ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2006 МАТЕМАТИКА № 9 (532)

УДК 517.929

Л.Э. ВАЛИУЛЛОВА, А.В. ОЖЕГОВА

РАВНОМЕРНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА С ЯДРОМ КОШИ НА ОТРЕЗКЕ

Введение

Рассмотрим сингулярное интегральное уравнение (с. и. у.) первого рода вида

$$Kx \equiv \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\rho(\tau)x(\tau)}{\tau - t}d\tau + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\rho(\tau)h(t,\tau)x(\tau)d\tau = f(t), \quad |t| < 1, \tag{1}$$

где $h(t,\tau)$, $f(t)$ — известные непрерывные функции, $x(\tau)$ — искомая функция, $\rho(\tau) = \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}}$, а сингулярный интеграл

$$I\varphi = I(\varphi;t) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau \tag{2}$$

понимается в смысле главного значения по Коши–Лебегу. Такие уравнения встречаются в задачах математической физики, аэродинамики, электродинамики и теории упругости (напр., [1], [2]).

Поскольку в большинстве случаев получить точное решение с. и. у. (1) невозможно, актуальна задача нахождения приближенного решения и получения оценок погрешности. При этом как для теории, так и для практики наиболее интересны равномерные оценки. Следует отметить, что если в качестве пространств искомых элементов X и правых частей Y взять пространства непрерывных на $[-1,1]$ функций, то задача решения с. и. у. (1) будет некорректно поставленной ввиду неограниченности обратного оператора $K^{-1} : Y \to X$ [3], [4].

На основе подхода [1], [5], основанного на возможности корректной постановки задачи решения с. и. у. (1)–(2), в работе вводится пара весовых функциональных пространств (X_ρ, Y_q), $q = \rho^{-1}$, являющихся некоторыми сужениями пространств непрерывных на $[-1,1]$ функций и доказывается корректность рассматриваемой задачи.

Для пространства Y_q разрабатываются элементы теории приближения функций интерполяционными алгебраическими полиномами и отрезками рядов Фурье по ортогональным полиномам Чебышева. В дальнейшем эти результаты позволяют получить равномерные оценки погрешности приближенных решений с. и. у. (1).

1. Корректность задачи

Пусть X_ρ — пространство непрерывных на $[-1,1]$ функций $x(t)$, удовлетворяющих условию

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}x(t)dt = 0, \tag{3}$$

для которых сингулярный интеграл $\frac{1}{\rho}I(\rho x)$ является также непрерывной функцией.

В качестве Y_q возьмем пространство непрерывных функций $f(t)$ таких, что $I(qf;t)$ является функцией непрерывной.

Нормы в этих пространствах определим соответственно следующим образом:

$$\|x\|_{X_\rho} = \|x\|_C + \|\tfrac{1}{\rho} I(\rho x)\|_C, \quad x \in X_\rho; \tag{4}$$

$$\|f\|_{Y_q} = \|qf\|_C + \|I(qf)\|_C, \quad y \in Y_q. \tag{5}$$

Тогда с. и. у. (1) эквивалентно операторному уравнению

$$Kx \equiv Sx + Vx = f \quad (x \in X_\rho, \quad y \in Y_q), \tag{6}$$

где

$$Sx = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{x(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}(\tau - t)} d\tau, \quad Vx = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \rho(\tau) x(\tau) h(t,\tau) d\tau.$$

Лемма 1. *Сингулярный оператор $S : X_\rho \to Y_q$ непрерывно обратим, справедливы равенства*

$$\|S\|_{X_\rho \to Y_q} = 1, \quad \|S^{-1}\|_{Y_q \to X_\rho} = 1.$$

Доказательство. Рассмотрим характеристическое уравнение $Sx = f$. Известно [6], [7], что оператор S обратим, причем

$$S^{-1}(f;t) = -I(q\varphi; t) + a_0 \rho(t),$$

где a_0 — произвольная константа. Из условия (3) получаем $a_0 = 0$. Покажем, что операторы $S : X_\rho \to Y_q$, $S^{-1} : Y_q \to X_\rho$ непрерывны. Для этого достаточно показать, что они ограничены. Используя определения норм (4), (5), имеем

$$\|Sx\|_{Y_q} = \|I(\rho x)\|_{Y_q} = \|qI(\rho x)\|_C + \|I(qI(\rho x))\|_C = \|x\|_{X_\rho}, \tag{7}$$

$$\|S^{-1}f\|_{X_\rho} = \|x\|_C + \|\tfrac{1}{\rho} I(\rho x)\|_C = \|I(qf)\|_C + \|qf\|_C = \|f\|_{Y_q}. \tag{8}$$

Из соотношений (7) и (8) следует утверждение леммы.

