overline{m}_p(p,x) = px, \quad \overline{m}_p(\omega_\lambda[p,x],\omega_\lambda[p,y]) = \lambda\overline{m}_p(x,y) \ \ \text{для любых } \lambda \in [0,1], \quad x,y \in B(p,r(p)).$$

Пусть пространство (X,ρ) удовлетворяет условиям A, B. Из леммы 1 следует, что функция $m_p : (B(p,r(p)) \times \mathbb{R}_+) \times (B(p,r(p)) \times \mathbb{R}_+) \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $m_p((x;\lambda),(y;\mu)) = \tau\overline{m}_p(\omega_{\lambda/\tau}[p,x],\omega_{\mu/\tau}[p,y])$, где $\tau \in [\max[\lambda,\mu],+\infty)$, — корректно определенная псевдометрика. Введем на множестве $B(p,r(p)) \times \mathbb{R}_+$ отношение эквивалентности $(x;\lambda) \sim (y;\mu)$, если $m_p((x;\lambda),(y;\mu)) = 0$. Тогда псевдометрика индуцирует на фактор-пространстве $X_p = (B(p,r(p)) \times \mathbb{R}_+)/\sim$ метрику, которую обозначим тем же символом m_p.

Теорема 1. *Пусть (X,ρ) — пространство неположительной кривизны по Буземану. Тогда*

(i) $\overline{m}_p(x,y) = \lim\limits_{\nu\to 0+} \frac{\omega_\nu[p,x]\omega_\nu[p,y]}{\nu}$ *для всех $x,y \in B(p,r(p))$*;

(ii) $\overline{m}_p(x,y) \le xy$ *для всех $x,y \in B(p,r(p))$*;

(iii) m_p *есть внутренняя метрика на X_p*;

(iv) *если, кроме того, пространство X локально компактно, то для любого $p \in X$ (X_p,m_p) — конечно-компактное геодезическое пространство.*

Теорема 2. *Пусть (X,ρ) — пространство, дифференцируемое в точке $p \in X$ по Буземану. Тогда*

(i) $\overline{m}_p(x,y) = \lim\limits_{\nu\to 0+} \frac{\omega_\nu[p,x]\omega_\nu[p,y]}{\nu}$ *для всех $x,y \in B(p,r(p))$*;

(ii) $\overline{m}_p$ *есть метрика на открытом шаре $B(p,r(p))$, и для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta \in (0,r(p))$, что $|\overline{m}_p(x,y) - xy| \le \varepsilon xy$ для всех $x,y \in B(p,\delta)$*;

(iii) m_p *есть внутренняя метрика на X_p*;

(iv) *если, кроме того, X — локально полное пространство, то (X_p,m_p) — полное пространство*;

(v) *пусть δ — то же, что и в п.* (ii) *при $0 < \varepsilon < 1$, и пусть найдется такое число $t(p) \in (0,\delta)$, что для каждой точки $x \in B(p,t(p)) \setminus \{p\}$ существует точка $\widehat{x} \in S(p,t(p))$ такая, что $x \in [p,\widehat{x}]$, где $[p,\widehat{x}] \in S$, тогда для каждого $R > 0$ пространства $(B[p,t(p)],\rho)$, $(B[[p;1],R],m_p)$ билипшицево эквивалентны.*

Замечание. Нетрудно проверить, что если X — дифференцируемое в точке p G-пространство Буземана, то пространство (X_p,m_p) изометрично касательному пространству в точке p по Буземану (при наличии в пространстве (X_p,m_p) линейной структуры эта изометрия является линейной) ([2], с. 22). Поэтому метрическое пространство (X_p,m_p) естественно называть касательным пространством по Буземану в точке $p \in X$.

2. Доказательства полученных результатов

Доказательство леммы 1 сводится к непосредственной проверке.

