ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1997 МАТЕМАТИКА № 4 (419)

УДК 519.633

С.Б. ЗАЙЦЕВА, А.А. ЗЛОТНИК

ТОЧНЫЕ ОЦЕНКИ ГРАДИЕНТА ПОГРЕШНОСТИ ЛОКАЛЬНО-ОДНОМЕРНЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Локально-одномерные разностные методы составляют важное семейство методов решения эволюционных задач. Их построению и исследованию посвящена обширная литература [1]–[4]. Однако вопрос вывода точных оценок погрешности и тесно связанный с ним вопрос оптимальности этих методов оказались плохо изученными даже для параболических задач. В то же время для чисто неявных методов и методов с расщепляющимся оператором эти вопросы уже хорошо разработаны [5]–[13].

В данной статье изучаются два локально-одномерных разностных метода — ставший уже классическим "последовательный" метод и метод с распараллеливанием вспомогательных шагов. Оптимальные оценки погрешности в $L_2(Q)$ для первого метода получены еще в [7], а для второго — совсем недавно в [14]. Здесь мы выводим оценки сверху и снизу погрешности в энергетической норме и градиента погрешности в $L_2(Q)$ на классе правых частей из $L_2(Q)$ (и начальных функций из $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$). Полученные оценки только при жестком условии $\tau = O(h^2)$ совпадают с известными для других методов [9]. Вообще же говоря, они существенно проигрывают известным; в частности, если $\tau \geq \varepsilon h$, то просто *отсутствует сходимость* к нулю градиента погрешности в $L_2(Q)$ на указанном классе данных. Кроме того, выведены оценки порядка $O(\sqrt{\tau} + h)$ при нестандартных условиях на f. Результаты статьи доказаны при помощи оригинальной техники, развивающей предложенную в [7], [12], [14].

Основные результаты сформулированы в §1. В § 2 содержатся вспомогательные утверждения. Доказательство оценок погрешности сверху дано в § 3, а снизу — в § 4.

1. Формулировка основных результатов

Рассмотрим первую начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \triangle u = f(x,t) \quad \text{в } Q = \Omega \times (0,T), \tag{1.1}$$

$$u|_{\partial\Omega\times(0,T)} = 0, \quad u|_{t=0} = u_0(x) \quad \text{на } \Omega = (0,X_1) \times \cdots \times (0,X_n), \tag{1.2}$$

где $x = (x_1,\dots,x_n)$, $n \geq 2$, $\triangle = \sum_{i=1}^n \partial^2/\partial x_i^2$ — оператор Лапласа, $\partial\Omega$ — граница Ω. Пусть ниже $f = \sum_{i=1}^n f_{(i)}$, а $a = 1$ (что не ограничивает общности). Пусть $f \in L_2(Q)$ и $u_0 \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$.

Введем шаги $h_1 = X_1/N_1, \dots, h_n = X_n/N_n$ и $\tau = T/M$, где $N_m \geq 2$, $m = \overline{1,n}$, и $M \geq 2$. Пусть $h = (h_1,\dots,h_n)$, $|h| = (h_1^2 + \cdots + h_n^2)^{1/2}$. В $\overline{\Omega}$ введем равномерную сетку $\overline{\omega}^h = \{x_{\mathbf{k}} = (k_1h_1,\dots,k_nh_n),\ k_1 = \overline{0,N_1},\dots,k_n = \overline{0,N_n}\}$, где $\mathbf{k} = (k_1,\dots,k_n)$, а на $[0,T]$ — равномерную сетку $\overline{\omega}^\tau = \{t_m = m\tau,\ m = \overline{0,M}\}$. Обозначим $\omega^h = \overline{\omega}^h \cap \Omega$, $\partial\omega^h = \overline{\omega}^h \cap \partial\Omega$ и $\omega^\tau = \overline{\omega}^\tau \setminus \{0\}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 97–01–00214).

Будем использовать сеточные операторы $\overline{\partial}_t\eta_m = (\eta_m - \eta_{m-1})/\tau$ и $\check{\eta}_m = \eta_{m-1}$ с $\eta_m = \eta(t_m)$, а также операторы $\delta_i^2\varphi_{\mathbf{k}} = (\varphi_{\mathbf{k}+\chi_i} - 2\varphi_{\mathbf{k}} + \varphi_{\mathbf{k}-\chi_i})/h_i^2$, где $\varphi_{\mathbf{k}} = \varphi(x_{\mathbf{k}})$, а $\chi_1, \ldots, \chi_n$ — координатный базис в R^n. Определим усреднения: для $w \in L_1(\Omega)$ положим

$$w_{\mathbf{k}}^h = \int_{-h_n}^{h_n} \int \cdots \int \int_{-h_1}^{h_1} w(x_{\mathbf{k}} + \xi) \prod_{i=1}^n h_i^{-1}(1 - h_i^{-1}|\xi_i|)\, d\xi, \quad \text{где} \quad \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n);$$

для $g \in L_1(0,T)$ положим $g_m^\tau = \tau^{-1} \int\limits_0^\tau g(t_{m-1} + \theta)d\theta$. Ниже считаем, что $f_{(i)}^{h,\tau} = (f_{(i)}^h)^\tau$, $i = \overline{1,n}$.

Изучим два известных локально-одномерных метода различной конструкции для задачи (1.1), (1.2). В стандартном последовательном локально-одномерном методе приближенное решение y (которое определено на сетке $\overline{\omega}^h \times \overline{\omega}^\tau$) и вспомогательные функции $y_{(i)}$, $i = \overline{0,n}$ (которые определены на сетке $\overline{\omega}^h \times \omega^\tau$) удовлетворяют для $m = \overline{1,M}$ уравнениям

$$(y_{(i)m} - y_{(i-1)m})/\tau - \delta_i^2 y_{(i)m} = f_{(i)m}^{h,\tau} \quad \text{на} \quad \omega^h, \tag{1.3}$$

$$y_{(i)m}|_{\partial\omega^h} = 0, \quad i = \overline{1,n}, \tag{1.4}$$

$$y_{(0)m} = y_{m-1}, \quad y_m = y_{(n)m}; \quad y_0 = u_0^h. \tag{1.5}$$

В локально-одномерном методе с распараллеливанием функции y и $y_{(i)}$ ($i = \overline{1,n}$) удовлетворяют для $m = \overline{1,M}$ уравнениям

$$\alpha_i(y_{(i)m} - y_{m-1})/\tau - \delta_i^2 y_{(i)m} = f_{(i)m}^{h,\tau} \quad \text{на} \quad \omega^h, \tag{1.6}$$

$$y_{(i)m}|_{\partial\omega^h} = 0, \qquad i = \overline{1,n}, \tag{1.7}$$

$$y_m = \sum_{i=1}^n \alpha_i y_{(i)m}; \quad y_0 = u_0^h. \tag{1.8}$$

Здесь $\alpha_i > 0$ — постоянные (не зависящие от τ и h), $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$.

Пусть S_h — пространство функций, заданных на сетке ω^h и доопределенных нулем на $\partial\omega^h$, а $S_{h,\tau}$ — пространство функций, заданных на сетке $\omega^h \times \overline{\omega}^\tau$ и доопределенных нулем на $\partial\omega^h \times \overline{\omega}^\tau$. Введем пространство $S^{(1)}$ полилинейных восполнений функций из S_h, т.е. восполнений, линейных по x_i на каждом сегменте $[(l-1)h_i, lh_i]$, $l = \overline{1,N_i}$, при фиксированных значениях остальных переменных (для всех $i = \overline{1,n}$). Введем также пространство S восполнений функций из $S_{h,\tau}$, принадлежащих $S^{(1)}$ при $t = t_m$, $m = \overline{0,M}$, и постоянных по t на каждом полусегменте $(t_{m-1}, t_m]$, $m = \overline{1,M}$. Ниже считаем, что $y \in S$ в методах (1.3)–(1.5) и (1.6)–(1.8).

Сформулируем оценки погрешности. Пусть $\|\cdot\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)} = \|\,|D\cdot|\,\|_{L_2(\Omega)}$, а $\|\cdot\|_{V_2(Q)} = \|\,\|\cdot\|_{L_2(\Omega)}\|_{L_\infty(0,T)} + \|\,|D\cdot|\,\|_{L_2(Q)}$ — энергетическая норма. Здесь $D = (D_1, \ldots, D_n)$ — градиент, $D_i = \partial/\partial x_i$. Введем норму данных $d = \|f\|_{L_2(Q)} + \|u_0\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)}$.

Положим $\beta_k(\tau,h) = \left(\sum_{i=1}^k \prod_{1\le j\le i} \frac{\tau}{h_{l_j,k}^2}\right)^{1/2}$, где $h_{l_1,k} \le \cdots \le h_{l_k,k}$ — упорядоченная по неубыванию перестановка шагов $h_1, \ldots, h_k$, а $k = \overline{1,n-1}$. Пусть $h_{\min}^{(k)} = \min_{1\le j\le k} h_j$, $h_{\min,\langle i\rangle} = \min_{1\le j\le n,\, j\ne i} h_j$.

Теорема 1. *Для последовательного метода* (1.3)–(1.5) *верны оценки погрешности*

$$\|u - y\|_{V_2(Q)} \le c\big[(\sqrt{\tau} + |h|)d + \sqrt{\tau}\sum_{i=2}^n \beta_{i-1}(\tau,h)\|f_{(i)}\|_{L_2(Q)}\big], \tag{1.9}$$

$$\|D(u - y)\|_{L_2(Q)} \le c\big[(\sqrt{\tau} + |h|)d + \sum_{i=2}^n \frac{\tau}{h_{\min}^{(i-1)}}\|f_{(i)}\|_{L_2(Q)}\big]. \tag{1.10}$$

Замечание 1. При $n=2$ правые части оценок (1.9) и (1.10) совпадают. Если же $n\ge 3$, то оценка (1.10) является, вообще говоря, существенно лучшей оценкой градиента погрешности, чем та, которая следует из (1.9).