Из леммы 1 и теории Рисса–Шаудера для уравнений, приводящихся к уравнениям второго рода, следует

Теорема 1. *Пусть ядро $h(t,\tau)$ таково, что оператор $V : X_\rho \to Y_q$ вполне непрерывен. Если однородное уравнение, соответствующее уравнению (1), имеет только нулевое решение, то оператор $K : X_\rho \to Y_q$ непрерывно обратим.*

2. О приближениях в пространстве Y_q

Пусть Φ_n — оператор Фурье, ставящий в соответствие любой функции $\varphi \in L[-1,1]$ ее отрезок ряда Фурье по полиномам Чебышева второго рода

$$\Phi_n \varphi = \Phi_n(\varphi; t) = \sum_{k=0}^{n} c_k(\varphi) U_k(t),$$

$$U_n(t) = \frac{\sin(n+1)\arccos t}{\sqrt{1-t^2}}, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

где $c_k(\varphi) = \frac{2}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-\tau^2}\varphi(\tau) U_k(\tau) d\tau$ — коэффициенты Фурье–Чебышева.

Лемма 2. *Для любой функции $\varphi \in C[-1,1]$ справедлива оценка*

$$\|\Phi_n \varphi\|_{Y_q} \le [5 + 3\ln(n+1)]\|\varphi\|_C, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{9}$$

Если $\varphi \in Y_q$, то

$$\|\varphi - \Phi_n\varphi\|_{Y_q} = O\Big\{E_n(\varphi)\ln(n+1) + \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\omega(\varphi;t)}{t} dt\Big\}, \tag{10}$$

где $E_n(\varphi)$ — наилучшее равномерное приближение функции $\varphi(t)$ алгебраическим полиномами порядка не выше n, $\omega(\varphi;\delta)$ — модуль непрерывности функции $\varphi(t)$ с шагом $\delta \in (0,2]$.

Доказательство. Известно (напр., [5]), что

$$\|q\Phi_n(\varphi;t)\|_C \le (3+\ln(n+1))\|\varphi\|_C,$$
$$\|I(q\Phi_n\varphi;t)\|_C \le 2(1+\ln(n+1))\|\varphi\|_C \quad \forall\varphi \in C[-1,1], \tag{11}$$

откуда и из определения нормы (5) следует

$$\|\Phi_n\varphi\|_{Y_q} \le (5+3\ln(n+1))\|\varphi\|_C.$$

Обозначим через φ_n полином наилучшего равномерного приближения функции $\varphi(t)$ алгебраическими полиномами порядка не выше n. Тогда с учетом проекционности оператора Φ_n имеем

$$\|\varphi-\Phi_n\varphi\|_{Y_q} \le \|\varphi-\varphi_n\|_{Y_q} + \|\varphi_n-\Phi_n\varphi\|_{Y_q} \le$$
$$\le \|\varphi-\varphi_n\|_C + \|Iq(\varphi-\varphi_n)\|_C + \|\Phi_n(\varphi_n-\varphi)\|_{Y_q} \le (1+\|\Phi_n\|_{C\to Y_q})E_n(\varphi) + \|Iq(\varphi-\varphi_n)\|_C.$$

Для второго слагаемого (см., напр., [5]) известна оценка

$$\|Iq(\varphi-\varphi_n)\|_C \le a_1\left(E_n(\varphi)\ln(n+1) + \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\omega(\varphi;t)}{t}dt\right),$$

где a_1 — константа. Из последних неравенств с учетом оценки (9) получается соотношение (10).

Через $W^rH_\alpha = W^rH_\alpha[-1,1]$ будем обозначать множество функций, имеющих непрерывные производные до r-го порядка, удовлетворяющие условию Гёльдера с показателем α.