Доказательство теоремы 1. (i)–(ii) Пусть (X,ρ) удовлетворяет условиям A, B и $2\omega_{1/2}[z,x]\omega_{1/2}[z,y] \le xy$ для любых $x,y,z \in B(p,r(p))$. Из последнего вытекает

$$\omega_\lambda[z,x]\omega_\lambda[z,y] \le \lambda xy \tag{1}$$

для любых $0 \le \lambda \le 1$, $x, y, z \in B(p, r(p))$. Следовательно, $\overline{m}_p(x,y) \le xy$ для любых $x, y \in B(p, r(p))$. Кроме того, из доказательств теорем 36.4–36.6 в ([1], с. 304–307) следует, что для любых $x, y, z \in B(p, r(p))$ непрерывная функция $f : [0,1] \to R$, $f[\lambda] = \omega_\lambda[z,x]\omega_\lambda[z,y]$ выпукла. Таким образом, существует предел $\lim\limits_{\nu \to 0+} \frac{\omega_\nu[p,x]\omega_\nu[p,y]}{\nu}$ для $x, y \in B(p, r(p))$.

(iii) Выберем произвольно $[x_1; \lambda], [y; \mu] \in X_p$ и для определенности считаем, что $\lambda \le \mu$. Тогда $[x_1; \lambda] = [\omega_{\lambda/\mu}[p, x_1]; \mu]$. Обозначим $x = \omega_{\lambda/\mu}[p, x_1]$. В силу леммы 1 из [8] достаточно доказать, что для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такая точка $[z; \tau] \in X_p$, что $2\max[m_p([x;\mu],[z;\tau]), m_p([y;\mu],[z;\tau])] < m_p([x;\mu],[y;\mu]) + \varepsilon$. Очевидно, найдется такое $\nu_0 \in (0,1]$, что $z_\nu = \omega_{1/2}[\omega_\nu[p,x], \omega_\nu[p,y]] \in B(p, r(p))$ для $\nu \in (0, \nu_0]$. Из неравенства (1) следует

$$\max[\overline{m}_p(\omega_\nu[p,x], z_\nu), \overline{m}_p(\omega_\nu[p,y], z_\nu)] \le \max[\omega_\nu[p,x]z_\nu, \omega_\nu[p,y]z_\nu] = \omega_\nu[p,x]\omega_\nu[p,y]/2. \qquad (2)$$

Отсюда и из леммы 1 получим $\nu\overline{m}_p(x,y) = \overline{m}_p(\omega_\nu[p,x], \omega_\nu[p,y]) \le \overline{m}_p(\omega_\nu[p,x], z_\nu) + \overline{m}_p(\omega_\nu[p,y], z_\nu) \le \omega_\nu[p,x]\omega_\nu[p,y]$. Из этих неравенств и утверждения (i) вытекает

$$\lim_{\nu \to 0+} \frac{\overline{m}_p(\omega_\nu[p,x], z_\nu) + \overline{m}_p(\omega_\nu[p,y], z_\nu)}{\nu} = \overline{m}_p(x,y).$$

Если учтем (2), то получим

$$\lim_{\nu \to 0+} \frac{\overline{m}_p(\omega_\nu[p,x], z_\nu)}{\nu} = \lim_{\nu \to 0+} \frac{\overline{m}_p(\omega_\nu[p,y], z_\nu)}{\nu} = \overline{m}_p(x,y)/2. \qquad (3)$$

Следовательно, для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\nu \in (0, \min[\delta, 1])$, что

$$\frac{\overline{m}_p(\omega_\nu[p,x], z_\nu)}{\nu} < \overline{m}_p(x,y)/2 + \varepsilon, \quad \frac{\overline{m}_p(\omega_\nu[p,y], z_\nu)}{\nu} < \overline{m}_p(x,y)/2 + \varepsilon.$$

Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ найдем такое $\nu \in (0, \min[\delta, 1])$, что

$$2\max[m_p([x;\mu],[z_\nu;\mu/\nu]), m_p([y;\mu],[z_\nu;\mu/\nu])] =$$
$$= 2\mu/\nu \max[\overline{m}_p(\omega_\nu[p,x], z_\nu), \overline{m}_p(\omega_\nu[p,y], z_\nu)] < \mu\overline{m}_p(x,y) + 2\mu\varepsilon = m_p([x;\mu],[y;\mu]) + 2\mu\varepsilon.$$

