ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 4 (455)

УДК 517.956

И.Н. ГУРОВА

О МЕТОДАХ ПОЛУДИСКРЕТИЗАЦИИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕКОМПАКТНОЙ ПОЛУГРУППОЙ

Метод полудискретизации для абстрактных квазилинейных уравнений в банаховом пространстве E можно описать следующим образом. Пусть в уравнении

$$x' = Ax + f(t,x) \tag{1}$$

A — производящий оператор сильно непрерывной полугруппы $\exp\{At\}$ линейных операторов, действующих в пространстве E, а нелинейный непрерывный оператор f действует из $R^1 \times E$ в E. В качестве аппроксимирующей полудискретизационной схемы рассмотрим уравнения

$$x'_h = A_h x_h + f_h(t, x_h), \tag{2}$$

где h — параметр полудискретизации, операторы A_h — производящие операторы сильно непрерывных полугрупп $\exp\{A_h t\}$ линейных операторов, действующих в банаховых пространствах E_h, а непрерывные операторы f_h действуют из $R^1 \times E_h$ в E_h. Будем предполагать, что $h \in H = \{h_n : h_n > 0,\ h_n \downarrow 0\} \cup \{0\}$, при этом операторы A_0, f_0 отождествляются с операторами A, f, а пространство E_0 — с пространством E соответственно. Таким образом, при $h = 0$ уравнение (2) переходит в уравнение (1). Предположим также, что существуют линейные ограниченные операторы вложения $Q_h : E_h \to E$, $h \in H \setminus \{0\}$, $Q_0 = I$. Для уравнения (1) будем изучать возможность приближенного нахождения решений задачи Коши или задачи о периодических по времени решений при помощи схемы (2). При этом будем говорить, что схема (2) аппроксимирует уравнение (1) в некотором функциональном пространстве $\mathbf{L}$, если из ограниченности в этом пространстве последовательности $\{Q_h x_h,\ h \in H \setminus \{0\}\}$, где в качестве x_h взяты решения одной из упомянутых выше задач для уравнений (2), следует относительная компактность этой последовательности в пространстве $\mathbf{L}$, и ее предельными точками могут быть только решения соответствующей задачи для уравнения (1). В случае задачи Коши в качестве пространства $\mathbf{L}$ будет использоваться пространство $C([0,d],E)$ непрерывных на некотором отрезке $[0,d]$ функций, значения которых лежат в E. В задаче о периодических решениях полагаем $\mathbf{L} = C_T(E)$, где $C_T(E)$ — пространство непрерывных T-периодических функций со значениями в E. Под решениями соответствующих задач, следуя ([1], гл. 6, § 23, с. 469), понимаются решения эквивалентных операторных уравнений, приведенных там же.

Целью данной работы является нахождение условий, при которых схема (2) эквивалентна такому функциональному уравнению

$$u = F(h,u) \tag{3}$$

(в некотором пространстве $\mathbf{L}$), для исследования которого может быть применена теория вращения векторных полей в бесконечномерном пространстве ([2], гл. 4, § 32, с. 245). Таким образом, задача об аппроксимации уравнения (1) схемой (2) сводится к изучению общими топологическими методами зависимости от параметра решений уравнения (3). Ранее такой подход использовался для исследования эллиптических [3] и параболических [4] уравнений. При этом

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 99-01-00333.

оператор F оказывался вполне непрерывным. В данной работе полугруппа $\exp\{At\}$ предполагается лишь сильно непрерывной (это позволяет изучать схемы полудискретизации для квазилинейных гиперболических уравнений). Поэтому соответствующие интегральные операторы F не будут обладать свойством полной непрерывности. Приведем условия, при которых соответствующий оператор будет уплотняющим ([5], гл. 1, § 1.5, с. 28), и поэтому для исследования уравнения (3) может быть применена теория вращения уплотняющих векторных полей (теория топологического индекса множества неподвижных точек) ([5], гл. 3, § 3.5, с. 134).