Лемма 3. *Если $\varphi(t) \in W^rH_\alpha[-1,1]$, то справедливо соотношение*

$$\|\varphi-\Phi_n\varphi\|_{Y_q} = O\left(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha}}\right).$$

Доказательство. По определению нормы (5)

$$\|\varphi-\Phi_n\varphi\|_{Y_q} = \|q(\varphi-\Phi_n\varphi)\|_C + \|Iq(\varphi-\Phi_n\varphi)\|_C. \tag{12}$$

Для первого слагаемого (12) с учетом оценки (9) и теоремы Джексона [8] имеем

$$\|q(\varphi-\Phi_n\varphi)\|_C \le \|q(\varphi-\varphi_n)\|_C + \|q\Phi_n(\varphi-\varphi_n)\|_C \le$$
$$\le E_n(\varphi) + \|q\Phi_n\|_{C\to C}E_n(\varphi) = (1+\|q\Phi_n\|_{C\to C})E_n(\varphi) = O\left(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha}}\right).$$

Для второго слагаемого в (12) с учетом оценки (11) и теоремы Джексона получаем

$$\|Iq(\varphi-\Phi_n\varphi)\|_C = \left\|\sum_{k=1}^{\infty} Iq\{(\Phi_{2^kn}-\Phi_{2^{k-1}n})(\varphi-\varphi_{2^{k-1}n})\}\right\|_C \le$$
$$\le \sum_{k=1}^{\infty} \|Iq(\Phi_{2^kn}-\Phi_{2^{k-1}n})\|_{C\to C}E_{2^{k-1}n}(\varphi) \le$$
$$\le \sum_{k=1}^{\infty}\left((4+(2k-1)\ln 2+2\ln(n+1))\frac{1}{(2^{k-1}n)^{r+\alpha}}\right) = O\left(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha}}\right).$$

Из (12) и полученных оценок следует утверждение леммы.

Пусть $L_n\varphi = L_n(\varphi;t)$ — интерполяционный полином Лагранжа функции $\varphi \in C[-1,1]$ по системе узлов

$$t_k = \cos\frac{2k+1}{2n+2}\pi, \quad k=\overline{0,n}.$$

Лемма 4. *Для любой функции $\varphi \in C[-1,1]$ справедлива оценка*

$$\|L_n\varphi\|_{Y_q} = O\left(\ln n\right)\|\varphi\|_C. \tag{13}$$

Если $\varphi \in Y_q$, то

$$\|\varphi - L_n\varphi\|_{Y_q} = O\Big\{\ln n E_n(\varphi) + \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\omega(\varphi;t)}{t}dt\Big\}.$$

Доказательство. По определению нормы (5) имеем $\|L_n\varphi\|_{Y_q} \le \|L_n\varphi\|_C + \|I(qL_n\varphi)\|_C$. Для первого слагаемого оценка известна (см., напр., [9], [1]): $\|L_n\varphi\|_C \le \frac{4}{\pi} + \frac{2}{\pi}\ln\frac{4n}{\pi}$. Для второго слагаемого, следуя [9], [1], имеем

$$|I(qL_n\varphi;t)| \le \|L_n\varphi\|_C + \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(L_n^T\widetilde{\varphi};\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}d\sigma\right|,$$

где $L_n^T\widetilde{\varphi}$ — тригонометрический полином Лагранжа по узлам $\sigma_j = \frac{(2j+1)\pi}{2j+2}$, $j = \overline{-n,n}$, $\widetilde{\varphi}(\sigma) = \varphi(\cos\sigma)$, откуда с учетом оценки [1], [5]

$$\left\|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}L_n^T(\widetilde{\varphi};\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}d\sigma\right\|_C \le \left(\frac{4}{\pi} + \frac{2}{\pi}\ln\frac{2(2n+1)}{\pi} + \frac{1}{n}\right)\|\varphi\|_C$$

