ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1997 МАТЕМАТИКА № 5 (420)

УДК 517.95

В.А. СЕВАСТЬЯНОВ

МЕТОД РИМАНА ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

1. Хорошо известен ([1], гл. 5, § 3, с. 68; [2], гл. 3, § 3.4, с. 195; [3], гл. 1, § 4, с. 67 и др.) классический метод Римана получения формулы явного решения задачи Коши для уравнения

$$u_{xy} + au_x + bu_y + cu = f,$$

устанавливающий одновременно существование, единственность и непрерывную зависимость этого решения от граничных условий. Здесь предлагается аналогичный метод для уравнения

$$L(u) \equiv u_{xyz} + au_{xy} + bu_{yz} + cu_{xz} + du_x + eu_y + fu_z + gu = F. \tag{1}$$

2. В ориентированном системой координат (x, y, z) пространстве $\mathbb{R}^3$ рассмотрим поверхность S класса C^3, заданную уравнениями

$$\begin{cases} x = x(p,q), \\ y = y(p,q), \\ z = z(p,q), \quad (p,q) \in G^2 \subset R^2, \end{cases} \qquad \operatorname{rang} \begin{pmatrix} x_p & y_p & z_p \\ x_q & y_q & z_q \end{pmatrix} = 2.$$

Предполагаем, что S в каждой своей точке имеет касательную плоскость, не параллельную ни одной из координатных осей, например, $z_x > 0$, $z_y > 0$ в G. Проведем через точку $M(x_0, y_0, z_0)$ плоскости $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, пересекающие S по кривым QC, CP и PQ соответственно. Обозначим Ω конечную область, ограниченную этими плоскостями и участком QCP поверхности S. Считаем ориентацию Ω положительной.

Постановка задачи: *найти решение уравнения* (1) *класса* $C^3(\overline{\Omega})$, *удовлетворяющее граничным условиям*

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial l^k}\right|_S = \psi_k, \qquad k = 0, 1, 2, \tag{2}$$

где l — заданное на S некасательное к этой поверхности поле направлений.

Тем самым будет получено регулярное решение задачи (1)–(2) во всей области Ω.

3. Зададим поле направлений l вектором $\vec{a}(l_1(p,q), l_2(p,q), l_3(p,q))$, $\vec{a} \in C^3(G^2)$, причем $|\vec{a}| \equiv 1$. Введем систему координат, связанную с поверхностью S

$$\begin{cases} x = x(p,q) + l_1(p,q)l, \\ y = y(p,q) + l_2(p,q)l, \\ z = z(p,q) + l_3(p,q)l, \quad l \in R. \end{cases} \tag{3}$$

В некоторой окрестности поверхности S (3) определяет допустимое преобразование координат, т. к. поле направлений l по условию не касательно к S ([4], с.65). Следовательно, существует обратное преобразование

$$\begin{cases} p = p(x, y, z), \\ q = q(x, y, z), \\ l = l(x, y, z) \end{cases}$$

класса C^3 в окрестности поверхности S ([5], с.488).

Определим функцию Римана $R(x, y, z, x_0, y_0, z_0)$ уравнения (1) как решение класса $C^3(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega})$ интегрального уравнения

$$v(x,y,z) - \int_{z_0}^{z} a(x,y,\zeta)v(x,y,\zeta)\,d\zeta - \int_{x_0}^{x} b(\xi,y,z)v(\xi,y,z)\,d\xi -$$
$$- \int_{y_0}^{y} c(x,\eta,z)v(x,\eta,z)\,d\eta + + \int_{y_0}^{y}\int_{z_0}^{z} d(x,\eta,\zeta)v(x,\eta,\zeta)\,d\zeta\,d\eta +$$
$$+ \int_{x_0}^{x}\int_{z_0}^{z} e(\xi,y,\zeta)v(\xi,y,\zeta)\,d\zeta\,d\xi + + \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(\xi,\eta,z)v(\xi,\eta,z)\,d\eta\,d\xi -$$
$$- \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\int_{z_0}^{z} g(\xi,\eta,\zeta)v(\xi,\eta,\zeta)\,d\zeta\,d\eta\,d\xi = 1, \tag{4}$$

которое существует ([6], с.180).