Для построения оператора F потребуются также линейные операторы проектирования $P_h : E \to E_h$, которые удовлетворяют следующим условиям:

$$P_h Q_h = I_h, \tag{4}$$

где I_h — тождественный оператор в пространстве E_h;

$$Q_h P_h x \to x \ \text{ для всех } \ x \in E. \tag{5}$$

Всюду ниже считаем, что $\|P_h\|$ и $\|Q_h\|$ равномерно ограничены.

Перейдем теперь к условиям на аппроксимирующие операторы A_h и f_h. Будем предполагать, что полугруппы $\exp\{A_h t\}$ аппроксимируют полугруппу $\exp\{At\}$, т. е. выполняется условие

A_1) *для любого* $x \in E$

$$Q_h \exp\{A_h t\} P_h x \longrightarrow \exp\{At\}x \quad \text{при} \ \ h \to 0$$

равномерно по t *из любого ограниченного отрезка.*

Для того чтобы сформулировать условия на операторы f_h, рассмотрим оператор $\varphi : H \times \mathbf{R}^1 \times E \to E$, задаваемый формулой

$$\varphi(h, t, x) = Q_h f_h(t, P_h x).$$

Напомним, что мерой некомпактности Хаусдорфа ([5], с. 7) ограниченного множества $\Omega \in E$ называют число $\chi(\Omega)$, определяемое равенством

$$\chi(\Omega) = \inf\{\varepsilon : \Omega \ \text{ имеет конечную } \varepsilon\text{-сеть}\}.$$

Ниже предполагаем выполненными следующие условия:

A_2) *оператор* φ *непрерывен по совокупности переменных и ограничен на ограниченных множествах;*

A_3) *существует такая константа* k, *что*

$$\chi\Big(\bigcup_{h \in H} \varphi(h, t, \Omega)\Big) \le k\chi(\Omega)$$

для любого ограниченного множества $\Omega \in E$.

Для уравнения (1) рассмотрим задачу Коши с начальным условием

$$x(0) = x^0. \tag{6}$$

В качестве аппроксимации (6) возьмем для уравнения (2) начальное условие

$$x_h(0) = P_h x^0. \tag{7}$$

Оператор $F : H \times C([0, d], E) \to C([0, d], E)$ определим с помощью формулы

$$F(h, u)(t) = Q_h \exp\{A_h t\} P_h x^0 + \int_0^t Q_h \exp\{A_h(t - s)\} P_h \varphi(h, s, P_h u(s)) ds. \tag{8}$$

Далее используется мера некомпактности ψ [6], определяемая на ограниченных подмножествах Ω пространства $C([0, d], E)$ формулой

$$\psi(\Omega) = \max_{D \subseteq \Omega}(\sup_t e^{-Lt}\chi(D(t)), \quad \lim_{\delta \to 0} \sup_{u \in D} \max_{0 \le \tau \le \delta} \|u(t) - u(t + \tau)\|_E),$$

при этом максимум в ее правой части берется по всем счетным подмножествам D множества Ω, а неотрицательная константа L носит технический характер и выбирается в ходе доказательства. Значения меры некомпактности ψ лежат в конусе $\mathbf{R}_+^2$. В смысле порядка, индуцированного этим конусом, и понимаются ниже неравенства, связанные с мерой некомпактности.

Как показано в [6], мера некомпактности ψ обладает следующими свойствами:

1) монотонность, т. е. из включения $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$ следует неравенство $\psi(\Omega_1) \leq \psi(\Omega_2)$;
2) инвариантность относительно присоединения компактного множества, т. е. для любого компактного $K \subset C([0,d],E)$ и ограниченного $\Omega \subset C([0,d],E)$ выполнено равенство
$$\psi(\Omega \cup K) = \psi(\Omega);$$
3) правильность, т. е. равенство $\psi(\Omega) = 0$ эквивалентно относительной компактности множества Ω.

