ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 11 (438)

УДК 514.763.4

Д.А. КАЛИНИН

H-ПРОЕКТИВНО-ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ РИМАНОВЫ СВЯЗНОСТИ

Введение

Одной из классических задач дифференциальной геометрии является исследование проективных отображений римановых многообразий, а также обобщений таких отображений. В данной статье рассматриваются келеровы многообразия произвольной размерности, допускающие H-проективные отображения [1]–[5].

В работе [1] были найдены формы H-проективно-эквивалентных римановых связностей четырехмерных келеровых многообразий. При этом использовались канонические типы билинейных форм на римановом многообразии, найденные А.З. Петровым [6]. Указанные канонические типы позволяют воспользоваться методом подвижного косонормального репера (косорепера) [7], [8].

Метод подвижного косорепера является одним из основных приемов исследования псевдоримановых многообразий, допускающих проективные отображения [8], [9]. Однако уже в четырехмерном случае обнаруживается, что этот метод приводит к большим вычислительным трудностям при исследовании H-проективных отображений келеровых многообразий и, в частности, при определении H-проективно-эквивалентных римановых связностей келеровых многообразий.

Это приводит к необходимости использования канонических типов билинейных форм, которые учитывали бы структуру келерова многообразия M, а именно, тот факт, что касательное пространство T_pM, $p \in M$, является комплексным линейным пространством. Такие канонические типы были найдены в [10]. С их помощью в настоящей статье определяются H-проективно эквивалентные римановы связности на келеровом многообразии (M, g) произвольной размерности и сигнатуры.

В работе используются обозначения, введенные в [10].

1. H-проективные отображения келеровых многообразий

Пусть (M, J) есть $2n$-мерное интегрируемое почти комплексное многообразие. Напомним, что келеровой метрикой на M называется (псевдо)риманова метрика g со связностью Леви-Чивита ∇ такая, что $g(JX, JY) = g(X, Y)$ и $\nabla J = 0$ для любых векторных полей X, Y на M. Почти комплексное многообразие M с определенной на нем келеровой метрикой называется *келеровым многообразием*. Гладкая кривая γ на келеровом многообразии M называется H-планарной, если ее касательный вектор χ удовлетворяет уравнению

$$\nabla_\chi \chi = a(t)\chi + b(t)J(\chi),$$

где $a(t)$ и $b(t)$ — гладкие функции параметра t.

Пусть M, M' — два келеровых многообразия с метриками g, g' и комплексными структурами J, J' соответственно. Диффеоморфизм $f : M \to M'$ называется *H-проективным отображением*,

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-01031).

если для любой H-планарной кривой γ в M кривая $f\circ\gamma$ является H-планарной кривой в M'. Если многообразие M допускает H-проективное отображение, то говорят, что многообразия M, M' имеют общие H-планарные кривые. H-проективное отображение переводит комплексную структуру J в комплексную структуру J', т. е. $f_*\circ J = J'\circ f_*$. Благодаря этому можно выбрать комплексные карты в M и M' так, чтобы соответствующие точки $p\in M$ и $p'=f(p)\in M'$ имели одинаковые координаты и компоненты комплексных структур J, J' совпадали. Такие системы координат в M и M' будем называть *соответственными комплексными системами координат.*

Пусть на M заданы две келеровы метрики g, g' со связностями Леви-Чивита ∇ и ∇'. Если многообразия (M,g,J) и (M,g',J) имеют общие H-планарные кривые, то в локальных координатах x^i, $i=1,\dots,2n$, на M выполняется равенство ([3]; [5], с. 212)

$$a_{ij,l}=\frac{1}{2}(g_{il}\ell_{,j}+g_{jl}\ell_{,i}+2J^k_{(i}J^m_{j)}\ell_{,k}g_{ml}) \tag{1}$$

для некоторого невырожденного тензорного поля a типа $(0,2)$ и вещественнозначной функции ℓ на M (запятая в (1) обозначает ковариантное дифференцирование относительно связности ∇).

Так как келеровы метрики g и g' на M являются эрмитовыми [11], билинейные формы g_p, g'_p определяют эрмитово скалярное произведение в касательном пространстве T_pM, $p\in M$. Для любых векторных полей X, Y на M тензорное поле a удовлетворяет условию ([3], [5])

$$a(JX,JY)=a(X,Y) \tag{2}$$

и также определяет эрмитово скалярное произведение в T_pM. Следовательно, можно использовать теорему 1 из [10] для приведения форм g_p, a_p к каноническому виду.

