ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 10 (473)

УДК 514.174.5

В.Г. ПОКРОВСКИЙ

О РАЗРЕЗАНИИ МНОГОМЕРНОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА НА ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДЫ

Разрезания прямоугольников на прямоугольники, а затем и многомерных параллелепипедов на параллелепипеды изучались в ряде работ. В частности, в [1], [2] были получены линейные соотношения между ребрами большого и составляющих его параллелепипедов: в [1] — для параллелепипедов с целочисленными ребрами, в [2] — для параллелепипедов с произвольными ребрами.

Основной результат, полученный в [2], можно сформулировать так: пусть имеется n-мерный параллелепипед P_0 с ребрами, параллельными координатным осям пространства $\mathbf{R}^n$ (занумерованным индексами $i=1,2,\dots,n$), составленный из параллелепипедов $P_1,P_2,\dots,P_m$, и на каждом из последних выбрано ровно по одному ребру, тогда найдется такой номер $i=1,2,\dots,n$, что ребро параллелепипеда P_0, параллельное i-ой координатной оси, выражается в виде линейной комбинации с коэффициентами 0, ± 1 только тех из выбранных ребер параллелепипедов $P_1,P_2,\dots,P_m$, которые также параллельны i-ой координатной оси пространства $\mathbf{R}^n$.

В данной работе эти соотношения между ребрами распространяются, с некоторыми оговорками, на грани параллелепипедов. Точнее, вместо ребер, соответствующих координатным осям пространства $\mathbf{R}^n$, берутся грани параллелепипедов, соответствующие разбиению множества индексов $\{1,2,\dots,n\}$ на произвольные его подмножества $\{N_1,N_2,\dots,N_k\}$.[1] В этом случае справедливо утверждение (теорема 2), аналогичное вышеприведенному, с той однако оговоркой, что коэффициенты в линейной комбинации могут быть произвольными рациональными числами, не обязательно равными 0, ± 1.

Доказательство этого утверждения является несложным следствием приводимой ниже (теорема 1) алгебраической характеристики пространства n-мерных параллелепипедов через пространства одномерных параллелепипедов. Точным формулировкам предпошлем ряд предварительных соглашений.

Будем предполагать, что все рассматриваемые n-мерные параллелепипеды лежат в пространстве $\mathbf{R}^n_+=\{(t_1,t_2,\dots,t_n)\in\mathbf{R}^n : t_i\ge 0,\ i=1,2,\dots,n\}$ и определяются системой неравенств вида

$$a_i\le t_i\le b_i,\quad i=1,2,\dots,n. \tag{1}$$

Это техническое соглашение не ограничивает общности доказываемых ниже утверждений.

Через E^n обозначим векторное пространство над полем рациональных чисел $\mathbf{Q}$, порожденное характеристическими функциями[2] $\chi_P(t_1,t_2,\dots,t_n)$ параллелепипедов $P\subset\mathbf{R}^n_+$. Для краткости записи характеристические функции будем отождествлять с самими параллелепипедами и писать P вместо $\chi_P(t_1,t_2,\dots,t_n)$.

Удобно считать характеристические функции определенными с точностью до множества нулевого гиперобъема. Тогда тот факт, что параллелепипед P_0 составлен из параллелепипедов

[1] Таким образом, приведенное выше утверждение для ребер соответствует значениям: $n=k$, $N_1=\{1\}$, $N_2=\{2\},\dots,N_n=\{n\}$.

[2] Под характеристической функцией параллелепипеда P, как обычно, понимаем функцию $\chi_P(t_1,t_2,\dots,t_n)=1$, если $(t_1,t_2,\dots,t_n)\in P$, и $\chi_P(t_1,t_2,\dots,t_n)=0$ в противном случае.