Поэтому ([5], с. 134) для операторов, уплотняющих относительно меры некомпактности ψ, справедлива теория топологического индекса множества неподвижных точек, построенная там же. Напомним, что оператор G называется уплотняющим относительно меры некомпактности ψ, если он непрерывен, и из неравенства $\psi(G\Omega) \geq \psi(\Omega)$ вытекает относительная компактность множества Ω. Говорят, что F уплотняет по совокупности переменных относительно меры некомпактности ψ, если он непрерывен, и из неравенства $\psi(F(H \times \Omega)) \geq \psi(\Omega)$ вытекает относительная компактность множества Ω.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (4), (5) *и предположения* A$_1$)–A$_3$). *Тогда оператор F, задаваемый формулой* (8), *уплотняет по совокупности переменных относительно меры некомпактности ψ. Соотношение между неподвижными точками u^h оператора $F(h,\cdot)$ и решениями x_h задачи* (2), (7) *задается равенствами*
$$P_h u^h = x_h, \qquad Q_h x_h = u^h. \tag{9}$$

Из полученного результата следует, что для задачи Коши схема (2) аппроксимирует уравнение (1).

Перейдем теперь к условиям, обеспечивающим непустоту множества решений уравнений (2). Обозначим через $\Sigma_h[0,\tau]$ множество решений задачи (2), (7), определенных на отрезке $[0,\tau]$. Ниже будем предполагать, что для любого $\tau < d$ все решения задачи (1), (6), определенные на отрезке $[0,\tau]$, могут быть продолжены на отрезок $[0,d]$. Это предположение запишем в виде

A$_4$) $\Sigma_0[0,d]\big|_{[0,\tau]} = \Sigma_0[0,\tau]$.

Как показано в [6], если выполнено предположение A$_4$) и множество $\Sigma_0[0,d]$ ограничено, то
$$\operatorname{ind}(\Sigma_0[0,d], F(0,\cdot)) = 1.$$

Применяя теперь теорему 1 и аналог теоремы 54.1 ([2], с. 458) для уплотняющих операторов, получим следующий результат.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (4), (5), *предположения* A$_1$)–A$_4$) *и множество* $\Sigma_0[0,d]$ *ограничено. Тогда при достаточно малых h все решения задач* (2), (7) *определены на отрезке* $[0,d]$ *и отображение* $h \mapsto Q_h\Sigma_h[0,d]$ *полунепрерывно сверху.*

Из последней теоремы, в частности, следует: если задача (1), (6) имеет на отрезке $[0,d]$ единственное решение x^0, то при достаточно малых h все решения задач (2), (7) определены на отрезке $[0,d]$ и
$$Q_h x_h \to x^0 \ \text{ при } \ h \to 0, \tag{10}$$
где $x_h \in \Sigma_h[0,d]$.

Перейдем теперь к задаче о периодических решениях уравнения (1). При изучении этой задачи f и f_h предполагаются T-периодичными по первой переменной. Кроме того, считаем пространство E сепарабельным.

Определим оператор $F : H \times C_T(E) \to C_T(E)$ формулой

$$F(h,u)(t) = Q_h \exp\{A_h t\}(I - \exp\{A_h T\})^{-1} \int_0^T \exp\{A_h(T-s)\} P_h \varphi(h,s,P_h u(s))ds +$$
$$+ \int_0^t Q_h \exp\{A_h(t-s)\} P_h \varphi(h,s,P_h u(s))ds. \quad (11)$$

Отметим, что условие $1 \notin \sigma(\exp\{A_h t\})$, необходимое для корректности последней формулы, носит формальный характер. Его всегда можно предполагать выполненным. В противном случае нужно в правой части уравнения (2) вычесть и прибавить член Lx_h, где L — достаточно большая положительная константа, и затем рассмотреть операторы $A_h x_h - Lx_h$ и $f_h(t,x_h) + Lx_h$ в качестве новых операторов A_h и f_h. Нетрудно показать, что если для первоначальных операторов A_h и f_h были выполнены предположения A_1)–A_3) и накладываемое ниже требование A_5), то предположения A_1)–A_5) выполнены и для переопределенных операторов.