Теорема 1. *Пусть* $\psi_k \in C^{3-k}(\overline{S})$; $a, b, c \in C^2(\overline{\Omega})$; $d, e, f \in C^1(\overline{\Omega})$; $g, F \in C(\overline{\Omega})$. *Тогда задача* (1)–(2) *в* $C^3(\overline{\Omega})$ *поставлена корректно, а ее решение имеет вид*

$$u(x_0,y_0,z_0) = \frac{(uR)_C + (uR)_Q + (uR)_P}{3} - \frac{1}{6}\Bigg(\int_{QC}\Big\{u_zR + u(3aR - 2R_z)\Big\}\,dz -$$
$$\{u_yR + u(3cR - 2R_y)\}dy + \int_{CP}\Big\{u_xR + u(3bR - 2R_x)\Big\}\,dx -$$
$$-\{u_zR + u(3aR - 2R_z)\}dz + \int_{PQ}\Big\{u_yR + u(3cR - 2R_y)\Big\}\,dy - \{u_xR + u(3bR - 2R_x)\}\,dx +$$
$$+ \iint_{PQC}\Big\{2u_{yz}R + u_y(3aR - R_z) + u_z(3cR - R_y) + u(2R_{yz} - 3(aR)_y - 3(cR)_z + 6dR)\Big\}\,dy\,dz +$$
$$+\Big\{2u_{xz}R + +u_x(3aR - R_z) + u_z(3bR - R_x) + u(2R_{xz} - 3(aR)_x - 3(bR)_z + 6eR)\Big\}\,dx\,dz +$$
$$\Big\{2u_{xy}R + u_x(3cR - R_y) + u_y(3bR - R_x) + u(2R_{xy} - 3(bR)_y - 3(cR)_x + 6fR)\Big\}\,dx\,dy\Bigg) -$$
$$- \int_{x_0}^{x_P} dx \int_{y_0}^{y_{PQ}(x)} dy \int_{z_0}^{z(x,y)} RF\,dz, \tag{5}$$

где

$$u = \psi_0, \quad u_x = p_x\psi_{0p} + q_x\psi_{0q} + l_x\psi_1,$$
$$u_y = p_y\psi_{0p} + q_y\psi_{0q} + l_y\psi_1, \quad u_z = p_z\psi_{0p} + q_z\psi_{0q} + l_z\psi_1,$$
$$u_{xy} = p_xp_y\psi_{0pp} + q_xq_y\psi_{0qq} + l_xl_y\psi_2 + (p_xq_y + q_xp_y)\psi_{0pq} +$$
$$+(p_xl_y + l_xp_y)\psi_{1p} + (q_xl_y + l_xq_y)\psi_{1q} + p_{xy}\psi_{0p} + q_{xy}\psi_{0q} + l_{xy}\psi_1,$$
$$u_{xz} = p_xp_z\psi_{0pp} + q_xq_z\psi_{0qq} + l_xl_z\psi_2 + (p_xq_z + q_xp_z)\psi_{0pq} +$$
$$+(p_xl_z + l_xp_z)\psi_{1p} + (q_xl_z + l_xq_z)\psi_{1q} + p_{xz}\psi_{0p} + q_{xz}\psi_{0q} + l_{xz}\psi_1,$$
$$u_{yz} = p_yp_z\psi_{0pp} + q_yq_z\psi_{0qq} + l_yl_z\psi_2 + (p_yq_z + q_yp_z)\psi_{0pq} +$$
$$+(p_yl_z + l_yp_z)\psi_{1p} + (q_yl_z + l_yq_z)\psi_{1q} + p_{yz}\psi_{0p} + q_{yz}\psi_{0q} + l_{yz}\psi_1. \tag{6}$$

Доказательство. Для начала отметим существование верхних пределов интегрирования последнего интеграла в (5), т. к. все определители

$$\begin{vmatrix} x_p & y_p \\ x_q & y_q \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} x_p & z_p \\ x_q & z_q \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} y_p & z_p \\ y_q & z_q \end{vmatrix}$$

отличны от нуля в силу свойств поверхности S.