Пусть билинейная форма a имеет приведенную характеристику Сегре [10]

$$\chi=[(m^1_1\dots m^1_{s_1})\dots(m^{k_1}_1\dots m^{k_1}_{s_{k_1}})(m^{k_1+1}_1\dots m^{k_1+1}_{s_{k_1+1}})\overline{(m^{k_1+1}_1\dots m^{k_1+1}_{s_{k_1+1}})}\dots \\ (m^{k_1+k_2}_1\dots m^{k_1+k_2}_{s_{k_1+k_2}})\overline{(m^{k_1+k_2}_1\dots m^{k_1+k_2}_{s_{k_1+k_2}})}] \tag{3}$$

в области $U\subset M$. Здесь собственные значения λ_A, $A=1,\dots,k_1$, вещественны, а λ_A, $A=k_1+1,\dots,k_1+k_2\equiv k$, комплексны, и черта над числами m^A_s означает, что они соответствуют комплексно-сопряженному собственному значению $\overline{\lambda_A}$.

Произведем разбиение множества индексов $I=\{1,\dots,n\}$ на подмножества. Положим $n^A_s=\sum\limits_{B=1}^{A-1}r_B+\sum\limits_{p=1}^{s-1}m^A_p$ при $A=1,\dots,k_1$ и $n^A_s=\sum\limits_{B=1}^{k_1}r_B+2\sum\limits_{B=k_1+1}^{A-1}r_B+2\sum\limits_{p=1}^{s-1}m^A_p$ при $A=k_1+1,\dots,k_1+k_2$. Тогда $I^A_s=\{p\in I\mid p=n^A_s+1,\dots,n^A_s+m^A_s\}$ при $A=1,\dots,k_1+k_2$ и $\overset{*}{I}{}^A_s=\{p\in I\mid p=n^A_s+m^A_s,\dots,n^A_s+2m^A_s\}$ при $A=k_1+1,\dots,k_1+k_2$, кроме того, обозначим $I_A\equiv\bigcup\limits_{s=1}^{s_A}I^A_s$, $\overset{*}{I}_A\equiv\bigcup\limits_{s=1}^{s_A}\overset{*}{I}{}^A_s$.

Согласно теореме 1 статьи [10] в U существует подвижной репер $\{Z_\alpha,Z_{\overline{\alpha}}\}$, $\alpha=1,\dots,n$, адаптированный к комплексной структуре J такой, что в каждой точке $p\in U$ матрицы $G=(\check{g}_{\alpha\overline{\beta}})$ и $A=(\check{a}_{\alpha\overline{\beta}})$ имеют указанный в этой теореме вид.

Так как уравнение (1) удовлетворяется тождественно в любой системе координат на M, его можно записать в виде

$$\nabla a(X,Y,W)=\frac{1}{2}(g(X,W)V\ell+g(W,Y)X\ell+g(JX,W)JY\ell+g(JY,W)JX\ell),$$

где X,Y,W — произвольные векторные поля на M. Полагая $X=Z_\alpha$, $Y=Z_{\overline{\beta}}$, $W=Z_\mu$, получим [7], [8]

$$d\check{a}_{\alpha\overline{\beta}}-\check{a}_{\sigma\overline{\beta}}\omega^\sigma_\alpha-\check{a}_{\alpha\overline{\sigma}}\omega^{\overline{\sigma}}_{\overline{\beta}}=(Z_{\overline{\beta}}\ell)\theta_\alpha+(Z_\alpha\ell)\theta_{\overline{\beta}}, \tag{4}$$

где $\check{a}_{ij}$ — компоненты формы a в репере $\{Z_\alpha,Z_{\overline{\alpha}}\}$, запись вида $Z_\alpha\ell$ означает действие векторного поля Z_α на функцию ℓ, а ω^i_j суть компоненты формы ω связности ∇, удовлетворяющие соотношениям

$$\omega^{\alpha}_{\beta} = \overline{\omega^{\overline{\alpha}}_{\overline{\beta}}}, \quad \omega^{\alpha}_{\overline{\beta}} = \omega^{\overline{\alpha}}_{\beta} = 0, \tag{5}$$

$$\omega_{ij} = \omega^{k}_{j} g_{ki}, \quad \omega_{\alpha\overline{\beta}} = -\omega_{\overline{\beta}\alpha}, \quad \omega_{\alpha\beta} = \omega_{\overline{\alpha}\overline{\beta}} = 0. \tag{6}$$