Теорема 2. *Для метода с распараллеливанием* (1.6)–(1.8) *верна оценка погрешности*

$$\|u-y\|_{V_2(Q)}\le c\big[(\sqrt{\tau}+|h|)d+\sum_{i=1}^{n}\frac{\tau}{h_{\min,\langle i\rangle}}\|f_{(i)}\|_{L_2(Q)}\big]. \tag{1.11}$$

В указанных оценках погрешности и ниже постоянные $c>0$ и $c_i>0$ могут зависеть лишь от n и $\underline{\alpha}=\min_{1\le i\le n}\alpha_i$ (и, таким образом, не зависят ни от $X_1,\dots,X_n$, ни от T).

Для сравнения отметим, что как для чисто неявного, так и с расщепляющимся оператором проекционно-разностных методов известны [9] оценки погрешности вида

$$\|u-y\|_{V_2(Q)}\le K(\sqrt{\tau}+|h|)d. \tag{1.12}$$

Такие оценки точны по порядку на классе $f\in L_2(Q)$ и, более того, оптимальны на указанном классе для широкого семейства методов решения задачи (1.1), (1.2) [11], [13].

Пусть $\sum_{i=1}^{n}\|f_{(i)}\|_{L_2(Q)}\le N\|f\|_{L_2(Q)}$. Если выполнено жесткое условие $\tau\le N_0h_{\min}^2$, где $h_{\min}=\min_{1\le j\le n}h_j$, то оценки (1.9) и (1.11) перейдут в оценку (1.12) (предполагается, что N и N_0 — постоянные, не зависящие от τ и h). В общем же случае оценки (1.9)–(1.11) существенно отличны от (1.12).

Рассмотрим вопрос точности по порядку оценок (1.10) и (1.11). Ограничимся типичным случаем, когда $f_{(i)}=\gamma_if$ при $i=\overline{1,n}$, $\sum_{i=1}^{n}\gamma_i=1$, причем γ_i — постоянные (не зависящие от τ и h). Положим $\vec{\gamma}=(\gamma_1,\dots,\gamma_n)$, $X_{\min}=\min_{1\le i\le n}X_i$, а также $|Q|=|\Omega|T$, $|\Omega|=X_1\dots X_n$ и $c^{(0)}=\left[2^{n+1}/|Q|\right]^{1/2}$. Пусть $\overset{\circ}{C}(\overline{\Omega})$ — пространство непрерывных в $\overline{\Omega}$ функций g, равных 0 на $\partial\Omega$, с нормой $\|g\|_{\overset{\circ}{C}(\overline{\Omega})}=\max_{x\in\overline{\Omega}}|g(x)|$.

Положим $\widetilde{\mathcal{K}}=\{1\le i\le n-1\mid \sum_{k=i+1}^{n}\gamma_i\ne 0\}$, $\widetilde{h}_{\min}=\min_{i\in\widetilde{\mathcal{K}}}h_i$. Ясно, что если $\vec{\gamma}\ne(1,0,\dots,0)$, то $\widetilde{\mathcal{K}}\ne\varnothing$.

Теорема 3. *Пусть* $u_0=0$. *Предположим, что* $\vec{\gamma}\ne(1,0,\dots,0)$, *а* $\varepsilon_0^{-1}|h|^2\le\tau\le X_{\min}^2\varepsilon_0$ *при достаточно малом* $\varepsilon_0=\varepsilon_0(n,\vec{\gamma})>0$. *Тогда для последовательного метода* (1.3)–(1.5) *верна оценка погрешности снизу*

$$\sup_{\|f\|_{L_2(Q)}=1}\|u-y\|_{V_2(Q)}\ge c^{(0)}\sup_{f=g\sin\frac{\pi}{T}t,\,\|g\|_{\overset{\circ}{C}(\overline{\Omega})}=1}\|\,|D(u-y)|\,\|_{L_2(Q)}\ge$$
$$\ge\widetilde{c}\tau/\widetilde{h}_{\min},\quad \textit{где}\quad \widetilde{c}=\widetilde{c}(n,\vec{\gamma})>0. \tag{1.13}$$

Замечание 2. При $\vec{\gamma}=(1,0,\dots,0)$ оценка (1.9) переходит в оценку (1.12), а сам метод (1.3)–(1.5) эквивалентен одному из методов с расщепляющимся оператором (подробнее см. § 3).

Следствие 1. В условиях теоремы 3 и при $\widetilde{h}_{\min}\le N_0h_{\min}^{(n-1)}$ оценка (1.10) точна по порядку, т.к. $\sqrt{\tau}+|h|\le(\varepsilon_0^{1/2}+\varepsilon_0)\tau/\widetilde{h}_{\min}$ и

$$1\le\sum_{i=2}^{n}(\tau/h_{\min}^{(i-1)})\|f_{(i)}\|_{L_2(Q)}\Big/\Big[\Big(\sum_{i=2}^{n}|\gamma_i|\Big)(\tau/\widetilde{h}_{\min})\|f\|_{L_2(Q)}\Big]\le N_0.$$

Следствие 2. Если дополнительно $\varepsilon_1\widetilde{h}_{\min}^{1+\delta}\le\tau$ при некоторых $0\le\delta<1$ и $\varepsilon_1>0$, то правая часть оценки (1.13) не меньше величины $\widetilde{c}\varepsilon_1^{1/(1+\delta)}\tau^{\delta/(1+\delta)}$; это хуже по порядку, чем дает оценка (1.12). В частности, в важном случае, когда $\varepsilon_1\widetilde{h}_{\min}\le\tau$, правая часть оценки (1.13) не меньше константы $\widetilde{c}\varepsilon_1$, т.е. отсутствует сходимость к 0 погрешности $\|\,|D(u-y)|\,\|_{L_2(Q)}$ на классе $f=g\sin(\pi t/T)$, $\|g\|_{\overset{\circ}{C}(\overline{\Omega})}=1$.

Положим $\widehat{\mathcal{K}} = \{1 \le i \le n \,|\, \gamma_i \ne 1\}$, $\widehat{h}_{\min} = \min_{i \in \widehat{\mathcal{K}}} h_i$.

Теорема 4. *Пусть* $u_0 = 0$. *Предположим, что* $\varepsilon_0^{-1}|h|^2 \le \tau \le \min\{X_{\min}^2, T\}\varepsilon_0$ *при достаточно малом* $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(n, \underline{\alpha}, \vec{\gamma}) > 0$. *Тогда для метода с распараллеливанием* (1.6)–(1.8) *верна оценка погрешности снизу в форме* (1.13)

$$\sup_{\|f\|_{L_2(Q)}=1} \|u-y\|_{V_2(Q)} \ge c^{(0)} \sup_{f=g\sin\frac{\pi}{T}t,\, \|g\|_{\overset{\circ}{C}(\overline{\Omega})}=1} \|\,|D(u-y)|\,\|_{L_2(Q)} \ge$$

$$\ge \widehat{c}\tau/\widehat{h}_{\min}, \quad \text{где} \quad \widehat{c} = \widehat{c}(n, \underline{\alpha}, \vec{\gamma}) > 0. \quad (1.14)$$

Для метода (1.6)–(1.8) справедливы аналоги следствий 1, 2 (в роли $\widetilde{h}_{\min}$, $h_{\min}^{(n-1)}$ выступают $\widehat{h}_{\min}$, $h_{\min}$).

Замечание 3. В правых неравенствах (1.13) и (1.14) функция f является *аналитической* по t, но это ничего не дает в плане улучшения порядка погрешности по сравнению со случаем $f \in L_2(Q)$. Для чисто неявных методов дело обстоит иначе ([9], § 1).

Дополним оценки (1.10) и (1.11), указав условия на функции $f_{(i)}$, гарантирующие справедливость оценок порядка $O(\sqrt{\tau} + |h|)$. Естественно, эти условия предполагают определенную гладкость $f_{(i)}$, но нужна она не по всем переменным и, более того, по части переменных может быть "негативной".

Пусть $\mathbf{l} = (l_1, \ldots, l_n)$ — вектор с компонентами, равными 0 или 1, причем $\mathbf{l} \ne 0$. Введем гильбертовы пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^{\mathbf{l},0}(Q) = \{F \in L_2(Q) \,|\, D_i F \in L_2(Q)$ и $F|_{x_i=0,X_i} = 0$ для таких i, что $l_i = 1\}$ с нормой $\|F\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^{\mathbf{l},0}(Q)} = \left(\sum_{i\,:\,l_i=1} \|D_i F\|_{L_2(Q)}^2\right)^{1/2}$. Напомним [6], [14], что усреднения $f^{h,\tau}$ (введенные выше для $f \in L_1(Q)$) естественно распространяются на обобщенные функции вида $f = \sum_{j=1}^n D_j f_j$, где $f_1, \ldots, f_n \in L_2(Q)$.

Пусть $\chi^{(k)}$ – вектор из R^n, у которого первые k компонент равны 1, а остальные равны 0. Пусть $\chi_{\langle i\rangle}$ — вектор из R^n, у которого i-я компонента равна 0, а остальные равны 1.