Для любой функции u класса C^3 рассмотрим тождество

$$RL(u) = \frac{\partial}{\partial x}\bigg(\frac{1}{3}(uR)_{yz} - \frac{1}{2}\left[u(R_z - aR)\right]_y - \frac{1}{2}\left[u(R_y - cR)\right]_z +$$

$$+u\left[R_{yz} - (aR)_y - (cR)_z + dR\right]\bigg) + \frac{\partial}{\partial y}\bigg(\frac{1}{3}(uR)_{xz} - \frac{1}{2}\left[u(R_z - aR)\right]_x -$$

$$-\frac{1}{2}\left[u(R_x - bR)\right]_z + u\left[R_{xz} - (aR)_x - (bR)_z + eR\right]\bigg) + \frac{\partial}{\partial z}\bigg(\frac{1}{3}(uR)_{xy} -$$

$$-\frac{1}{2}\left[u(R_x - bR)\right]_y - \frac{1}{2}\left[u(R_y - cR)\right]_x + u\left[R_{xy} - (bR)_y - (cR)_x + fR\right]\bigg),$$

представляющее лишь иную запись тождества (3) из статьи [7]. Интегрируя это тождество по области Ω, считая в нем u решением уравнения (1), и используя формулу Гаусса-Остроградского ([8], гл. 13, § 3, с.241), получим

$$\iiint_\Omega RF\,dx\,dy\,dz = \iint_{\partial\Omega}\bigg(\frac{1}{3}(uR)_{yz} - \frac{1}{2}\left[u(R_z - aR)\right]_y - \frac{1}{2}\left[u(R_y - cR)\right]_z +$$

$$+u\left[R_{yz} - (aR)_y - (cR)_z + dR\right]\bigg)\,dy\wedge dz + \bigg(\frac{1}{3}(uR)_{xz} - \frac{1}{2}\left[u(R_z - aR)\right]_x -$$

$$-\frac{1}{2}\left[u(R_x - bR)\right]_z + u\left[R_{xz} - (aR)_x - (bR)_z + eR\right]\bigg)\,dz\wedge dx +$$

$$\bigg(\frac{1}{3}(uR)_{xy} - \frac{1}{2}\left[u(R_x - bR)\right]_y - \frac{1}{2}\left[u(R_y - cR)\right]_x +$$

$$u\left[R_{xy} - (bR)_y - (cR)_x + fR\right]\bigg)\,dx\wedge dy. \tag{7}$$

Здесь знак “$\wedge$” — внешнее умножение дифференциальных форм. Заменяя в правой части, которую обозначим через I, интеграл по границе $\partial\Omega$ суммой интегралов по ее составляющим CQM, PCM, PQM и PQC и учитывая тождества

$$R_{yz}(x_0,y,z,x_0,y_0,z_0) - \big(a(x_0,y,z)R(x_0,y,z,x_0,y_0,z_0)\big)_y -$$
$$- \big(c(x_0,y,z)R(x_0,y,z,x_0,y_0,z_0)\big)_z + d(x_0,y,z)R(x_0,y,z,x_0,y_0,z_0) \equiv 0,$$

$$R_{xz}(x,y_0,z,x_0,y_0,z_0) - \big(a(x,y_0,z)R(x,y_0,z,x_0,y_0,z_0)\big)_x -$$
$$- \big(b(x,y_0,z)R(x,y_0,z,x_0,y_0,z_0)\big)_z + e(x,y_0,z)R(x,y_0,z,x_0,y_0,z_0) \equiv 0,$$

$$R_{xy}(x,y,z_0,x_0,y_0,z_0) - \big(b(x,y,z_0)R(x,y,z_0,x_0,y_0,z_0)\big)_y -$$
$$- \big(c(x,y,z_0)R(x,y,z_0,x_0,y_0,z_0)\big)_x + f(x,y,z_0)R(x,y,z_0,x_0,y_0,z_0) \equiv 0,$$