Умножая (4) на $g^{\alpha\overline{\beta}}$ и суммируя по α, β от 1 до n, с помощью (5), (6) найдем

$$\varphi = \sum_{A=1}^{k_1} r_A \lambda_A + \sum_{A=k_1+1}^{k_1+k_2} r_A(\lambda_A + \overline{\lambda_A}) \tag{7}$$

с точностью до несущественной аддитивной постоянной. В формуле (7) r_A означает кратность корня λ_A характеристического уравнения $\det(a - \lambda g) = 0$.

2. H-проективно-эквивалентные римановы связности: случай вещественных корней

Рассмотрим уравнение (4) для всех возможных значений индексов α, β, а также вещественных и комплексных корней λ_A по отдельности.[1]

1. Пусть $\alpha, \beta \in I^A_s$, $\lambda_A = \overline{\lambda_A}$ (обозначения см. в п. 1). Если $m^A_s = 1$, то $\check{a}_{\alpha\overline{\mu}} = e^A_s \lambda_A \delta^A_\mu$, и из (4) при $\alpha = \beta$ следует $d\lambda_A = 2e^A_s (Z_\alpha \ell)\theta_\alpha$.

Пусть $m^A_s > 1$.[2] Не теряя общности, можно предположить, что блок G^A_s расположен в левом верхнем углу матрицы G. Положим для удобства $m^A_s = m$. Среди чисел $\check{a}_{\alpha\overline{\beta}}$ не равны нулю только $\check{a}_{\alpha\,\overline{m-\alpha+1}} = e^A_s \lambda_A$ при $\alpha = 1, \ldots, n$ и $\check{a}_{\alpha\,\overline{m-\alpha+2}}$ при $\alpha = 2, \ldots, m$. Из (4) при $\alpha = \beta = 1$ следует $Z_1\ell = Z_{\overline{1}}\ell = 0$. Полагая в (4) поочередно $\alpha = 1$, $\beta = 2, \ldots, m$ и $\alpha, \beta = 2, \ldots, m$, получим

$$\omega_{1\overline{\beta}} = (Z_{\overline{\beta+1}}\ell)\theta_1, \quad \beta = 1, \ldots, m-2, \tag{8}$$

$$e^A_s d\lambda_A + \omega_{1\overline{m-1}} = (Z_{\overline{m}}\ell)\theta_1, \tag{9}$$

$$d\check{a}_{\alpha\overline{\beta}} + \omega_{\alpha\overline{\beta-1}} + \omega_{\overline{\beta}\alpha-1} = (Z_\alpha\ell)\theta_{\overline{\beta}} + (Z_{\overline{\beta}}\ell)\theta_\alpha, \quad \alpha, \beta = 2, \ldots, m. \tag{10}$$

При $m = 2$ из (9) и (10) выводим $e^A_s d\lambda_A + \omega_{1\overline{1}} = (Z_{\overline{2}}\ell)\theta_1$, $\omega_{2\overline{1}} = (Z_2\ell)\theta_{\overline{2}} + (Z_{\overline{2}}\ell)\theta_2$. Складывая первое уравнение с комплексно сопряженным, найдем $e^A_s d\lambda_A = 1/2((Z_{\overline{2}}\ell)\theta_1 + (Z_2\ell)\theta_{\overline{1}})$. Отсюда следует

$$\omega_{1\overline{1}} = \frac{1}{2}((Z_{\overline{2}}\ell)\theta_1 - (Z_2\ell)\theta_{\overline{1}}).$$

В случае $m > 2$ из (10) при $\alpha \neq m - \beta + 1$ следует рекуррентная формула

$$\omega_{\alpha\overline{\beta-1}} = \omega_{\alpha-1\,\overline{\beta}} + (Z_\alpha\ell)\theta_{\overline{\beta}} + (Z_{\overline{\beta}}\ell)\theta_\alpha, \quad \alpha, \beta = 2, \ldots, m, \quad \alpha + \beta \neq m + 1.$$