$P_1, P_2, \ldots, P_m$, кратко можно записать так: $P_0 = P_1 + P_2 + \cdots + P_m$, поскольку в этом случае равенство $\chi_{P_0}(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \chi_{P_1}(t_1, t_2, \ldots, t_n) + \chi_{P_2}(t_1, t_2, \ldots, t_n) + \cdots + \chi_{P_m}(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ имеет место всюду в $\mathbf{R}_+^n$, за исключением множества граничных точек параллелепипедов, т. е. за исключением множества нулевого гиперобъема.

Для произвольной точки $(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in \mathbf{R}_+^n$ обозначим через $As(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ параллелепипед, определяемый системой неравенств $0 \le u_i \le t_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Имеет место

Лемма [2]. *Семейство $\beta_n = \{As(t_1, t_2, \ldots, t_n) : t_i > 0,\ i = 1, 2, \ldots, n\}$ образует базис векторного пространства E^n, причем произвольный параллелепипед $P \in E^n$, определяемый системой* (1)*, следующим образом разлагается по элементам этого базиса*:

$$P = \sum (-1)^{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} As(c_1, c_2, \ldots, c_n), \tag{2}$$

где суммирование идет по всем 2^n вершинам параллелепипеда P, т. е. при каждом $i = 1, 2, \ldots, n$ переменные c_i независимо принимают значения a_i или b_i, причем $p_i = 1$ в случае, если $c_i = a_i$, и $p_i = 0$ в случае, когда $c_i = b_i$.

Доказательство. Покажем, что семейство β_n линейно независимо в пространстве E^n. Пусть имеется m различных элементов семейства β_n, удовлетворяющих равенству: $\lambda_1 As(\mathrm{x}_1) + \lambda_2 As(\mathrm{x}_2) + \cdots + \lambda_m As(\mathrm{x}_m) = 0$, где $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_m$ — различные точки пространства $\mathbf{R}_+^n$. Определим в пространстве $\mathbf{R}_+^n$ отношение порядка, положив $(t_1, t_2, \ldots, t_n) \le (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ в случае, если $u_i \le t_i$ при всех $i = 1, 2, \ldots, n$. Выберем в множестве $\{\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_m\}$ какой-нибудь максимальный элемент x_j, тогда $\lambda_j = 0$, т. к. разность множеств $As(\mathrm{x}_m) \setminus \cup_{k \ne j} As(\mathrm{x}_k) \ne \emptyset$, поскольку все точки $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_m$ различны. Отсюда по индукции $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_m = 0$, что доказывает линейную независимость семейства β_n.

Для доказательства равенства (2) возьмем произвольную точку $\mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ пространства $\mathbf{R}_+^n$. Возможны следующие три случая расположения точки x относительно параллелепипеда P.

Точка x — внутренняя точка параллелепипеда P. В этом случае $\mathrm{x} \in As(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ тогда и только тогда, когда $c_1 = b_1, c_2 = b_2, \ldots, c_n = b_n$ и, следовательно, обе части равенства (2) принимают значение 1.

В случае, когда $\mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \notin P$, причем для некоторого индекса i имеет место $x_i > b_i$, обе части равенства (2), очевидно, обращаются в нуль.

Остается третий случай: $\mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \notin P$, причем $x_i \le b_i$ при всех $i = 1, 2, \ldots, n$ и $x_k < a_k$ для некоторого индекса k. В этом случае для произвольного набора $c_1, c_2, \ldots, c_{k-1}, c_{k+1}, \ldots, c_n$, где $c_i = a_i$ или $c_i = b_i$, $i = 1, 2, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n$, либо $\mathrm{x} \notin As(c_1, c_2, \ldots, c_{k-1}, b_k, c_{k+1}, \ldots, c_n)$ и $\mathrm{x} \notin As(c_1, c_2, \ldots, c_{k-1}, a_k, c_{k+1}, \ldots, c_n)$, либо точка x принадлежит обоим этим параллелепипедам. Но названные параллелепипеды входят в правую часть равенства (2) с противоположными знаками, поэтому она обращается в нуль, как и левая часть (2). Таким образом, равенство (2), а вместе с ним и лемма, доказаны.