(iv) Пусть X — локально-компактное пространство неположительной кривизны по Буземану и $\{[x_n; \lambda_n]\}$ — произвольная ограниченная последовательность пространства (X_p, m_p). Заметим, что $m_p([x_n;\lambda_n],[p;1]) = \tau\overline{m}_p(\omega_{\lambda_n/\tau}[p,x_n], p) = \lambda_n p x_n$ для $\tau \ge \max[1, \lambda_n]$ и последовательность $\{\lambda_n\}$ ограничена. Тогда найдутся такие вещественные числа $r \in (0, r(p)]$, $\nu > 0$, что шар $B[p,r]$ компактен и $\omega_{\lambda_n/\nu}[p, x_n] \in B[p,r]$ $(n = 1, 2, \dots)$. Выделим подпоследовательность $\{\omega_{\lambda_k/\nu}[p, x_k]\} \subset \{\omega_{\lambda_n/\nu}[p, x_n]\}$, сходящуюся в исходной метрике к точке $y \in B[p,r]$. Отсюда, из леммы 1 и неравенства (1) следует, что $m_p([x_k;\lambda_k],[y;\nu]) = \nu\overline{m}_p(\omega_{\lambda_k/\nu}[p,x_k], y) \le \nu\omega_{\lambda_k/\nu}[p,x_k]y \to 0$ $(k \to \infty)$. Таким образом, последовательность $\{[x_n;\lambda_n]\}$ обладает сходящейся подпоследовательностью, и пространство (X_p, m_p) конечно-компактно. Из следствия обобщенной альтернативы Хопфа–Ринова ([9], с. 297) и конечной компактности пространства (X_p, m_p) следует, что оно геодезическое. $\square$

Доказательство теоремы 2. (i)–(ii) Для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta(\varepsilon) \in (0, r(p))$, что для любых $x, y \in B(p, \delta(\varepsilon))$, $0 < \lambda < \mu < 1$ верно неравенство

$$\left|\omega_\lambda[p,x]\omega_\lambda[p,y] - \frac{\lambda}{\mu}\omega_\mu[p,x]\omega_\mu[p,y]\right| \le \varepsilon\frac{\lambda}{\mu}\omega_\mu[p,x]\omega_\mu[p,y].$$

Тогда для любых $x, y \in B(p, \delta[1/2])$, $0 < \mu < \mu_0 < \frac{\delta[1/2]}{r(p)}$ верны неравенства

$$\frac{\omega_{\mu_0}[p,x]\omega_{\mu_0}[p,y]}{2\mu_0} \le \frac{\omega_\mu[p,x]\omega_\mu[p,y]}{\mu} \le \frac{3\omega_{\mu_0}[p,x]\omega_{\mu_0}[p,y]}{2\mu_0},$$

и для любых $0 < \varepsilon < 1/2$, $x, y \in B(p, \delta(\varepsilon))$, $\mu < \min[\frac{\delta(\varepsilon)}{r(p)}, \mu_0]$ выполняются неравенства

$$\left|\frac{\omega_\lambda[p,x]\omega_\lambda[p,y]}{\lambda} - \frac{\omega_\mu[p,x]\omega_\mu[p,y]}{\mu}\right| \le \varepsilon\frac{\omega_\mu[p,x]\omega_\mu[p,y]}{\mu} \le \frac{3\varepsilon\omega_{\mu_0}[p,x]\omega_{\mu_0}[p,y]}{2\mu_0}.$$

Отсюда следует существование предела

$$\overline{m}_p(x,y) = \lim_{\nu\to 0+}\frac{\omega_\nu[p,x]\omega_\nu[p,y]}{\nu}$$

и то, что $\overline{m}_p(x,y) \ne 0$ при $x \ne y$. Если обе части неравенства из определения дифференцируемости в точке $p \in X$ по Буземану поделить на $\lambda > 0$ и перейти к пределу при $\lambda \to 0+$, то получим неравенство $|\overline{m}_p(x,y) - xy| \le \varepsilon xy$ для $x, y \in B(p,\delta)$.