Теорема 5. *Для последовательного метода* (1.3)–(1.5) *в предположении, что* $f_{(i)} = \sum_{j=i}^n D_j F_{(i)j}$ *при* $i = \overline{2,n}$, *верна оценка погрешности*

$$\|D(u-y)\|_{L_2(Q)} \le c\big[(\sqrt{\tau} + |h|)d + \sqrt{\tau}\sum_{i=2}^n \sum_{j=i}^n \|F_{(i)j}\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^{\chi^{(i-1)},0}(Q)}\big]. \quad (1.15)$$

Для метода с распараллеливанием (1.6)–(1.8) *в предположении, что* $f_{(i)} = D_i F_{(i)}$ *при* $i = \overline{1,n}$, *верна оценка погрешности*

$$\|u-y\|_{V_2(Q)} \le c\big[(\sqrt{\tau} + |h|)d + \sqrt{\tau}\sum_{i=1}^n \|F_{(i)}\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^{\chi_{\langle i\rangle},0}(Q)}\big]. \quad (1.16)$$

Замечание 4. Всякую функцию $f \in L_2(Q)$ можно представить суммой $f = \sum_{i=1}^n f_{(i)}$, в которой $f_{(i)} = D_i F_{(i)}$ и $\sum_{i=1}^n \|f_{(i)}\|_{L_2(Q)} + \|F_{(i)}\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^{\chi_{\langle i\rangle},0}(Q)} \le c\|f\|_{L_2(Q)}$. Для этого достаточно предварительно разложить f в сходящийся в $L_2(Q)$ ряд $f(x,t) = \sum_{\mathbf{k}>0} f^{(\mathbf{k})}(t)s^{(\mathbf{k})}(x)$, где $s^{(\mathbf{k})}(x) = \sin\frac{\pi k_1 x_1}{X_1}\cdots\sin\frac{\pi k_n x_n}{X_n}$, и положить, например, $f_{(i)}(x,t) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{M}_i} f^{(\mathbf{k})}(t)s^{(\mathbf{k})}(x)$. Здесь $\mathcal{M}_i$ — множество таких мультииндексов $\mathbf{k} > 0$, что $k_i/X_i = \max_{1\le j\le n} k_j/X_j$, причем (для определенности) если $k_{i'}/X_{i'} = k_i/X_i$ для некоторого $i' \ne i$, то $i' < i$. (Ясно, что $\mathcal{M}_i \cap \mathcal{M}_j = \varnothing$ при $i \ne j$, а $\mathcal{M}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{M}_n = \{\mathbf{k} > 0\}$; кроме того, можно считать, что $F_{(i)}(x,t) = -\sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{M}_i}\big(\frac{\pi k_i}{X_i}\big)^{-1} f^{(\mathbf{k})}(t)\cos\frac{\pi k_i x_i}{X_i}\prod_{1\le j\le n,\, j\ne i}\sin\frac{\pi k_j x_j}{X_j}$.) Конечно, практическая реализуемость такого разложения f оставляет желать лучшего.

2. Вспомогательные утверждения

Введем в пространстве S_h скалярное произведение и норму

$$(\varphi,\psi)_h=\sum_{k_1=1}^{N_1-1}\cdots\sum_{k_n=1}^{N_n-1}\varphi_{\mathbf{k}}\psi_{\mathbf{k}}h_1\ldots h_n,\quad \|\varphi\|_h=(\varphi,\varphi)_h^{1/2}.$$

Положим также

$$(\eta,\zeta)_{h,\tau}=\sum_{m=1}^{M}(\eta_m,\zeta_m)_h\tau,\qquad \|\eta\|_{h,\tau}=(\eta,\eta)_{h,\tau}^{1/2}.$$

Пусть $L[S_h]$ — пространство линейных операторов, действующих в S_h, а $\mathcal{S}[S_h]$ — класс операторов $\mathcal{A}\in L[S_h]$ таких, что $\mathcal{A}=\mathcal{A}^*>0$. Пусть E — единичный оператор, а операторы B_i и Λ_i таковы, что $B_i\varphi_{\mathbf{k}}=(1/6)\varphi_{\mathbf{k}+\chi_i}+(2/3)\varphi_{\mathbf{k}}+(1/6)\varphi_{\mathbf{k}-\chi_i}$ и $\Lambda_i\varphi_{\mathbf{k}}=-\delta_i^2\varphi_{\mathbf{k}}$ при $x_{\mathbf{k}}\in\omega^h$ (для всех $\varphi\in S_h$). Введем операторы

$$B=\prod_{i=1}^{n}B_i,\quad B_{\langle i\rangle}=\prod_{1\le j\le n,j\ne i}B_j,\quad \Lambda_d=\sum_{i=1}^{n}\Lambda_i,\quad \Lambda=\sum_{i=1}^{n}B_{\langle i\rangle}\Lambda_i;$$

таким образом, Λ_d и Λ — это конечно- и проекционно-разностный аналоги оператора $(-\triangle)$. Введем также операторы (с параметрами $\varkappa_i=\alpha_i^{-1}$)

$$\overline{E}=\prod_{i=1}^{n}(E+\tau\varkappa_i\Lambda_i),\quad \overline{E}_{\langle i\rangle}=\prod_{1\le j\le n,j\ne i}(E+\tau\varkappa_j\Lambda_j),$$
$$\widehat{B}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overline{E}_{\langle i\rangle},\quad \widehat{A}=\sum_{i=1}^{n}\Lambda_i\overline{E}_{\langle i\rangle},\quad \dot{\Lambda}_E=\frac{1}{\tau}(\overline{E}-E).$$

Нетрудно видеть, что $\widehat{A}=\tau^{-1}(\overline{E}-\widehat{B})$. Справедливо разложение

$$\dot{\Lambda}_E=\sum_{i=1}^{n}\varkappa_i\Lambda_i+\sum_{k=2}^{n}\tau^{k-1}\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}\varkappa_{i_1}\ldots\varkappa_{i_k}\Lambda_{i_1}\ldots\Lambda_{i_k}. \tag{2.1}$$

Все введенные операторы принадлежат классу $\mathcal{S}[S_h]$ и имеют общую систему собственных функций. Нам потребуется набор связывающих их неравенств.

Лемма 1. *Справедливы операторные неравенства*

$$3^{-n}E\le B\le E,\qquad 3^{1-n}\Lambda_d\le\Lambda\le\Lambda_d, \tag{2.2}$$
$$E-B\le(1/6)|h|^2\Lambda_d,\qquad \Lambda_d-\Lambda\le(1/6)|h|^2\Lambda_d^2,$$
$$\widehat{B}\le\overline{E},\qquad \widehat{A}\le\Lambda_d\overline{E}, \tag{2.3}$$
$$\widehat{A}\le\underline{\alpha}^{-1}\Lambda_d\widehat{B}, \tag{2.4}$$
$$\underline{\alpha}\dot{\Lambda}_E\le\widehat{A}\le n\overline{\alpha}\dot{\Lambda}_E\quad \text{с}\quad \overline{\alpha}=\max_{1\le i\le n}\alpha_i, \tag{2.5}$$
$$\dot{\Lambda}_E\le\underline{\alpha}^{-1}\Lambda_d\overline{E}, \tag{2.6}$$
$$R_B\equiv\widehat{B}-E\le\underline{\alpha}^{-1}\tau\Lambda_d\widehat{B},\qquad R_A\equiv\widehat{A}-\Lambda_d\le\underline{\alpha}^{-1}\tau\Lambda_d\widehat{A}. \tag{2.7}$$

Неравенства (2.2) следуют из неравенств $(1/3)E\le B_i\le E$. Остальные неравенства доказаны в ([14], лемма 1).

Следствие 3. Справедливы операторные неравенства

$$E - B \le (1/\sqrt{6})|h|\Lambda_d^{1/2}, \quad \Lambda_d - \Lambda \le (1/\sqrt{6})|h|\Lambda_d^{3/2}, \tag{2.8}$$

$$R_B \le (\underline{\alpha}^{-1}\tau\Lambda_d)^{1/2}\widehat{B}, \quad R_A \le (\underline{\alpha}^{-1}\tau\Lambda_d)^{1/2}\widehat{A}, \tag{2.9}$$

$$\sqrt{\tau}\dot{\Lambda}_E \le (\underline{\alpha}^{-1}\Lambda_d)^{1/2}\overline{E}, \tag{2.10}$$

$$(\widehat{A}^{-1}\widehat{B})^{1/2}\sqrt{\tau}\dot{\Lambda}_E \le \underline{\alpha}^{-1/2}\overline{E}. \tag{2.11}$$

Неравенства (2.8)–(2.11) сравнительно просто следуют из указанных в лемме 1; они выведены и уже использовались в [14].

Введем операторы $\Lambda_{d,\langle i\rangle} = \sum_{1\le j\le n,\, j\ne i}\Lambda_j$, $i = \overline{1,n}$, а также $\overline{E}^{(k)} = \prod_{j=1}^k (E + \tau\varkappa_j\Lambda_j)$, $\dot{\Lambda}_E^{(k)} = \tau^{-1}(\overline{E}^{(k)} - E)$, $\Lambda_d^{(k)} = \sum_{j=1}^k \Lambda_j$, $k = \overline{1,n}$ (являющиеся k-мерными вариантами операторов $\overline{E}$, $\dot{\Lambda}_E$, Λ_d). Пусть $\overline{E}^{(0)} = E$.