получаемые подстановкой в уравнение (4) по очереди $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ и дифференцированием его по yz, xz и xy соответственно, имеем

$$I = \iint_{CQM}\left\{\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{6}(uR)_y - \frac{1}{2}u(R_y - cR)\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{6}(uR)_z - \frac{1}{2}u(R_z - aR)\right)\right\}dy\wedge dz +$$

$$+\iint_{PCM}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{6}(uR)_z-\frac{1}{2}u(R_z-aR)\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{6}(uR)_x-\frac{1}{2}u(R_x-bR)\right)\right\}dz\wedge dx+$$
$$+\iint_{PQM}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{6}(uR)_x-\frac{1}{2}u(R_x-bR)\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{6}(uR)_y-\frac{1}{2}u(R_y-cR)\right)\right\}dx\wedge dy+$$
$$+\iint_{PQC}\left(\frac{1}{3}u_{yz}R-\frac{1}{6}u_yR_z-\frac{1}{6}u_zR_y+\frac{1}{3}uR_{yz}+\frac{1}{2}u_yaR-\frac{1}{2}u(aR)_y+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}u_zcR-\frac{1}{2}u(cR)_z+u\,dR\right)dy\wedge dz+\left(\frac{1}{3}u_{xz}R-\frac{1}{6}u_xR_z-\frac{1}{6}u_zR_x+\frac{1}{3}uR_{xz}+\right.$$
$$\left.++\frac{1}{2}u_xaR-\frac{1}{2}u(aR)_x+\frac{1}{2}u_zbR-\frac{1}{2}u(bR)_z+ueR\right)dz\wedge dx+$$
$$\left(\frac{1}{3}u_{xy}R-\frac{1}{6}u_xR_y-\frac{1}{6}u_yR_x+\frac{1}{3}uR_{xy}+\frac{1}{2}u_ybR-\frac{1}{2}u(bR)_y+\frac{1}{2}u_xcR-\frac{1}{2}u(cR)_x+ufR\right)dx\wedge dy.$$

По формуле Грина ([8], гл. 13, § 3, с.236) все интегралы по плоским областям сводятся к однократным интегралам по замкнутым контурам, причем любой участок каждого контура обходится дважды — в противоположных направлениях, как это и должно быть у ориентированной поверхности:

$$I=\int_{CQM}\left(\frac{1}{6}(uR)_z-\frac{1}{2}u(R_z-aR)\right)dz-\left(\frac{1}{6}(uR)_y-\frac{1}{2}u(R_y-cR)\right)dy+$$
$$+\int_{PCM}\left(\frac{1}{6}(uR)_x-\frac{1}{2}u(R_x-bR)\right)dx-\left(\frac{1}{6}(uR)_z-\frac{1}{2}u(R_z-aR)\right)dz+$$
$$+\int_{PQM}\left(\frac{1}{6}(uR)_y-\frac{1}{2}u(R_y-cR)\right)dy-\left(\frac{1}{6}(uR)_x-\frac{1}{2}u(R_x-bR)\right)dx+$$
$$+\frac{1}{6}\iint_{PQC}\left\{2u_{yz}R+u_y(3aR-R_z)+u_z(3cR-R_y)+u(2R_{yz}-3(aR)_y-3(cR)_z+6dR)\right\}dy\wedge dz+$$
$$+\left\{2u_{xz}R+u_x(3aR-R_z)+u_z(3bR-R_x)+u(2R_{xz}-3(aR)_x-3(bR)_z+6eR)\right\}dz\wedge dx+$$
$$+\left\{2u_{xy}R+u_x(3cR-R_y)+u_y(3bR-R_x)+u(2R_{xy}-3(bR)_y-3(cR)_x+6fR)\right\}dx\wedge dy.$$

Аналогично случаю с 2-кратными интегралами, заменяя каждый криволинейный интеграл суммой интегралов по составляющим его контура и используя тождества

$$R_z(x_0,y_0,z,x_0,y_0,z_0)-a(x_0,y_0,z)R(x_0,y_0,z,x_0,y_0,z_0)\equiv 0,$$
$$R_y(x_0,y,z_0,x_0,y_0,z_0)-c(x_0,y,z_0)R(x_0,y,z_0,x_0,y_0,z_0)\equiv 0,$$
$$R_x(x,y_0,z_0,x_0,y_0,z_0)-b(x,y_0,z_0)R(x,y_0,z_0,x_0,y_0,z_0)\equiv 0,$$