(iii) Выберем произвольно $[x_1;\lambda], [y;\mu] \in X_p$ и для определенности положим $\lambda \le \mu$. Тогда $[x_1;\lambda] = [\omega_{\lambda/\mu}[p,x_1];\mu]$. Обозначим $x = \omega_{\lambda/\mu}[p,x_1]$. В силу леммы 1 из [8] достаточно доказать, что для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такая точка $[z;\tau] \in X_p$, что $2\max[m_p([x;\mu],[z;\tau]), m_p([y;\mu],[z;\tau])] < m_p([x;\mu],[y;\mu]) + \varepsilon$. Очевидно, найдется такое $\nu_0 \in (0,1]$, что $z_\nu = \omega_{1/2}[\omega_\nu[p,x],\omega_\nu[p,y]] \in B(p,r(p))$ для $\nu \in (0,\nu_0]$. В силу утверждения (ii) для каждого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $\delta > 0$ и $\nu_0 \in (0,1]$, что $\omega_\nu[p,x], \omega_\nu[p,y], \omega_{1/2}[\omega_\nu[p,x],\omega_\nu[p,y]] \in B(p,\delta)$ и $\overline{m}_p(\omega_\nu[p,x],\omega_\nu[p,y]) \le (1+\varepsilon)\omega_\nu[p,x]\omega_\nu[p,y]$ для любого $\nu \in (0,\nu_0]$. Тогда для любых $\varepsilon > 0$, $\nu \in (0,\nu_0]$

$$\max[\overline{m}_p(\omega_\nu[p,x],z_\nu), \overline{m}_p(\omega_\nu[p,y],z_\nu]) \le (1+\varepsilon)\max[\omega_\nu[p,x]z_\nu, \omega_\nu[p,y]z_\nu] = (1+\varepsilon)\omega_\nu[p,x]\omega_\nu[p,y]/2. \tag{4}$$

Отсюда и из леммы 1 получим $\nu\overline{m}_p(x,y) = \overline{m}_p(\omega_\nu[p,x],\omega_\nu[p,y]) \le \overline{m}_p(\omega_\nu[p,x],z_\nu) + \overline{m}_p(\omega_\nu[p,y],z_\nu) \le (1+\varepsilon)\omega_\nu[p,x]\omega_\nu[p,y]$ для любых $\varepsilon > 0$, $\nu \in (0,\nu_0]$. Если учтем (4), то получим

$$\overline{m}_p(x,y) \le \overline{\lim_{\nu\to 0+}}\frac{\overline{m}_p(\omega_\nu[p,x],z_\nu) + \overline{m}_p(\omega_\nu[p,y],z_\nu)}{\nu} \le (1+\varepsilon)\overline{m}_p(x,y),$$

$$\overline{\lim_{\nu\to 0+}}\frac{\max[\overline{m}_p(\omega_\nu[p,x],z_\nu), \overline{m}_p(\omega_\nu[p,y],z_\nu])}{\nu} \le (1+\varepsilon)\overline{m}_p(x,y)/2$$

для любого $\varepsilon > 0$. Аналогичные неравенства верны и для нижних пределов. В силу произвольности $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\nu\to 0+}\frac{\overline{m}_p(\omega_\nu[p,x],z_\nu)}{\nu} = \lim_{\nu\to 0+}\frac{\overline{m}_p(\omega_\nu[p,y],z_\nu)}{\nu} = \overline{m}_p(x,y)/2.$$

Оставшаяся часть доказательства совпадает с частью доказательства утверждения (iii) теоремы 1 после равенств (3).

(iv) Пусть (X,ρ) — локально полное дифференцируемое в точке $p \in X$ по Буземану пространство и $(B[p,r],\rho)$, где $0 < r < \delta$, — полное подпространство пространства (X,ρ). Из неравенств $(1-\varepsilon)xy \le \overline{m}_p(x,y) \le (1+\varepsilon)xy$ для $x, y \in B[p,r]$, $0 < \varepsilon < 1$, полученных в п. (ii), следует билипшицева эквивалентность пространств $(B[p,r],\overline{m}_p)$, $(B[p,r],\rho)$ и полнота пространства $(B[p,r],\overline{m}_p)$. Пусть $\{[x_n;\lambda_n]\}$ — фундаментальная последовательность в пространстве (X_p,m_p). Тогда в силу ограниченности фундаментальной последовательности $\{[x_n;\lambda_n]\}$ и леммы 1 найдется такое число $\tau > 0$, что $\omega_{\lambda_n/\tau}[p,x_n] \in (B[p,r],\overline{m}_p)$ и $\{\omega_{\lambda_n/\tau}[p,x_n]\}$ является фундаментальной последовательностью. Пусть эта последовательность сходится к точке $z \in B[p,r]$. Тогда $m_p([x_n;\lambda_n],[z;\tau]) = \tau\overline{m}_p(\omega_{\lambda_n/\tau}[p,x_n],z) \to 0$ $(n\to\infty)$. Таким образом, метрическое пространство (X_p,m_p) полное.