Лемма 2. *Справедливы операторные неравенства*

$$\Lambda_d^{1/2}(\overline{E}_{\langle i\rangle} - E) \le \underline{\alpha}^{-1}\tau\Lambda_{d,\langle i\rangle}^{1/2}\widehat{A}, \quad i = \overline{1,n}, \tag{2.12}$$

$$\Lambda_i^{1/2}\Lambda_d^{1/2}(\overline{E}_{\langle i\rangle} - E) \le \underline{\alpha}^{-1/2}\sqrt{\tau}\Lambda_{d,\langle i\rangle}^{1/2}\widehat{A}, \quad i = \overline{1,n}, \tag{2.13}$$

$$\Lambda_d^{1/2}\dot{\Lambda}_E^{(k)} \le (n\overline{\alpha}/\underline{\alpha})^{1/2}(\Lambda_d^{(k)})^{1/2}\dot{\Lambda}_E, \quad k = \overline{1,n}, \tag{2.14}$$

$$\sqrt{\tau}(\Lambda_d - \Lambda_d^{(k)})^{1/2}\Lambda_d^{1/2}\dot{\Lambda}_E^{(k)} \le (n\overline{\alpha})^{1/2}\underline{\alpha}^{-1}(\Lambda_d^{(k)})^{1/2}\dot{\Lambda}_E, \quad k = \overline{1,n}. \tag{2.15}$$

Доказательство. 1. Неравенства (2.12), (2.13) достаточно доказать при $i = n$. В силу $(n-1)$-мерного варианта левого неравенства (2.5) имеем

$$\underline{\alpha}\tau^{-1}(\overline{E}_{\langle n\rangle} - E) = \underline{\alpha}\dot{\Lambda}_E^{(n-1)} \le \sum_{i=1}^{n-1}\Lambda_i \prod_{1\le j\le n-1,\, j\ne i}(E + \tau\varkappa_j\Lambda_j) \le \widehat{A}. \tag{2.16}$$

Как следствие получаем

$$\Lambda_d(\overline{E}_{\langle n\rangle} - E) = \Lambda_{d,\langle n\rangle}(\overline{E}_{\langle n\rangle} - E) + \Lambda_n(\overline{E}_{\langle n\rangle} - E) \le$$
$$\le \underline{\alpha}^{-1}\tau\left(\Lambda_{d,\langle n\rangle}\sum_{i=1}^{n-1}\Lambda_i\overline{E}_{\langle i\rangle} + \Lambda_n\sum_{i=1}^{n-1}\Lambda_i\overline{E}_{\langle n\rangle}\right) = \underline{\alpha}^{-1}\tau\Lambda_{d,\langle n\rangle}\widehat{A}. \tag{2.17}$$

Из этого неравенства в сочетании с неравенством $\overline{E}_{\langle i\rangle} - E \le \underline{\alpha}^{-1}\tau\widehat{A}$, см. (2.16), следует (2.12) при $i = n$, а в сочетании с очевидным неравенством $\Lambda_n(\overline{E}_{\langle i\rangle} - E) \le \widehat{A}$ следует (2.13) при $i = n$.

2. При $k = n$ неравенства (2.14), (2.15) очевидны. Пусть $k < n$. По аналогии с доказательством неравенства (2.17), используя k-мерный вариант левого неравенства (2.5), получаем

$$\Lambda_d\dot{\Lambda}_E^{(k)} = \Lambda_d^{(k)}\tau^{-1}(\overline{E}^{(k)} - E) + (\Lambda_d - \Lambda_d^{(k)})\tau^{-1}(\overline{E}^{(k)} - E) \le$$
$$\le \underline{\alpha}^{-1}\left(\Lambda_d^{(k)}\sum_{i=1}^{k}\Lambda_i\overline{E}_{\langle i\rangle} + \sum_{j=k+1}^{n}\Lambda_j\sum_{i=1}^{k}\Lambda_i\overline{E}_{\langle j\rangle}\right) = \underline{\alpha}^{-1}\Lambda_d^{(k)}\widehat{A} \le$$
$$\le n(\overline{\alpha}/\underline{\alpha})\Lambda_d^{(k)}\dot{\Lambda}_E;$$

здесь учтено также правое неравенство (2.5).

Отсюда в сочетании с очевидным неравенством $\dot{\Lambda}_E^{(k)} \le \dot{\Lambda}_E$ следует (2.14), а в сочетании с неравенством $\tau(\Lambda_d - \Lambda_d^{(k)})\dot{\Lambda}_E^{(k)} \le \underline{\alpha}^{-1}\dot{\Lambda}_E$ (которое вытекает из разложений $\dot{\Lambda}_E^{(k)}$ и $\dot{\Lambda}_E$ по степеням τ, см. (2.1)) следует неравенство (2.15). $\square$

Замечание 5. Для справедливости неравенств (2.4)–(2.6), (2.10), (2.12)–(2.15) и правых неравенств (2.3), (2.7), (2.9) свойство $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ (см. § 1) несущественно; ниже это используется.

Важную роль играет следующий результат об оценках решений абстрактной двуслойной разностной схемы. Пусть $\mathcal{P} = \mathcal{B}\overline{\partial}_t + \mathcal{A}$, где $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{S}[S_h]$.

Лемма 3. 1. *Если оператор $\mathcal{C} \in \mathcal{S}[S_h]$ перестановочен с $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, то верно неравенство*

$$max_{0\le m\le M}\|(\mathcal{B}\mathcal{C})^{1/2}\eta_m\|_h + \|(\mathcal{A}\mathcal{C})^{1/2}\eta\|_{h,\tau} \le$$
$$\le (\sqrt{2}+1)(\|(\mathcal{A}^{-1}\mathcal{C})^{1/2}\mathcal{P}\eta\|_{h,\tau} + \frac{1}{\sqrt{2}}\|(\mathcal{B}\mathcal{C})^{1/2}\eta_0\|_h) \quad \forall \eta \in S_{h,\tau}. \tag{2.18}$$

В частности (случай $\mathcal{C} = E$), верно неравенство

$$max_{0\le m\le M}\|\mathcal{B}^{1/2}\eta_m\|_h + \|\mathcal{A}^{1/2}\eta\|_{h,\tau} \le$$
$$\le (\sqrt{2}+1)(\|\mathcal{A}^{-1/2}\mathcal{P}\eta\|_{h,\tau} + \frac{1}{\sqrt{2}}\|\mathcal{B}^{1/2}\eta_0\|_h) \quad \forall \eta \in S_{h,\tau}. \tag{2.19}$$

2. *Если операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ перестановочны, то верно неравенство*

$$\max\{\|\mathcal{B}\overline{\partial}_t\eta\|_{h,\tau}, \|\mathcal{A}\eta\|_{h,\tau}\} \le \|\mathcal{P}\eta\|_{h,\tau} + \frac{1}{\sqrt{2}}\|(\mathcal{A}\mathcal{B})^{1/2}\eta_0\|_h \quad \forall \eta \in S_{h,\tau}. \tag{2.20}$$

Доказательство. 1. Справедливы соотношения

$$\overline{\partial}_t(\frac{1}{2}\|(\mathcal{B}\mathcal{C})^{1/2}\eta\|_h^2) + \frac{\tau}{2}\|\overline{\partial}_t(\mathcal{B}\mathcal{C})^{1/2}\eta\|_h^2 + \|(\mathcal{A}\mathcal{C})^{1/2}\eta\|_h^2 =$$
$$= (\mathcal{B}\overline{\partial}_t\eta + \mathcal{A}\eta, \mathcal{C}\eta)_h \le \|(\mathcal{A}^{-1}\mathcal{C})^{1/2}\mathcal{P}\eta\|_h \, \|(\mathcal{A}\mathcal{C})^{1/2}\eta\|_h \quad \forall \eta \in S_{h,\tau}.$$

Как следствие имеем

$$\max\{\frac{1}{\sqrt{2}}\max{}_{0\le m\le M}\|(\mathcal{B}\mathcal{C})^{1/2}\eta_m\|_h, \, \|(\mathcal{A}\mathcal{C})^{1/2}\eta\|_{h,\tau}\} \le$$
$$\le \|(\mathcal{A}^{-1}\mathcal{C})^{1/2}\mathcal{P}\eta\|_{h,\tau} + \frac{1}{\sqrt{2}}\|(\mathcal{B}\mathcal{C})^{1/2}\eta_0\|_h.$$

2. Неравенство (2.20) [13], [14] получается аналогичным образом из рассмотрения $(\mathcal{P}\eta, \mathcal{B}\overline{\partial}_t\eta)_{h,\tau}$ и $(\mathcal{P}\eta, \mathcal{A}\eta)_{h,\tau}$. □

При оценке погрешности снизу существенна

Лемма 4. *Пусть операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ имеют общую собственную функцию s, так что $\mathcal{A}s = \lambda_{\mathcal{A}}s$ и $\mathcal{B}s = \lambda_{\mathcal{B}}s$. Пусть также $\psi^h = a_h s$ для некоторой $\psi \in L_1(\Omega)$. Тогда уравнению $\mathcal{P}\eta = f^{h,\tau}$ на $\omega^h \times \omega^\tau$ с $f(x,t) = \psi(x)e^{i_*\mu t}$ (где $\mu \ne 0$, а i_* — мнимая единица) удовлетворяет комплекснозначная сеточная функция $\eta(x,t) = \varkappa_{\mathcal{P}}s(x)e^{i_*\mu t}$ с множителем*

$$\varkappa_{\mathcal{P}} = a_h \Big/ [\mu(\frac{\tau}{2}\operatorname{ctg}\frac{\mu\tau}{2}\lambda_{\mathcal{A}} + i_*(\lambda_{\mathcal{B}} + \frac{\tau}{2}\lambda_{\mathcal{A}}))]. \tag{2.21}$$

Доказательство. Подставляя в уравнение функции η и f указанного вида, имеем

$$\varkappa_{\mathcal{P}}[\lambda_{\mathcal{B}}\frac{1}{\tau}(1 - e^{-i_*\mu\tau}) + \lambda_{\mathcal{A}}] = \frac{1}{i_*\mu\tau}(1 - e^{-i_*\mu\tau})a_h.$$

Отсюда при помощи формулы $1 - e^{-i_*\mu\tau} = 2i_*\sin\frac{\mu\tau}{2}e^{-i_*\frac{\mu\tau}{2}}$ получается (2.21). □

3. Доказательство оценок погрешности сверху

1. В данном параграфе широко используются обозначения и результаты из § 2. Рассмотрим сначала последовательный метод (1.3)–(1.5); для него полагаем $\alpha_i = \varkappa_i = 1$, $i = \overline{1,n}$. Исключение вспомогательных функций в уравнениях (1.3)–(1.5) дает

$$\overline{E}y = \check{y} + \tau \sum_{i=1}^{n} \overline{E}^{(i-1)} f_{(i)}^{h,\tau}$$

(уравнения переписываются в операторном виде $(E+\tau\Lambda_i)y_{(i)} = y_{(i-1)} + \tau f_{(i)}^{h,\tau}$, к ним применяются операторы $\overline{E}^{(i-1)}$ и результаты суммируются по $i = \overline{1,n}$). Преобразуем теперь полученный двуслойный метод к следующей удобной для нас канонической форме записи

$$\overline{\partial}_t y + \dot{\Lambda}_E y = \sum_{i=1}^{n} \overline{E}^{(i-1)} f_{(i)}^{h,\tau}, \quad y_0 = u_0^h. \tag{3.1}$$

Для доказательства теоремы 1 введем три вспомогательных метода (считаем, что $v, v_d, w \in S$)

$$B\overline{\partial}_t v + \Lambda v = f^{h,\tau}, \qquad Bv_0 = u_0^h, \tag{3.2}$$

$$\overline{\partial}_t v_d + \Lambda_d v_d = f^{h,\tau}, \qquad v_{d,0} = u_0^h, \tag{3.3}$$

$$\overline{\partial}_t w + \dot{\Lambda}_E w = f^{h,\tau}, \qquad \overline{E}w_0 = u_0^h. \tag{3.4}$$

Методы (3.2) и (3.3) — это проекционно- и конечно-разностная чисто неявные схемы. Метод (3.4) — конечно-разностная схема с расщепляющимся оператором. Он отличается от метода (3.1) стандартным видом правой части уравнения и наличием оператора $\overline{E}$ в начальном условии.