Взяв $\alpha \geq \beta$ и применив эту формулу $\alpha - \beta + 1$ раз, найдем

$$\begin{gathered}\omega_{\alpha\,\overline{\beta-1}} + \omega_{\overline{\alpha}\,\beta-1} = (Z_{\overline{\alpha}}\ell)\theta_\beta + (Z_\beta\ell)\theta_{\overline{\alpha}} + \cdots + (Z_\alpha\ell)\theta_{\overline{\beta}} + (Z_{\overline{\beta}}\ell)\theta_\alpha, \\ \alpha, \beta = 2, \ldots, m, \quad \beta \leq \alpha, \quad \alpha + \beta \neq m + 1.\end{gathered}$$

Полагая здесь $\beta = 2$, $\alpha = m - 2$ и пользуясь (8), получим

$$Z_1\ell = \cdots = Z_{m-1}\ell = Z_{\overline{1}}\ell = \cdots = Z_{\overline{m-1}}\ell = 0, \tag{11}$$

---

[1]Заметим, что уравнение (4) с точностью до обозначений совпадает с уравнением (1.63) статьи [8], а матрицы $G = (\check{g}_{\alpha\overline{\beta}})$, $A = (\check{a}_{\alpha\overline{\beta}})$ в случае вещественных корней характеристического уравнения $\det(A - \lambda G)$ совпадают по своему строению с соответствующими матрицами в вещественном случае [6].

[2]Используемые обозначения приведены в п. 1 данной статьи, а также, более подробно, в работах [10] и [12].

после этого из (11) найдем

$$\omega_{m\overline{\beta}} + \omega_{\overline{m}\beta} = (Z_{\overline{m}}\ell)\theta_{\beta+1} + (Z_m\ell)\theta_{\overline{\beta+1}}, \quad \beta = 1, \dots, m-1, \tag{12}$$

$$\omega_{\mu\overline{\nu}} = \omega_{\nu\overline{\mu}}, \quad \mu = 1, \dots, m-2, \quad \nu = 2, \dots, m-1, \quad \mu+\nu \neq m. \tag{13}$$

Из (10) при $\alpha = 2, \dots, m-1$, $\beta = m+1-\alpha$ имеем $e_s^A d\lambda_A + \omega_{\alpha\,\overline{m-\alpha}} - \omega_{\alpha-1\,\overline{m+1-\alpha}} = 0$. Вычитая отсюда (9), получим рекуррентную формулу $\omega_{\alpha\,\overline{m-\alpha}} = \omega_{\alpha-1\,\overline{m+1-\alpha}} + \omega_{1\,\overline{m-1}} - (Z_{\overline{m}}\ell)\theta_1$. Применив эту формулу $m-2$ раза, начиная с $\alpha = 2$, найдем $\omega_{m-1\,\overline{1}} = (m-1)\omega_{1\,\overline{m-1}} - (m-2)(Z_{\overline{m}}\ell)\theta_1$. Пользуясь равенством $\omega_{\overline{1}\,m-1} = \omega_{1\,\overline{m-1}} - (Z_{\overline{m}}\ell)\theta_1 + (Z_m\ell)\theta_{\overline{1}}$, которое следует из (9), получим $\omega_{\alpha\,\overline{m-\alpha}} = (1-\frac{\alpha}{m})(Z_{\overline{m}}\ell)\theta_1 - \frac{\alpha}{m}(Z_m\ell)\theta_{\overline{1}}$, $\alpha = 1, \dots, m-1$. С помощью этой формулы из (9) найдем $d\lambda_A = \frac{e_s^A}{m}((Z_{\overline{m}}\ell)\theta_1 + (Z_m\ell)\theta_{\overline{1}})$. Итак,

$$d\lambda_A = \frac{e_s^A}{m_s^A}((Z_{\overline{n_s^A+m_s^A}}\ell)\theta_{n_s^A+1} + (Z_{n_s^A+m_s^A}\ell)\theta_{\overline{n_s^A+1}}), \tag{14}$$

$$Z_\alpha\ell = Z_{\overline{\alpha}}\ell = 0, \quad \alpha = n_s^A+1, \dots, n_s^A+m_s^A-1, \ \ r_A > 1, \tag{15}$$