Следующая теорема устанавливает, что пространство E^n изоморфно тензорному произведению n экземпляров пространства E^1. При этом изоморфизме параллелепипеду соответствует тензорное произведение его ребер.

Теорема 1. *Соответствие $As(t_1, t_2, \ldots, t_n) \to As(t_1) \otimes As(t_2) \otimes \cdots \otimes As(t_n)$, $t_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, продолжается по линейности до изоморфизма векторного пространства E^n в тензорное произведение $E^1 \otimes E^1 \otimes \cdots \otimes E^1$ n векторных пространств, каждое из которых совпадает с E^1. При этом изоморфизме параллелепипеду, заданному системой* (1)*, соответствует произведение $(As(b_1) - As(a_1)) \otimes (As(b_2) - As(a_2)) \otimes \cdots \otimes (As(b_n) - As(a_n))$.*

Доказательство. Продолжив по линейности отображение $As(t_1, t_2, \ldots, t_n) \to As(t_1) \otimes As(t_2) \otimes \cdots \otimes As(t_n)$, определенное на базисе β_n векторного пространства E^n (см. лемму), на все пространство E^n, получим линейное отображение $\varphi : E^n \to E^1 \otimes E^1 \otimes \cdots \otimes E^1$. Нетрудно видеть, что так определенное отображение φ является взаимно однозначным. Действительно, в силу доказанной леммы семейство $\beta_1 = \{As(t) : t > 0\}$ является базисом пространства E^1. Следовательно, семейство $\{As(t_1) \otimes As(t_2) \otimes \cdots \otimes As(t_n) : t_i > 0,\ i = 1, 2, \ldots, n\}$ является базисом векторного пространства $E^1 \otimes E^1 \otimes \cdots \otimes E^1$ [3] и, следовательно, φ — изоморфизм пространства E^n на тензорное произведение $E^1 \otimes E^1 \otimes \cdots \otimes E^1$.

Пусть теперь P — параллелепипед, определяемый системой (1). Покажем, что $\varphi(P) = (As(b_1) - As(a_1)) \otimes (As(b_2) - As(a_2)) \otimes \cdots \otimes (As(b_n) - As(a_n))$. Действительно, из равенства (2) имеем

$$\varphi(P) = \sum (-1)^{p_1+p_2+\cdots+p_n} \varphi(As(c_1, c_2, \ldots, c_n)) =$$
$$= \sum (-1)^{p_1+p_2+\cdots+p_n} As(c_1) \otimes As(c_2) \otimes \cdots \otimes As(c_n), \quad (3)$$

где c_i независимо принимают значения a_i или b_i при каждом $i = 1, 2, \ldots, n$, причем $p_i = 1$ в случае, если $c_i = a_i$, и $p_i = 0$ в случае, когда $c_i = b_i$. С другой стороны, раскрывая скобки в произведении $(As(b_1) - As(a_1)) \otimes (As(b_2) - As(a_2)) \otimes \cdots \otimes (As(b_n) - As(a_n))$, нетрудно видеть, что оно совпадает с правой частью равенства (3). $\square$

Теорема 1 позволяет распространить приведенное в начале статьи утверждение о соотношениях между ребрами параллелепипедов на их грани следующим образом.

Теорема 2. *Пусть n-мерный параллелепипед $P_0 \subset \mathbf{R}^n$ составлен из параллелепипедов $P_1, P_2, \ldots, P_m$ и зафиксировано какое-либо разбиение множества координатных осей $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ пространства $\mathbf{R}^n$ на k подмножеств: $N_1, N_2, \ldots, N_k$. Тогда для любого покрытия множества индексов $M = \{1, 2, \ldots, m\}$ его произвольными подмножествами $M_1, M_2, \ldots, M_k$ найдется номер i такой, что при некоторых рациональных ε_j имеет место равенство*

$$P_0^i = \sum_{j \in M_i} \varepsilon_j P_j^i, \quad (4)$$

где P_j^i, $j = 0, 1, \ldots, m$, — проекция параллелепипеда P_j на произведение $\mathbf{R}^{N_i}$ тех координатных осей пространства $\mathbf{R}^n$, номера которых входят в множество индексов N_i.