Для метода (3.2) в силу § 1 и доказательства леммы 4 из [9] следует оценка

$$\|u - v\|_{V_2(Q)} \le c_0(\sqrt{\tau} + |h|)d. \tag{3.5}$$

Постоянная c_0 в ней абсолютная (т.е. конкретное число), в чем можно убедиться, проследив за доказательством в [9].

Сведем оценки $u - y$ к (3.5), дав оценки разностей $v - v_d$, $v_d - w$ и $w - y$. Положим $\|r\|_{\overset{\circ}{V}{}_2^{h,\tau}} = \max_{0\le m\le M}\|r_m\|_h + \|\Lambda^{1/2}r\|_{h,\tau}$ для $r \in S_{h,\tau}$.

Лемма 5. *Верна оценка* $\|v - v_d\|_{\overset{\circ}{V}{}_2^{h,\tau}} \le c|h|(\|f^{h,\tau}\|_{h,\tau} + \|\Lambda_d^{1/2}u_0^h\|_h)$.

Доказательство. Разность $r = v - v_d$ удовлетворяет уравнениям

$$B\overline{\partial}_t r + \Lambda r = \overline{\partial}_t(E - B)v_d + (\Lambda_d - \Lambda)v_d, \quad Br_0 = (E - B)v_{d,0}.$$

Учитывая, что $E \le 3^n B$ (см. (2.2)), и применяя неравенство (2.19) для $\mathcal{P} = B\overline{\partial}_t + \Lambda$, получаем

$$\|r\|_{\overset{\circ}{V}{}_2^{h,\tau}} \le 3^{n/2}(\sqrt{2}+1)(\|\Lambda^{-1/2}(E-B)\overline{\partial}_t v_d\|_{h,\tau} + \\ +\|\Lambda^{-1/2}(\Lambda_d - \Lambda)v_d\|_{h,\tau} + \|(E-B)v_{d,0}\|_h).$$

В силу неравенств $\Lambda^{-1} \le 3^{n-1}\Lambda_d^{-1}$ и (2.8), а также равенства $v_{d,0} = u_0^h$ имеем

$$\|r\|_{\overset{\circ}{V}{}_2^{h,\tau}} \le c|h|(\|\overline{\partial}_t v_d\|_{h,\tau} + \|\Lambda_d v_d\|_{h,\tau} + \|\Lambda_d^{1/2}u_0^h\|_h).$$

Остается воспользоваться оценкой (2.20) для $\mathcal{P} = \overline{\partial}_t + \Lambda_d$. $\square$

Лемма 6. *Верна оценка* $\|v_d - w\|_{\overset{\circ}{V}{}_2^{h,\tau}} \le c\sqrt{\tau}(\|f^{h,\tau}\|_{h,\tau} + \|\Lambda_d^{1/2}u_0^h\|_h)$.

Доказательство. Разность $r = v_d - w$ удовлетворяет уравнениям

$$\overline{\partial}_t r + \Lambda_d r = (\dot{\Lambda}_E - \Lambda_d)w, \qquad r_0 = \tau\dot{\Lambda}_E w_0.$$

Учитывая, что $\Lambda \le \Lambda_d$, и применяя неравенство (2.19) для $\mathcal{P} = \overline{\partial}_t + \Lambda_d$, получаем

$$\|r\|_{\overset{\circ}{V}{}_2^{h,\tau}} \le (\sqrt{2}+1)(\|\Lambda_d^{-1/2}(\dot{\Lambda}_E - \Lambda_d)w\|_{h,\tau} + \|\tau\dot{\Lambda}_E w_0\|_h).$$

Поскольку $\dot{\Lambda}_E - \Lambda_d \le \widehat{A} - \Lambda_d = R_A$ и $\widehat{A} \le n\dot{\Lambda}_E$ (см. (2.5)), а $\overline{E}w_0 = u_0^h$, то из неравенств (2.9) и (2.10) следует оценка

$$\|r\|_{\overset{\circ}{V}{}_2^{h,\tau}} \le (\sqrt{2}+1)n\sqrt{\tau}(\|\dot{\Lambda}_E w\|_{h,\tau} + \|\Lambda_d^{1/2}u_0^h\|_h).$$

Применяя сначала неравенство (2.20) для $\mathcal{P} = \overline{\partial}_t + \dot{\Lambda}_E$, а затем неравенства (2.6) и $E \le \overline{E}$, имеем

$$\|\dot{\Lambda}_E w\|_{h,\tau} \le \|f^{h,\tau}\|_{h,\tau} + \frac{1}{\sqrt{2}}\|\dot{\Lambda}_E^{1/2}w_0\|_h \le c(\|f^{h,\tau}\|_{h,\tau} + \|\Lambda_d^{1/2}u_0^h\|_h),$$

что и завершает доказательство. $\square$

Лемма 7. *Справедливы оценки*

$$\|w-y\|_{\overset{\circ}{V}{}_2^{h,\tau}} \le c\sqrt{\tau}\left(\sum_{i=2}^n \beta_{i-1}(\tau,h)\|f_{(i)}^{h,\tau}\|_{h,\tau} + \|\Lambda_d^{1/2}u_0^h\|_h\right), \tag{3.6}$$

$$\|\Lambda^{1/2}(w-y)\|_{h,\tau} \le c\left(\sum_{i=2}^n \frac{\tau}{h_{\min}^{(i-1)}}\|f_{(i)}^{h,\tau}\|_{h,\tau} + \sqrt{\tau}\|\Lambda_d^{1/2}u_0^h\|_h\right), \tag{3.7}$$

$$\|\Lambda^{1/2}(w-y)\|_{h,\tau} \le c\sqrt{\tau}\left(\sum_{i=2}^n \|(\Lambda_d^{(i-1)})^{1/2}(\Lambda_d - \Lambda_d^{(i-1)})^{-1/2}f_{(i)}^{h,\tau}\|_{h,\tau} + \right.$$
$$\left. + \|\Lambda_d^{1/2}u_0^h\|_h\right). \tag{3.8}$$

Доказательство. Разность $r = y - w$ удовлетворяет уравнениям

$$\overline{\partial}_t r + \dot{\Lambda}_E r = \Psi \equiv \sum_{i=2}^n (\overline{E}^{(i-1)} - E)f_{(i)}^{h,\tau}, \qquad r_0 = \tau\dot{\Lambda}_E w_0.$$

Учитывая, что $\Lambda \le \dot{\Lambda}_E$, и применяя неравенство (2.19) для $\mathcal{P} = \overline{\partial}_t + \dot{\Lambda}_E$, получаем

$$\|r\|_{\overset{\circ}{V}{}_2^{h,\tau}} \le (\sqrt{2}+1)(\|\dot{\Lambda}_E^{-1/2}\Psi\|_{h,\tau} + \|\tau\dot{\Lambda}_E w_0\|_h).$$

Применяя же неравенство (2.18) с $\mathcal{C} = \Lambda_d\dot{\Lambda}_E^{-1} \le E$, имеем

$$\|\Lambda^{1/2}r\|_{h,\tau} \le (\sqrt{2}+1)(\|\Lambda_d^{1/2}\dot{\Lambda}_E^{-1}\Psi\|_{h,\tau} + \|\tau\dot{\Lambda}_E w_0\|_h).$$

При помощи неравенств $\dot{\Lambda}_E^{(k)} \le \dot{\Lambda}_E$ и (2.14) можно записать

$$\|\dot{\Lambda}_E^{-1/2}\Psi\|_{h,\tau} \le \sum_{i=2}^n \tau\|(\dot{\Lambda}_E^{(i-1)})^{1/2}f_{(i)}^{h,\tau}\|_{h,\tau},$$

$$\|\Lambda_d^{1/2}\dot{\Lambda}_E^{-1}\Psi\|_{h,\tau} \le \sqrt{n}\sum_{i=2}^n \tau\|(\Lambda_d^{(i-1)})^{1/2}f_{(i)}^{h,\tau}\|_{h,\tau}.$$

Нетрудно видеть, что $\|(\tau\dot{\Lambda}_E^{(k)})^{1/2}\|_{L[S_h]} \le c\beta_k(\tau,h)$ (в силу формулы типа (2.1) для $\dot{\Lambda}_E^{(k)}$) и $\|(\Lambda_d^{(k)})^{1/2}\|_{L[S_h]} \le 2\sqrt{n}/h_{\min}^{(k)}$ при $k = \overline{1,n}$. А поскольку слагаемое $\|\tau\dot{\Lambda}_E w_0\|_h$ оценено в доказательстве леммы 6, то оценки (3.6) и (3.7) установлены.

Оценка (3.8) получается, если для оценки слагаемого $\|\Lambda_d^{1/2}\dot{\Lambda}_E^{-1}\Psi\|_{h,\tau}$ вместо неравенства (2.14) применить неравенство (2.15). $\square$

Лемма 8. *Справедливы оценки* (1.9) *и* (1.10).