получим доказываемое соотношение (13). А тогда по определению нормы (5) согласно лемме 18 ([9], гл. III) имеем

$$\begin{aligned}
\|\varphi - L_n\varphi\|_{Y_q} &\le \|\varphi-\varphi_n\|_{Y_q} + \|L_n(\varphi_n-\varphi)\|_{Y_q} \le \\
&\le \|\varphi-\varphi_n\|_C + \|Iq(\varphi-\varphi_n)\|_C + \|L_n\|_{C\to Y_q}\|\varphi_n-\varphi\|_C = \\
&= (1+\|L_n\|_{C\to Y_q})E_n(\varphi) + \|Iq(\varphi-\varphi_n)\|_C \le \\
&\le \left(\frac{\pi+4}{\pi} + \frac{2}{\pi}\ln\frac{2(2n+1)}{\pi} + \frac{1}{n}\right)E_n(\varphi) + 2\|q(\varphi-\varphi_n)\|_C\ln 2n^2 + \\
&\quad + 2\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\omega(q(\varphi-\varphi_n);t)dt}{t} + \left|q(t)(\varphi(t)-\varphi_n(t))\ln\frac{1-t}{1+t}\right|.
\end{aligned}$$

Учитывая, что $q(t) = \sqrt{1-t^2} \in H_{\frac{1}{2}}$ и $\sqrt{1-t^2}\ln\frac{1-t}{1+t}$ есть функция, ограниченная на $[-1,1]$, после несложных, но громоздких вычислений находим

$$2\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\omega(q(\varphi-\varphi_n);t)dt}{t} + \left|q(t)(\varphi(t)-\varphi_n(t))\ln\frac{1-t}{1+t}\right| \le a_1\left(E_n(\varphi)\ln n + \int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\omega(\varphi;t)}{t}dt\right),$$

где a_1 — константа.

Следовательно,

$$\|\varphi - L_n\varphi\|_{Y_q} = O\Big\{E_n(\varphi)\ln n + \int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\omega(\varphi;t)}{t}dt\Big\}.$$

По аналогии с доказательством леммы 3 устанавливается

Лемма 5. *Если $\varphi(t) \in W^rH_\alpha[-1,1]$, то справедливо соотношение*

$$\|\varphi - L_n\varphi\|_{Y_q} = O\left(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha}}\right)$$

— *константа.*

3. Метод ортогональных многочленов

Приведем известную (напр., в [1]) вычислительную схему этого метода.

Приближенное решение с.и.у. (1) ищется в виде алгебраического многочлена

$$x_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k T_k(t), \tag{14}$$

где $T_k(t) = \cos k \arccos t$ — многочлены Чебышева первого рода, а неизвестные коэффициенты α_k, $k = \overline{1, n}$, определяются из системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\alpha_j + \sum_{k=1}^{n} a_{jk}\alpha_k = f_j, \quad j = \overline{1, n}, \tag{15}$$

$$f_j = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2} f(t) U_{j-1}(t) dt, \quad a_{jk} = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2} V(T_k; t) U_{j-1}(t) dt.$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия*

а) *с. и. у.* (1) *однозначно разрешимо в пространстве* X_ρ *при любой правой части* $f(t)$ *из* Y_q;

б) *функция* $f(t) \in W^r H_\alpha$, *ядро* $h(t, \tau) \in W^r H_\alpha$ *по переменной* t *равномерно относительно* τ.

Тогда, начиная с некоторого $n \in \mathbb{N}$, *СЛАУ* (15) *имеет единственное решение* $\{\alpha_k^*\}$, $k = \overline{1, n}$, *и приближенные решения*

$$x_n^*(t) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^* T_k(t) \tag{16}$$

сходятся к точному $x^*(t)$ *равномерно со скоростью*

$$\|x_n^* - x^*\|_C = O\left(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha}}\right), \quad 0 < \alpha \le 1, \quad r \ge 0.$$

Доказательство. Обозначим через $\mathbb{H}_n$ множество всех алгебраических многочленов степени не выше n. Пусть $X_n = \mathbb{H}_n \cap X_\rho$, $Y_n = \mathbb{H}_{n-1} \cap Y_q$. Тогда СЛАУ (15) может быть представлена в виде операторного уравнения

$$K_n x_n \equiv S x_n + \Phi_{n-1} V x_n = \Phi_{n-1} f \quad (x_n \in X_n, \quad \Phi_{n-1} f \in Y_n). \tag{17}$$