В пространстве $C_T(E)$ будем рассматривать меру некомпактности ν [7], задаваемую формулой

$$\nu(\Omega) = \big(\chi(\Omega)(\cdot),\ \lim_{\delta\to 0} \sup_{u\in D} \max_{0\le\tau\le\delta} \|u(t) - u(t+\tau)\|_E\big).$$

Значения меры некомпактности ν лежат в конусе $\mathbf{K} = K_T \times \mathbf{R}^1_+$, где K_T — конус измеримых, ограниченных почти всюду T-периодических функций. Мера некомпактности ν так же, как и мера некомпактности ψ, обладает свойствами 1)–3). Поэтому для уплотняющих относительно ν операторов тоже справедлива теория топологического индекса неподвижных точек.

Кроме A_1)–A_3), при изучении задачи о периодических решениях потребуется еще предположение

A_5) *существует константа $\gamma > k$ такая, что*

$$\chi\Big(\bigcup_{h\in H} Q_h \exp\{A_h t\} P_h B_E(0,1)\Big) \le e^{-\gamma t}.$$

Наконец, предположим, что для операторов Q_h, P_h выполнено неравенство

$$\chi\Big(\bigcup_{h\in H} Q_h P_h B(0,1)\Big) \le 1. \quad (12)$$

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (4), (5), (12) *и предположения* A_1)–A_3), A_5). *Тогда оператор F, задаваемый формулой* (11), *уплотняет по совокупности переменных относительно меры некомпактности ν. Соотношение между неподвижными точками u^h оператора $F(h,\cdot)$ и T-периодическими решениями x_h уравнения* (2) *задается равенствами* (9).

Применяя, как и выше, аналог теоремы 54.1 ([2], с. 458), получим следующий результат.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* (4), (5) *и предположения* A_1)–A_4). *Предположим, что x^0 — T-периодическое решение уравнения* (1), *для которого*

$$\mathrm{ind}(x^0, F(0,\cdot)) \ne 0. \quad (13)$$

Тогда для достаточно малых h уравнения (2) *имеют T-периодические решения x_h, для которых выполнено соотношение* (10).

Неравенство (13) выполнено, например, если оператор $F(0,\cdot)$ дифференцируем в точке x^0 и

$$1 \notin \sigma(F'_x(0,x^0)). \quad (14)$$

Отметим, что в случае задачи Коши последнее соотношение всегда выполнено, т. к. в силу теоремы единственности линеаризованное уравнение с нулевым начальным условием не может иметь ненулевых решений.

Оценим теперь скорость сходимости $Q_h x_h$ к x^0 или в силу соотношений (9) u^h к x^0. При этом будем предполагать, что операторы $F(h,\cdot)$ дифференцируемы по второй переменной в точке x^0 равномерно относительно первой, т. е.

$$F(h, x_0 + y) - F(h, x_0) = F'_x(h, x^0)y + \omega(h, y), \tag{15}$$

где $\|\omega(h,y)\|/\|y\| \to 0$ при $\|y\| \to 0$ равномерно относительно h. Для выполнения последнего достаточно потребовать, чтобы операторы $\psi(h,t,x)$ были дифференцируемы по третьей переменной в точках $x_0(t)$ равномерно относительно h, t. Кроме этого, будем предполагать, что выполнено соотношение (14). Так как оператор $F'_x(h,x^0)y$ уплотняет по совокупности переменных h, y, то в силу леммы 2.7.7 ([5], с. 98) $1 \notin \sigma(F'_x(h,x^0))$ при достаточно малых h и $\|(I - F'_x(h,x^0))^{-1}\|$ равномерно ограничены. Поэтому из соотношения (15) вытекает эквивалентность $\|u^h - x^0\|$ и $\|F(h,x^0) - F(0,x^0)\|$. Таким образом, сходимость $Q_h x_h$ к x^0 эквивалентна сходимости аппроксимаций на отыскиваемом решении.

В заключение остановимся на некоторых примерах выполнения условий A_1)–A_5).