Доказательство. По неравенству треугольника имеем

$$\|u-y\|_{V_2(Q)} \le \|u-v\|_{V_2(Q)} + \|v-v_d\|_{\overset{\circ}{V}{}_2^{h,\tau}} + \|v_d-w\|_{\overset{\circ}{V}{}_2^{h,\tau}} + \|w-y\|_{\overset{\circ}{V}{}_2^{h,\tau}}.$$

Здесь учтено, что $\|\eta\|_{V_2(Q)} = \max_{1\le m\le M}\|B^{1/2}\eta_m\|_h + \|\Lambda^{1/2}\eta\|_{h,\tau} \le \|\eta\|_{\overset{\circ}{V}{}_2^{h,\tau}}$ для любой $\eta \in S$. Поэтому при использовании хорошо известнх неравенств $\|f^{h,\tau}\|_{h,\tau} \le \|f\|_{L_2(Q)}$ и $\|\Lambda_d^{1/2}u_0^h\|_h \le \|u_0^h\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)}$ оценка (1.9) следует из оценки (3.5) и лемм 5–7.

Вывод оценки (1.10) отличается только использованием оценки (3.7) вместо (3.6). $\square$

2. Перейдем теперь к методу с распараллеливанием (1.6)–(1.8). Исключение вспомогательных функций в уравнениях (1.6)–(1.8) дает

$$\overline{E}y = \widehat{B}\check{y} + \tau\sum_{i=1}^{n}\overline{E}_{\langle i\rangle}f_{(i)}^{h,\tau}$$

(уравнения переписываются в операторном виде $(E+\tau\varkappa_i\Lambda_i)\alpha_i y_{(i)} = \alpha_i\check{y} + \tau f_{(i)}^{h,\tau}$, к ним применяются операторы $\overline{E}_{\langle i\rangle}$ и результаты суммируются по $i=\overline{1,n}$). Преобразуем метод к канонической форме записи типа (3.1)–(3.4)

$$\widehat{B}\,\overline{\partial}_t y + \widehat{A}y = \sum_{i=1}^{n}\overline{E}_{\langle i\rangle}f_{(i)}^{h,\tau}, \qquad y_0 = u_0^h. \tag{3.9}$$

Введем вспомогательный метод с расщепляющимся оператором (считаем, что $z\in S$)

$$\widehat{B}\,\overline{\partial}_t z + \widehat{A}z = f^{h,\tau}, \qquad \overline{E}z_0 = u_0^h, \tag{3.10}$$

отличающийся от метода (3.9) стандартным видом правой части уравнения и наличием оператора $\overline{E}$ в начальном условии.

Сведем оценку $u-y$ к (3.5), использовав лемму 5 и дав оценки $v_d - z$ и $z-y$.

Лемма 9. *Верна оценка* $\|v_d - z\|_{\overset{\circ}{V}{}_2^{h,\tau}} \le c\sqrt{\tau}(\|f^{h,\tau}\|_{h,\tau} + \|\Lambda_d^{1/2}u_0^h\|_h)$.

Доказательство. Разность $r = v_d - z$ удовлетворяет уравнениям

$$\overline{\partial}_t r + \Lambda_d r = R_B\overline{\partial}_t z + R_A z, \qquad r_0 = \tau\dot{\Lambda}_E z_0.$$

Учитывая, что $\Lambda \le \Lambda_d$, и применяя неравенство (2.19) для $\mathcal{P} = \overline{\partial}_t + \Lambda_d$, получаем

$$\|r\|_{\overset{\circ}{V}{}_2^{h,\tau}} \le (\sqrt{2}+1)(\|\Lambda_d^{-1/2}R_B\overline{\partial}_t z\|_{h,\tau} + \|\Lambda_d^{-1/2}R_A z\|_{h,\tau} + \|\tau\dot{\Lambda}_E z_0\|_h).$$

Используя неравенства (2.9), (2.10) и равенство $\overline{E}z_0 = u_0^h$, выводим

$$\|r\|_{\overset{\circ}{V}{}_2^{h,\tau}} \le (\sqrt{2}+1)\underline{\alpha}^{-1/2}\sqrt{\tau}(\|\widehat{B}\,\overline{\partial}_t z\|_{h,\tau} + \|\widehat{A}z\|_{h,\tau} + \|\Lambda_d^{1/2}u_0^h\|_h).$$

Остается применить неравенство (2.20) для $\mathcal{P} = \widehat{B}\,\overline{\partial}_t + \widehat{A}$ и учесть, что $(\widehat{A}\widehat{B})^{1/2} \le \Lambda_d^{1/2}\overline{E}$, см. (2.3). $\square$

Лемма 10. *Верны оценки*

$$\|z-y\|_{\overset{\circ}{V}{}_2^{h,\tau}} \le c\Big(\sum_{i=1}^{n}\frac{\tau}{h_{\min,\langle i\rangle}}\|f_{(i)}^{h,\tau}\|_{h,\tau}+\sqrt{\tau}\|\Lambda_d^{1/2}u_0^h\|_h\Big), \tag{3.11}$$

$$\|z-y\|_{\overset{\circ}{V}{}_2^{h,\tau}} \le c\sqrt{\tau}\Big(\sum_{i=1}^{n}\|\Lambda_{d,\langle i\rangle}^{1/2}\Lambda_i^{-1/2}f_{(i)}^{h,\tau}\|_{h,\tau}+\|\Lambda_d^{1/2}u_0^h\|_h\Big). \tag{3.12}$$

Доказательство. Разность $r=z-y$ удовлетворяет уравнениям

$$\widehat{B}\,\overline{\partial}_t r+\widehat{A}r=\Phi\equiv\sum_{i=1}^{n}(\overline{E}_{\langle i\rangle}-E)f_{(i)}^{h,\tau}, \qquad r_0=\tau\dot{\Lambda}_E z_0.$$

Применяя неравенство (2.18) с $\mathcal{P}=\widehat{B}\,\overline{\partial}_t+\widehat{A}$ и $\mathcal{C}=\Lambda_d\widehat{A}^{-1}$ и неравенство (2.4) , получаем

$$\underline{\alpha}\|r\|_{\overset{\circ}{V}{}_2^{h,\tau}} \le \max{}_{0\le m\le M}\|(\Lambda_d\widehat{A}^{-1}\widehat{B})^{1/2}r_m\|_h+\|\Lambda_d^{1/2}r\|_{h,\tau}\le$$
$$\le(\sqrt{2}+1)(\|\widehat{A}^{-1}\Lambda_d^{1/2}\Phi\|_{h,\tau}+\|(\Lambda_d\widehat{A}^{-1}\widehat{B})^{1/2}\tau\dot{\Lambda}_E z_0\|_h).$$

С учетом неравенств (2.12) и (2.11) имеем

$$\|r\|_{\overset{\circ}{V}{}_2^{h,\tau}} \le c\Big(\sum_{i=1}^{n}\tau\|\Lambda_{d,\langle i\rangle}^{1/2}f_{(i)}^{h,\tau}\|_{h,\tau}+\sqrt{\tau}\|\Lambda_d^{1/2}u_0^h\|_h\Big).$$

В силу того, что $\|\Lambda_{d,\langle i\rangle}^{1/2}\|_{L[S_h]}\le 2\sqrt{n-1}/h_{\min,\langle i\rangle}$, оценка (3.11) получена.

Для вывода оценки (3.12) вместо неравенства (2.12) нужно применить неравенство (2.13). □

Лемма 11. *Справедлива оценка погрешности* (1.11).

Доказательство оценки (1.11) отличается от доказательства оценки (1.9), см. лемму 8, только применением лемм 9, 10 вместо лемм 6, 7.

Замечание 6. Из лемм 5, 6 и 9 ясно, что оценка (3.5) сохраняет силу при замене v на v_d, w или z, а также c_0 на c, т.е. оценка типа (3.5) верна и для методов (3.3), (3.4) и (3.10). Это представляет самостоятельный интерес (и будет существенно использовано ниже в § 4). Становится понятно, что различие в оценках погрешности (3.5) и из теорем 1, 2 обусловлено не столько конструкцией операторов локально-одномерных методов, сколько “генерируемой” в них аппроксимацией f.

3. Обратимся к доказательству теоремы 5. Вывод оценок (1.15) и (1.16) отличается от вывода оценок (1.10) и (1.11) тем, что, во-первых, надо использовать оценки (3.8) и (3.12) вместо (3.7) и (3.11) соответственно. Во-вторых, надо применить неравенства

$$\|(\Lambda_d^{(i-1)})^{1/2}(\Lambda_d-\Lambda_d^{(i-1)})^{-1/2}(D_jF_{(i)j})^{h,\tau}\|_{h,\tau}\le$$
$$\le\|F_{(i)j}\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^{\chi(i-1),0}(Q)},\quad j=\overline{i,n},$$
$$\|\Lambda_{d,\langle i\rangle}^{1/2}\Lambda_i^{-1/2}(D_iF_{(i)})^{h,\tau}\|_{h,\tau}\le\|F_{(i)}\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^{\chi<i>,0}(Q)},\quad i=\overline{1,n},$$

которые получаются при помощи k-мерных вариантов известных неравенств $\|\Lambda_j^{-1/2}(D_jF)^{h,\tau}\|_{h,\tau}\le\|F\|_{L_2(Q)}$, $j=\overline{1,n}$, и $\|\Lambda_d^{1/2}w^h\|_h\le\|w\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)}$ с подходящими k и с учетом перестановочности сеточных и непрерывных L_2-норм по различным координатным направлениям.