(v) Докажем, что искомую билипшицеву эквивалентность определяет следующая композиция $h\circ f\circ \mathrm{id} : (B[p,t(p)],\rho) \to (B[[p;1],R],m_p)$ отображений $\mathrm{id} : (B[p,t(p)],\rho) \to (B[p,t(p)],\overline{m}_p)$; $f : (B[p,t(p)],\overline{m}_p) \to (B[[p;1],t(p)],m_p)$, $f(x) = [x;1]$; $h : (B[[p;1],t(p)],m_p) \to (B[[p;1],R],m_p)$, $h([x;\lambda]) = [x;R\lambda/t(p)]$. Рассмотрим каждое из этих отображений. Тождественное отображение $\mathrm{id} : (B[p,t(p)],\rho) \to (B[p,t(p)],\overline{m}_p)$ определяет, как было отмечено в начале доказательства п. (iv), билипшицеву эквивалетность соответствующих пространств. Докажем, что f есть изометрия. В силу равенств $m_p(f(x),f(y)) = m_p([x;1],[y;1]) = \overline{m}_p(x,y)$ для всех x, $y \in B[p,t(p)]$, отображение f есть изометрическое вложение. Осталось доказать, что оно сюръективно. Выберем произвольно $[x;\mu] \in B[[p;1],t(p)]$. Если $\mu \leq 1$, то $f(\omega_\mu[p,x]) = [\omega_\mu[p,x];1] = [x;\mu]$. Если $\mu > 1$ и $\lambda = \mu px/t(p)$, то $f(\omega_\lambda[p,\widehat{x}]) = [\omega_\lambda[p,\widehat{x}];1] = [x;\mu]$. Следовательно, отображение f сюръективно. Отображение h есть подобие (определение см. в [1], с. 286). Действительно, отображение h, очевидно, обратимо и $m_p(h([x;\lambda]),h([y;\mu])) = m_p([x;R\lambda/t(p)],[y;R\mu/t(p)]) = (R/t(p))m_p([x;\lambda],[y;\mu])$ для любых $[x;\lambda]$, $[y;\mu] \in B[[p;1],t(p)]$. Следовательно, отображение $h \circ f \circ \mathrm{id}$ определяет билипшицеву эквивалентность пространств $(B[p,t(p)],\rho)$, $(B[[p;1],R],m_p)$. $\square$

Литература

1. Буземан Г. *Геометрия геодезических.* – М.: Физматгиз, 1962. – 503 с.
2. Busemann H. *Recent synthetic differential geometry.* – Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1970. – 110 p.
3. Busemann H., Phadke B.B. *Spaces with distinguished geodesics.* – New York–Basel: Marsel Dekker Inc., 1987. – 159 p.
4. Бураго Ю.Д., Громов М.Л., Перельман Г.Д. *Пространства А.Д. Александрова с ограниченными снизу кривизнами* // УМН. – 1992. – Т. 47. – Вып. 2. – С. 3–51.
5. Берестовский В.Н. *Пространства Буземана ограниченной сверху кривизны по Александрову* // Алгебра и анализ. – 2002. – Т. 14. – Вып. 5. – С. 3–18.
6. Ефремович В.А. *Неэквиморфность пространств Эвклида и Лобачевского* // УМН. – 1949. – Т. 4. – Вып. 2. – С. 178–179.
7. Bonk M., Schramm O. *Embeddings of Gromov hyperbolic spaces* // Geom. funct. anal. – 2000. – V. 10. – P. 266–306.
8. Sosov E.N. *On Hausdorff intrinsic metric* // Lobachevskii J. of Math. – 2001. – V. 8. – P. 185–189.
9. Кон-Фоссен С.Э. *Некоторые вопросы дифференциальной геометрии в целом.* – М.: Физматгиз, 1959. – 304 с.

Казанский государственный университет

Поступила
20.10.2003