Пусть $A_h = \widehat{A}_h + C_h$, причем операторы $\widehat{A}_h$ порождают в пространствах E_h полугруппы $\exp\{\widehat{A}_h t\}$, удовлетворяющие при некотором $\gamma > 0$ оценке

$$\|\exp\{\widehat{A}_h t\}\|_{E_h} \le e^{-\gamma t}, \tag{16}$$

а операторы C_h таковы, что $Q_h C_h P_h x$ вполне непрерывен по совокупности переменных $h \in H$, $x \in E$. Пусть также $\|Q_h\|$, $\|P_h\| \le 1$ и существует множество D, плотное в E, содержащееся при некотором $\lambda \in \mathbf{C}$ в $(\lambda - A)^{-1}E$ и такое, что

$$\|P_h A x - A_h P_h x\|_{E_h} \to 0 \ \text{ при } \ h \to 0, \ \ x \in D.$$

Тогда для операторов A_h выполняются требования A_1) и A_5). Для выполнения оценки (16) достаточно в силу теоремы Хилле–Иосиды ([8], с. 343), чтобы для вещественных $\lambda \ge -\gamma$ выполнялось неравенство

$$\|(\lambda - \widehat{A}_h)^{-1}\|_{E_h} \le \frac{1}{\lambda + \gamma}.$$

Отметим, что перечисленные условия реализуются для аппроксимаций оператора, возникающего при описании передаточных линий, описываемых квазилинейными телеграфными уравнениями [9], если в первом уравнении производная по пространственной переменной аппроксимируется разностью вперед, а во втором — разностью назад. В качестве P_h нужно взять проекторы Стеклова по отрезкам, образуемым сеткой, а в качестве Q_h — оператор, естественным образом сопоставляющий сеточной функции ступенчатую.

Если нелинейность f в уравнении (1) непрерывна, ограничена на ограниченных множествах, удовлетворяет условию

$$\chi(f(t,\Omega)) \le k\chi(\Omega)$$

и, кроме того, $\|Q_h P_h\| \le 1$, то оператор φ, порожденный оператором

$$f_h(t, x_h) = P_h f(t, Q_h x_h),$$

удовлетворяет требованиям A_2), A_3). Если дополнительно выполнено неравенство

$$\|f(t,x)\| \le a(1 + \|x\|),$$

то требование A_4) выполнено для любого $d > 0$.

Литература

1. Красносельский М.А., Забрейко П.П., Пустыльник Е.И., Соболевский П.Е. *Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций.* – М.: Наука, 1966. – 499 с.
2. Красносельский М.А., Забрейко П.П. *Геометрические методы нелинейного анализа.* – М.: Наука, 1975. – 510 с.
3. Гурова И.Н. *Об одном топологическом методе исследования разностных схем* // ДАН СССР. – 1979. – Т. 248. – № 1. – С. 25–28.
4. Гурова И.Н., Каменский М.И. *О методе полудискретизации в задаче о периодических решениях квазилинейных автономных параболических уравнений* // Дифференц. уравнения. – 1996. – Т. 32. – № 1. – С. 101–106.
5. Ахмеров Р.Р., Каменский М.И., Родкина А.Е., Потапов А.С., Садовский Б.Н. *Меры некомпактности и уплотняющие операторы.* – Новосибирск: Наука, 1986. – 282 с.
6. Couchouron J.-F., Kamenskii M.I. *A unified topological point of view for integro-differential inclusions* // Different. Inclusions and Optim. Control. Lect. Notes in Nonlinear Anal. – 1998. – V. 2. – P. 123–137.
7. Kamenskii M.I. *Mesures de non compacité dans l'espace des fonctions continues et leurs applications aux équations et aux inclusions différentielles* // Sémin. Initiation à l'Analyse, Publ. Math. de l'Université Pierre et Marie Curie. – 1996/97. – V. 120. – P. 11–13.
8. Иосида К. *Функциональный анализ.* – М.: Мир, 1967. – 624 с.
9. Ceron S.S., Lopes O. *α–contractions and attractors for dissipative semilinear hyperbolic equations and systems* // Ann. Math. Pura Appl. – 1991. – V. 160. – № 4. – P. 193–206.

Воронежский государственный технический университет

Поступила
30.04.1999