4. Доказательство оценок погрешности снизу

Пусть снова $s(x) = s^{(\mathbf{k})}(x) = \sin\frac{\pi k_1 x_1}{X_1}\cdots\sin\frac{\pi k_n x_n}{X_n}$, где $k_1 = \overline{1, N_1 - 1}, \ldots, k_n = \overline{1, N_n - 1}$. Значение $\mathbf{k}$ будет выбрано по ходу доказательства. Положим $\lambda_i = \left(\frac{2}{h_i}\sin\frac{\pi k_i h_i}{2X_i}\right)^2$, $\omega_i = \tau\varkappa_i\lambda_i$. Величины $\lambda_d = \sum_{i=1}^n \lambda_i$, $\overline{\lambda} = \prod_{i=1}^n (1+\omega_i)$, $\overline{\lambda}^{(k)} = \prod_{i=1}^k (1+\omega_i)$, $\overline{\lambda}_{\langle i\rangle} = \prod_{1\le j\le n,\, j\ne i}(1+\omega_j)$ и $a_h = \prod_{i=1}^n \lambda_i/(\frac{\pi k_i}{X_i})^2$ являются отвечающими функции s собственными числами операторов Λ_d, $\overline{E}$, $\overline{E}^{(k)}$, $\overline{E}_{\langle i\rangle}$ (см. § 2) и $(\cdot)^h$ соответственно. Будем считать $\overline{\lambda}^{(0)} = 1$.

Пусть $f_{(i)} = \gamma_i f$, $i = \overline{1, n}$, а $\sum_{i=1}^n \gamma_i = 1$. Выберем $f(x,t) = s(x)\sin\mu t$, где $\mu = \pi/T$. Обозначим решение задачи (1.1), (1.2) с правой частью f и начальной функцией u_0 через $u[f, u_0]$, решение задачи (1.3)–(1.5) — через $y[f, u_0]$ и т.д.

Ниже используется стандартная запись комплексного числа: $\zeta = \mathrm{Re}\,\zeta + i_*\mathrm{Im}\,\zeta$.

1. Рассмотрим метод (3.1); при этом снова положим $\alpha_i = \varkappa_i = 1$ при $i = \overline{1, n}$. Будем исходить из неравенства

$$\|D(u-y)[f,0]\|_{L_2(Q)} \ge \|D(y[f,u_0] - w[f,u_0'])\|_{L_2(Q)} - \\ -(\|D(u-w)[f,0]\|_{L_2(Q)} + \|D(y[0,u_0] - w[0,u_0'])\|_{L_2(Q)}), \tag{4.1}$$

следующего из неравенства треугольника. Здесь w — решение разностной схемы (3.4).

Воспользуемся леммой 4 для $\mathcal{P} = \overline{\partial}_t + \dot{\Lambda}_E$. Положим

$$\widetilde{\varkappa} = 2a_h/\{\mu[(\mathrm{ctg}\,\frac{\mu\tau}{2})(\overline{\lambda} - 1) + i_*(\overline{\lambda} + 1)]\}, \quad \widetilde{\rho}_\gamma = \sum_{i=1}^n \gamma_i \overline{\lambda}^{(i-1)}.$$

Функции $y(x,t) = s(x)\,\mathrm{Im}\,(\widetilde{\varkappa}\widetilde{\rho}_\gamma e^{i_*\mu t})$ и $w(x,t) = s(x)\,\mathrm{Im}\,(\widetilde{\varkappa} e^{i_*\mu t})$ из $S_{h,\tau}$ являются решениями уравнений (3.1) и (3.4) с выбранной выше f и с начальными функциями $u_0(x) = \widetilde{u}_0 s(x)$ и $u_0'(x) = \widetilde{u}_0' s(x)$ соответственно (явный вид $\widetilde{u}_0$ и $\widetilde{u}_0'$ несуществен).

В силу замечания 6 имеем

$$\|D(u-w)[f,0]\|_{L_2(Q)} \le c_1|Q|^{1/2}(\sqrt{\tau} + |h|). \tag{4.2}$$

С помощью неравенства $\|D\eta\|_{L_2(Q)} \le \|\dot{\Lambda}_E^{1/2}\eta\|_{h,\tau}$ для любой $\eta \in S$ и неравенства (2.19) для $\mathcal{P} = \overline{\partial}_t + \dot{\Lambda}_E$ получаем

$$\|D(y[0,u_0] - w[0,u_0'])\|_{L_2(Q)} \le (1 + 1/\sqrt{2})\|(y-w)|_{t=0}\|_h = \\ = (1+1/\sqrt{2})|\Omega|^{1/2}2^{-n/2}|(\,\mathrm{Im}\,\widetilde{\varkappa})(\widetilde{\rho}_\gamma - 1)|.$$

Используя также формулу

$$\widetilde{\rho}_\gamma - 1 = \sum_{i=2}^n \gamma_i(\overline{\lambda}^{(i-1)} - 1) \tag{4.3}$$

и неравенства $0 < \overline{\lambda}^{(i-1)} - 1 \le \overline{\lambda} - 1$, $|\,\mathrm{Im}\,(\zeta^{-1})| \le (2|\,\mathrm{Re}\,\zeta|)^{-1}$, выводим

$$\|D(y[0,u_0] - w[0,u_0'])\|_{L_2(Q)} \le c_2\widetilde{\gamma}|\Omega|^{1/2}\tau, \quad \text{где} \quad \widetilde{\gamma} = \max_{2\le i\le n}|\gamma_i|. \tag{4.4}$$

Справедливы неравенство и формула

$$\|D\eta\|_{L_2(Q)} \ge 3^{(1-n)/2}\|\Lambda_d^{1/2}\eta\|_{h,\tau}\ \forall \eta \in S, \quad \sum_{m=1}^M \tau\,\mathrm{Im}^2(\widetilde{\varkappa}e^{i_*\mu t_m}) = (T/2)|\widetilde{\varkappa}|^2$$

(мы учли правое неравенство (2.2), а также равенство $\mathrm{Im}^2(\widetilde{\varkappa}e^{i_*\mu t}) = \mathrm{Re}^2\widetilde{\varkappa}\cdot\sin^2\mu t + \mathrm{Re}\,\widetilde{\varkappa}\cdot\mathrm{Im}\widetilde{\varkappa}\cdot\sin 2\mu t + \mathrm{Im}^2\widetilde{\varkappa}\cdot\cos^2\mu t$). Поэтому

$$\|D(y[f,u_0] - w[f,u_0'])\|_{L_2(Q)} \ge c_3|Q|^{1/2}\lambda_d^{1/2}|\widetilde{\varkappa}|\,|\widetilde{\rho}_\gamma - 1|. \tag{4.5}$$

Заметим, что $|\widetilde{\varkappa}| \geq c_4\tau/[\overline{\lambda}-1+\mu\tau(\overline{\lambda}+1)] \geq c_4\pi^{-1}\tau/\overline{\lambda}$.

Из неравенств (4.1) и (4.5), (4.2), (4.4) следует

$$\|D(u-y)[f,0]\|_{L_2(Q)} \geq |Q|^{1/2}\{c_5\tau\lambda_d^{1/2}|\widetilde{\rho}_\gamma-1|/\overline{\lambda}-c_6(1+\widetilde{\gamma})(\sqrt{\tau}+|h|)\}. \tag{4.6}$$

Для любого $i_0=\overline{1,n-1}$ справедлива оценка снизу (см. формулу (4.3))

$$|\widetilde{\rho}_\gamma-1|/\overline{\lambda} \geq \left|\sum_{i=i_0+1}^{n}\gamma_i\right| - \sum_{i=2}^{i_0}|\gamma_i|(\overline{\lambda}^{(i-1)}-1)/\overline{\lambda} -$$
$$-\sum_{i=i_0+1}^{n}|\gamma_i|\,|1-(\overline{\lambda}^{(i-1)}-1)/\overline{\lambda}| \geq \left|\sum_{i=i_0+1}^{n}\gamma_i\right| -$$
$$-c_7\widetilde{\gamma}(\omega_{i_0}^{-1}+\max\nolimits_{i_0<j\leq n}\omega_j);$$

мы учли, что $1-(\lambda^{(i-1)}/\overline{\lambda}) \leq 1-(1+\max_{i\leq j\leq n}\omega_j)^{-(n-i+1)} \leq c_8\max_{i_0<j\leq n}\omega_j$ при $i_0<i\leq n$. Выберем $i_0\in\widetilde{\mathcal{K}}$ так, чтобы $h_{i_0}=\widetilde{h}_{\min}$. Положим $k_i=N_i-1$ при $i=i_0$ либо $k_i=1$ при $i\neq i_0$; тогда $\lambda_d^{1/2}\geq\sqrt{2}/\widetilde{h}_{\min}$. Пусть также $\varepsilon_0^{-1}|h|^2\leq\tau\leq X_{\min}^2\varepsilon_0$; тогда $\omega_{i_0}^{-1}+\max_{i_0<j\leq n}\omega_j\leq(1/2+\pi^2)\varepsilon_0$ и при достаточно малом $\varepsilon_0=\varepsilon_0(n,\vec{\gamma})$ имеем $|\widetilde{\rho}_\gamma-1|/\overline{\lambda}\geq(1/2)|\sum_{i=i_0+1}^n\gamma_i|>0$. Поскольку $\sqrt{\tau}+|h|\leq(\varepsilon_0^{1/2}+\varepsilon_0)\tau/\widetilde{h}_{\min}$, то теперь из оценки (4.6) следует $\|D(u-y)[f,0]\|_{L_2(Q)}\geq\widetilde{c}(n,\vec{\gamma})|Q|^{1/2}2^{-(n+1)/2}\tau/\widetilde{h}_{\min}$. Оценка (1.13) доказана.

2. Рассмотрим теперь метод (3.9). Будем исходить из неравенства типа (4.1), но с z в роли w.

Воспользуемся леммой 4 для $\mathcal{P}=\widehat{B}\,\overline{\partial}_t+\widehat{A}$. Положим

$$\widehat{\varkappa}=2a_h\bigg/\left\{\mu\sum_{i=1}^{n}\alpha_i[(\operatorname{ctg}\frac{\mu\tau}{2})\omega_i+i_*(2+\omega_i)]\overline{\lambda}_{\langle i\rangle}\right\},\qquad \widehat{\rho}_\gamma=\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\overline{\lambda}_{\langle i\rangle}.$$

Функции $y(x,t)=s(x)\operatorname{Im}(\widehat{\varkappa}\widehat{\rho}_\gamma e^{i_*\mu t})$ и $z(x,t)=s(x)\operatorname{Im}(\widehat{\varkappa}e^{i_*\mu t})$ из $S_{h,\tau}$ являются решениями уравнений (3.9) и (3.10) с выбранной f и с начальными функциями $u_0(x)=\widehat{u}_0(x)s(x)$ и $u_0'(x)=\widehat{u}_0's(x)$ соответственно (при некоторых $\widehat{u}_0$ и $\widehat{u}_0'$).