Оценим близость точного оператора K и аппроксимирующих его операторов K_n. С этой целью для любого $x_n \in X_n$ из (6) и (17) находим

$$\|K x_n - K_n x_n\|_{Y_q} = \|V x_n - \Phi_{n-1} V x_n\|_{Y_q} =$$
$$= \left\| \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \rho(\tau) h(t, \tau) x_n(\tau) d\tau - \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \rho(\tau) \Phi_{n-1}(h(t, \tau)) x_n(\tau) d\tau \right\|_{Y_q} \le$$
$$\le \|h - \Phi_{n-1} h\|_{Y_q, C} \|x_n\|_C \le \|h - \Phi_{n-1} h\|_{Y_q, C} \|x_n\|_{X_\rho}.$$

Здесь оператор Φ_{n-1} применен к функции $h(t, \tau)$ по переменной t, а через $\|h\|_{Y_q, C}$ обозначена норма функции $h(t, \tau)$ по первой переменной в пространстве Y_q и по второй переменной в пространстве C. В силу леммы 3 и условий теоремы имеем

$$\|K - K_n\|_{X_n \to Y_q} = O\left(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha}}\right) \to 0, \quad n \to \infty,$$

следовательно, на основании теоремы 7 ([9], гл. I) для всех $n \in \mathbb{N}$, для которых выполнено неравенство $\|K^{-1}\| \, \|K - K_n\| < 1$, СЛАУ (15) однозначно разрешима. Кроме того,

$$\|f - \Phi_{n-1} f\|_{Y_q} = O\left(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha}}\right) \to 0, \quad n \to \infty,$$

поэтому приближенные решения $x_n^*(t)$ сходятся к точному $x^*(t)$ по норме пространства X_ρ, и тем более в равномерной метрике со скоростью

$$\|x_n^* - x^*\|_C \le \|x_n^* - x^*\|_{X_\rho} = O\left(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha}}\right).$$

4. Метод коллокации

Приближенное решение с. и. у. (1) ищем в виде многочлена (14), коэффициенты которого определим из СЛАУ (напр., [1])

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \left[-U_{k-1}(t_j) + V(T_k; t_j)\right] = f(t_j), \quad j = \overline{1,n}, \tag{18}$$

$$t_j = \cos\frac{(2j-1)\pi}{2n}.$$

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 2*. Тогда, начиная с некоторого* $n \in \mathbb{N}$, *СЛАУ* (18) *имеет единственное решение* $\{\alpha_k^*\}$, $k = \overline{1,n}$, *и приближенные решения, определяемые по формуле* (16)*, сходятся к точному решению* $x^*(t)$ *равномерно со скоростью*

$$\|x_n^* - x^*\|_C \le \|x_n^* - x^*\|_{X_\rho} = O\left(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha}}\right), \quad 0 < \alpha \le 1, \quad r \ge 0.$$

Доказательство этой теоремы проводится тем же методом, что и доказательство теоремы 2, но с учетом леммы 5 и того, что СЛАУ (18) в операторном виде записывается как

$$K_n x_n \equiv S x_n + L_{n-1} V x_n = L_{n-1} f, \quad x \in X_n, \quad L_{n-1} f \in Y_n,$$

где X_n и Y_n определены выше, L_{n-1} — оператор Лагранжа, который ставит в соответствие любой функции $\varphi \in C[-1,1]$ ее интерполяционный полином Лагранжа степени не выше $n-1$ по узлам, совпадающим с корнями многочлена Чебышева первого рода.

Литература

1. Габдулхаев Б.Г. *Прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений первого рода.* – Казань: Изд-во КГУ, 1994. – 288 с.
2. Лифанов И.К. *Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент.* – М.: ТОО “Янус”, 1995. – 520 с.
3. Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П. *Теория линейных некорректных задач и ее приложения.* – М.: Наука, 1978. – 206 с.
4. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. *Методы решения некорректных задач.* – М: Наука, 1979. – 286 с.
5. Ожегова А.В. *Равномерные приближения решений слабо сингулярных интегральных уравнений первого рода*: Дис. … канд. физ.-матем. наук. – Казань, 1996. – 96 с.
6. Гахов Ф.Д. *Краевые задачи.* – М.: Наука, 1977. – 638 с.
7. Мусхелишвили Н.И. *Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике.* – М.: Наука, 1968. – 512 с.
8. Натансон И.П. *Конструктивная теория функций.* –М.–Л.: Гостехиздат, 1949. – 688 с.
9. Габдулхаев Б.Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1980. – 232 с.

Казанский государственный университет

Поступила
24.10.2004