непосредственно вытекающие из определения функции Римана, получим, что сумма этих однократных интегралов перепишется:

$$K=\frac{1}{6}\int_{CM}(uR)_z\,dz-\frac{1}{6}\int_{MQ}(uR)_y\,dy+\frac{1}{6}\int_{QC}(u_zR+uR_z-3uR_z+3uaR)\,dz-$$
$$-(u_yR+uR_y-3uR_y+3ucR)\,dy+\frac{1}{6}\int_{PM}(uR)_x\,dx-\frac{1}{6}\int_{MC}(uR)_z\,dz+$$
$$+\frac{1}{6}\int_{CP}(u_xR+uR_x-3uR_x+3ubR)\,dx-(u_zR+uR_z-3uR_z+3uaR)\,dz+$$
$$+\frac{1}{6}\int_{QM}(uR)_y\,dy-\frac{1}{6}\int_{MP}(uR)_x\,dx+\frac{1}{6}\int_{PQ}(u_yR+uR_y-3uR_y+3ucR)\,dy-$$
$$-(u_xR+uR_x-3uR_x+3ubR)\,dx.$$

Вычисляя здесь интегралы по отрезкам прямых и используя представления K и I, из (7) окончательно получаем формулу (5). Представления производных решения u на S (6) получаются дифференцированием $u(p(x,y,z),\ q(x,y,z),\ l(x,y,z))$ как сложной функции.

Формула (5) получена в предположении существования решения исходной задачи, т. е. если решение существует, то оно единственно. Непосредственной подстановкой выражения (5) в уравнение (1) можно убедиться, что оно является решением этого уравнения. При этом используются формулы дифференцирования интегралов, зависящих от параметра, свойство функции Римана R и ее производных $R_x, R_{xy}, \ldots$ быть решением уравнения $L(u) = 0$ по второй тройке аргументов. Доказательство этого свойства аналогично 2-мерному случаю ([9], с.25) на основе представления решения 3-х мерной задачи Гурса [7]. Тем самым обеспечено существование решения поставленной задачи.

Непрерывная зависимость решения u от ψ_k в $C^3(\overline{\Omega})$, $k = 0, 1, 2$, следует непосредственно из (5) в результате элементарных оценок в терминах ε, δ. $\square$

4. В случаях, когда гладкость начальных данных нарушается, трижды непрерывно дифференцируемых решений задачи, вообще говоря, не существует, и решение уравнения (1) следует понимать в обобщенном смысле.

Если начальные данные задачи Коши (1)–(2) имеют, например, в точке P особенность, то решение задачи Коши будет иметь особенности вдоль прямых, проходящих через точку P и параллельных координатным осям. То же справедливо для точек Q и C.

Уравнение (1) является обобщением 2-мерного уравнения Лапласа, имеющего приложения в теории поверхностей ([6], с.158).

Литература

1. Соболев С.Л. *Уравнения математической физики.* – 5-е изд. – М.: Наука, 1992. – 432 с.
2. Трикоми Ф. *Лекции по уравнениям в частных производных.* – М.: Ин. лит., 1957. – 443 с.
3. Бицадзе А.В. *Некоторые классы уравнений в частных производных.* – М.: Наука, 1981. – 448 с.
4. Сокольников И.С. *Тензорный анализ. Теория и применения в геометрии и в механике сплошных сред.* – М.: Наука, 1971. – 376 с.
5. Зорич В.А. *Математический анализ.* Ч. 1. – М.: Наука, 1981. – 543 с.
6. Мюнтц Г.М. *Интегральные уравнения.* Ч.1. – Л.–М.: Гостехиздат, 1934. – 320 с.
7. Жегалов В.И. *Трехмерный аналог задачи Гурса* // Неклассич. уравнения и уравнения смеш. типа. – Новосибирск, 1990. – С. 94–98.
8. Зорич В.А. *Математический анализ.* Ч.2. – М.: Наука, 1984. – 640 с.
9. Векуа И.Н. *Новые методы решения эллиптических уравнений.* – М.–Л.: Гостехиздат, 1948. – 296 с.

Казанский государственный университет

Поступили
первый вариант 17.07.1995
окончательный вариант 01.04.1996