Доказательство проведем от противного. Пусть имеется какое-нибудь разбиение множества координатных осей $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ на k подмножеств $N_1, N_2, \ldots, N_k$ и произвольное покрытие множества индексов $M = \{1, 2, \ldots, m\}$ его подмножествами $M_1, M_2, \ldots, M_k$. Предположим, что для любого $i = 1, 2, \ldots, k$ равенство (4) не имеет места ни при каких рациональных значениях ε_j. Это означает [3], что для каждого $i = 1, 2, \ldots, k$ найдется линейная форма $F_i : E^{N_i} \to \mathbf{Q}$ такая, что

$$F_i(P_0^i) = 1, \quad \text{а} \quad F_i(P_j^i) = 0 \quad (5)$$

для всех $j \in M_i$, где E^{N_i} — векторное пространство, порожденное параллелепипедами, лежащими в пространстве $\mathbf{R}^{N_i}$.

В силу свойств тензорного произведения [3] отображение F пространства E^n:

$$F(As(t_1) \otimes As(t_2) \otimes \cdots \otimes As(t_n)) = \prod_{i=1}^{k} F_i(As(t_{i_1}) \otimes As(t_{i_2}) \otimes \cdots \otimes As(t_{i_r})), \quad (6)$$

где $(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in \mathbf{R}_+^n$, а $\{i_1, i_2, \ldots, i_r\} \in N_i$, является линейной формой на пространстве E^n.

Найдем значения $F(P_j)$, $j = 0, 1, 2, \ldots, m$. В силу (6) и теоремы 1 $F(P_j) = \prod\limits_{i=1}^{k} F_i(P_j^i)$. Отсюда $F(P_0) = 1$, поскольку $F_i(P_0^i) = 1$, $i = 1, 2, \ldots, k$, в силу равенства (5). При $j = 1, 2, \ldots, m$ из того же равенства (5) имеем $F(P_j) = 0$, т. к. $F_i(P_j^i) = 0$ для того индекса i, при котором $j \in M_i$.

Найденные значения $F(P_j)$, $j = 0, 1, 2, \ldots, m$, противоречат условию теоремы, поскольку если параллелепипед P_0 составлен из параллелепипедов $P_1, P_2, \ldots, P_m$, т. е. $P_0 = P_1 + P_2 + \cdots +$

P_m, то для линейной формы F должно выполняться равенство $F(P_0) = F(P_1) + F(P_2) + \cdots + F(P_m)$. $\square$

В заключение по поводу вышеизложенного сделаем два замечания.

Замечание 1. Утверждение теоремы 2 сохраняет силу и при следующем более слабом, нежели приведенное в ее формулировке, предположении: параллелепипед P_0 является линейной комбинацией с произвольными коэффициентами параллелепипедов $P_1, P_2, \ldots, P_m$, т. е. $P_0 = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \cdots + \lambda_m P_m$. Нетрудно видеть, что приведенное доказательство сохранит силу и в этом случае.

Замечание 2. Как показывают довольно громоздкие примеры, для некоторых разбиений равенство (4) может иметь место лишь при дробных значениях коэффициентов ε_j в отличие от соответствующего утверждения для ребер, приведенного в начале статьи (см. также [2]).

Литература

1. Barnes F. *Algebraic theory of brick packing.* II // Discrete Math. – 1982. – V. 42. – № 2–3. – P. 129–144.
2. Покровский В.Г. *О линейных соотношениях при разрезаниях на n-мерные параллелепипеды* // Матем. заметки. – 1985. – Т. 37. – № 6. – С. 901–907.
3. Ленг С. *Алгебра.* – М.: Мир, 1968. – 564 с.

Московский городской педагогический университет

Поступила 20.06.2000