Пусть $\widehat{\lambda}_\tau=\sum_{i=1}^n\alpha_i\omega_i\overline{\lambda}_{\langle i\rangle}$ — собственное число оператора $\tau\widehat{A}$. С помощью неравенств (2.18) (для $\mathcal{P}=\widehat{B}\,\overline{\partial}_t+\widehat{A}$ и $\mathcal{C}=\Lambda_d\widehat{A}^{-1}$) и $\widehat{B}\leq\overline{E}$ получаем

$$\|D(y[0,u_0]-z[0,u_0'])\|_{L_2(Q)}\leq(1+1/\sqrt{2})\|(\Lambda_d\widehat{B}\widehat{A}^{-1})^{1/2}(y-z)|_{t=0}\|_h\leq$$
$$\leq(1+1/\sqrt{2})|\Omega|^{1/2}2^{-n/2}|(\operatorname{Im}\widehat{\varkappa})(\widehat{\rho}_\gamma-1)|(\tau\lambda_d\overline{\lambda}/\widehat{\lambda}_\tau)^{1/2}.$$

Используя формулу $\widehat{\rho}_\gamma-1=\sum_{i=1}^n\gamma_i(\overline{\lambda}_{\langle i\rangle}-1)$ и неравенства $\overline{\lambda}_{\langle i\rangle}-1\leq\underline{\alpha}^{-1}\widehat{\lambda}_\tau$ (см. (2.16)), $|\operatorname{Im}\widehat{\varkappa}|\leq4\mu\tau^2n\overline{\alpha}\overline{\lambda}/\widehat{\lambda}_\tau^2$, выводим

$$\|D(y[0,u_0]-z[0,u_0'])\|_{L_2(Q)}\leq c_1\widehat{\gamma}|\Omega|^{1/2}\mu\tau^2(\tau\lambda_d)^{1/2}(\overline{\lambda}/\widehat{\lambda}_\tau)^{3/2}, \tag{4.7}$$

где $\widehat{\gamma}=\max_{1\leq i\leq n}|\gamma_i|$.

Аналогично неравенству (4.5) имеем

$$\|D(y[f,u_0]-z[f,u_0'])\|_{L_2(Q)}\geq c_2|Q|^{1/2}\lambda_d^{1/2}|\widehat{\varkappa}|\,|\widehat{\rho}_\gamma-1|. \tag{4.8}$$

Заметим, что $|\widehat{\varkappa}|\geq c_3\tau/[\widehat{\lambda}_\tau+\mu\tau\sum_{i=1}^n\alpha_i(1+\omega_i)\overline{\lambda}_{\langle i\rangle}]\geq c_4\tau/\beta$, где $\beta=\sum_{i=1}^n(\omega_i+M^{-1})\overline{\lambda}_{\langle i\rangle}$.

Учитывая, что оценки (4.1) и (4.2) сохраняют силу при замене w на z, и применяя также оценки (4.7) и (4.8), получаем

$$\|D(u-y)[f,0]\|_{L_2(Q)}\geq|Q|^{1/2}[c_5\tau\lambda_d^{1/2}|\widehat{\rho}_\gamma-1|/\beta-c_6(\sqrt{\tau}+|h|+M^{-3/2}\tau\lambda_d^{1/2}(\overline{\lambda}/\widehat{\lambda}_\tau)^{3/2})]. \tag{4.9}$$

Для любого $i_0=\overline{1,n}$ справедливы оценки $\overline{\lambda}/\widehat{\lambda}_\tau \le \underline{\alpha}^{-1}(1+\omega_{i_0}^{-1})$ и

$$|\widehat{\rho}_\gamma - 1|/\beta \ge \Big|\sum_{1\le i\le n,\, i\ne i_0}\gamma_i\Big| - |\gamma_{i_0}|(\overline{\lambda}_{\langle i_0\rangle}-1)/\beta -$$
$$-\sum_{1\le i\le n,\, i\ne i_0}|\gamma_i|\big[|1-(\overline{\lambda}_{\langle i\rangle}/\beta)|+1/\beta\big] \ge |1-\gamma_{i_0}| -$$
$$-c_7\widehat{\gamma}[\omega_{i_0}^{-1}+(1+\omega_{i_0}^{-1})(\max\nolimits_{i\ne i_0}\omega_i+M^{-1})(1+\max\nolimits_{i\ne i_0}\omega_i)^{n-2}];$$

мы использовали равенство

$$\beta-\overline{\lambda}_{\langle i\rangle} = (\omega_{i_0}+M^{-1})(\overline{\lambda}_{\langle i_0\rangle}-1)+$$
$$+\sum_{i\ne i_0}(\omega_i+M^{-1})\overline{\lambda}_{\langle i\rangle}-(1+\omega_{i_0})\Big(\prod_{j\ne i,i_0}(1+\omega_j)-1\Big)-1+M^{-1}$$

и оценки $\overline{\lambda}_{\langle i_0\rangle}-1 \le (n-1)\max_{i\ne i_0}\omega_i(1+\max_{i\ne i_0}\omega_i)^{n-2}$, $\overline{\lambda}_{\langle i\rangle}\le(1+\omega_{i_0})(1+\max_{i\ne i_0}\omega_i)^{n-2}$ при $i\ne i_0$, $\beta\ge\omega_{i_0}+M^{-1}$.

Выберем $i_0\in\widehat{\mathcal{K}}$ так, чтобы $h_{i_0}=\widehat{h}_{\min}$, и положим $k_i=N_i-1$ при $i=i_0$ либо $k_i=1$ при $i\ne i_0$. Пусть также $\varepsilon_0^{-1}|h|^2\le\tau\le\min\{X_{\min}^2,T\}\varepsilon_0$. Тогда $\omega_{i_0}^{-1}+\max_{i\ne i_0}\omega_i\le(1/2+\pi^2)\varepsilon_0$, $M^{-1}\le\varepsilon_0$ и при достаточно малом $\varepsilon_0=\varepsilon_0(n,\underline{\alpha},\vec{\gamma})$ имеем $|\widehat{\rho}_\gamma-1|/\beta\ge(1/2)|1-\gamma_{i_0}|>0$. Из оценки (4.9) теперь выводим $\|D(u-y)[f,0]\|_{L_2(Q)}\ge\widehat{c}(n,\underline{\alpha},\vec{\gamma})|Q|^{1/2}2^{-(n+1)/2}\tau/\widehat{h}_{\min}$. Оценка (1.14) доказана.

В заключение несколько слов о результатах численных экспериментов, проведенных нами при $n=2$. Уже в случае кусочно-постоянных f наблюдается преимущество чисто неявного метода (3.3) в точности вычисления градиента над методами из § 1 (для не слишком малого шага τ). Обнаруживается также падение точности методов из § 1 при нарушении условий $\gamma_1,\gamma_2\in[0,1]$ или $\alpha_1=\alpha_2=0.5$ (более того, при $\alpha_1\ne\alpha_2$ может теряться симметрия решения при симметричных данных). Последнее обстоятельство, на наш взгляд, естественно, но почему-то не нашло отражения в литературе.

Литература

1. Яненко Н.Н. *Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики.* – Новосибирск: Наука, 1967. – 195 с.
2. Самарский А.А. *Теория разностных схем.* Учебное пособие. – М.: Наука, 1977. – 656 с.
3. Марчук Г.И. *Методы расщепления.* – М.: Наука, 1988. – 264 с.
4. Ковеня В.М., Яненко Н.Н. *Метод расщепления в задачах газовой динамики.* – Новосибирск: Наука, 1981. – 304 с.
5. Бахвалов Н.С. *О свойствах оптимальных методов решения задач математической физики* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1970. – Т. 10. – № 3. – С. 555-568.
6. Злотник А.А. *Оценка скорости сходимости в L_2 проекционно-разностных схем для параболических уравнений* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1978. – Т. 18. – № 6. – С. 1454-1465.
7. Злотник А.А. *Проекционно-разностные схемы для нестационарных задач с негладкими данными*: Дис. … канд. физ.-матем. наук. – М., 1979. — 146 с.
8. Оганесян Л.А., Руховец Л.А. *Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений.* – Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1979. – 235 с.
9. Злотник А.А. *Оценка скорости сходимости в $V_2(Q_m)$ проекционно-разностных схем для параболических уравнений* // Вестн. Моск. ун-та. Сер. вычисл. матем. и кибернет. – 1980. – № 1. – С. 27-35.
10. Злотник А.А. *О скорости сходимости проекционно-разностной схемы с расщепляющимся оператором для параболических уравнений* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1980. – Т. 20. – № 2. – С. 422-432.

11. Злотник А.А. *О скорости сходимости проекционно-разностных схем для параболических уравнений* // Докл. 5 Всесоюзн. конф. "Вариационно-разностные методы в матем. физ." Ч. 1. – М., 1984. – С. 72-80.
12. Злотник А.А., Туретаев И.Д. *Точные оценки погрешности некоторых двухслойных методов решения трехмерного уравнения теплопроводности* // Матем. сб. – 1985. – Т. 128. – № 4. – С. 530-544.
13. Злотник А.А. *К теории проекционно-сеточных методов решения задач математической физики на классах негладких данных*: Дис.... докт. физ.-матем. наук. – М., 1992. – 376 с.
14. Зайцева С.Б., Злотник А.А. *Оптимальные оценки погрешности одного локально-одномерного метода для многомерного уравнения теплопроводности* // Матем. заметки. – 1996. – Т. 60. – № 2. – С. 185-197.

Московский энергетический институт
(*технический университет*)

Поступила
23.07.1996