$$\omega_{n_s^A+\alpha\,\overline{n_s^A+m_s^A-\alpha}} = (1-\frac{\alpha}{m_s^A})(Z_{\overline{n_s^A+m_s^A}}\ell)\theta_{n_s^\alpha+1} - \frac{\alpha}{m_s^A}(Z_{n_s^A+m_s^A}\ell)\theta_{\overline{n_s^A+1}}, \tag{16}$$

$$\alpha, \beta = 1, \dots, m_s^A-1, \quad s = 1, \dots, s_A, \quad A = 1, \dots, k_1, \quad r_A > 1.$$

Остальные компоненты $\omega_{\alpha\overline{\beta}}$, $\alpha, \beta \in I_s^A$, которые не могут быть получены из (14)–(16) с помощью равенств (5), (6), являются (согласно (12), (13)) 1-формами на M, связанными соотношениями

$$\omega_{n_s^A+m_s^A\,\overline{n_s^A+\beta}} + \omega_{\overline{n_s^A+m_s^A}\,n_s^A+\beta} = (Z_{\overline{n_s^A+m_s^A}}\ell)\theta_{n_s^A+\beta+1} + (Z_{n_s^A+m_s^A}\ell)\theta_{\overline{n_s^A+\beta+1}}, \tag{17}$$

$$\omega_{n_s^A+\mu\,\overline{n_s^A+\nu}} = \omega_{n_s^A+\nu\,\overline{n_s^A+\mu}}, \tag{18}$$

$$\mu = 1, \dots, m_s^A, \quad \nu = 2, \dots, m_s^A-1, \quad \mu+\nu \neq m_s^A,$$

а в остальном — произвольными.

Если λ_A — кратный базис элементарных делителей λ-матрицы $(\check{a}_{\alpha\overline{\beta}} - \lambda\check{g}_{\alpha\overline{\beta}})$, т.е. $s_A > 1$, то из (14) имеем

$$d\lambda_A = \frac{e_s^A}{m_s^A}((Z_{\overline{n_s^A+m_s^A}}\ell)\theta_{n_s^A+1} + (Z_{n_s^A+m_s^A}\ell)\theta_{\overline{n_s^A+1}}) = \frac{e_t^A}{m_t^A}((Z_{\overline{n_t^A+m_t^A}}\ell)\theta_{n_t^A+1} + (Z_{n_t^A+m_t^A}\ell)\theta_{\overline{n_t^A+1}})$$

при $s, t = 1, \dots, s_A$, $s \neq t$, следовательно,

$$d\lambda_A = 0, \quad Z_\alpha\ell = Z_{\overline{\alpha}}\ell = 0, \quad \omega_{\beta\overline{\gamma}} = 0 \tag{19}$$

при $\alpha \in I_A \equiv \cup I_s^A$, $\beta, \gamma \in I_s^A, s = 1, \dots, s_A$.

Доказана

Лемма. *Пусть (M, g, J) – келерово многообразие, a — дифференцируемая симметричная билинейная форма с приведенной характеристикой (3), определенная в области $U \subset M$ и удовлетворяющая соотношению $a(JX, JY) = a(X, Y)$ для любых векторных полей X, Y на M. Пусть $\{Z_\alpha, Z_{\overline{\alpha}}\}$, $\alpha = 1, \dots, n$, — подвижной репер в U, адаптированный в каждой точке $p \in U$ к комплексной структуре J. Тогда если форма a удовлетворяет уравнению (1), то вещественные кратные базисы элементарных делителей λ-матрицы $(\check{a}_{\alpha\overline{\beta}} - \lambda\check{g}_{\alpha\overline{\beta}})$ постоянны в U.*

2. $\alpha \in I_s^A$, $\beta \in I_t^B$ и $(A, s) \neq (B, t)$, $\lambda_A = \overline{\lambda_A}$. В этом случае $\check{a}_{\alpha\overline{\beta}} = 0$ и, полагая для удобства $n_s^A \equiv Q$, $n_t^B \equiv T$, из (4) найдем

$$(\lambda_A - \lambda_B)\omega_{\overline{T+1}\,Q+1} = (Z_{\overline{T+1}}\ell)\theta_{Q+1} + (Z_{Q+1}\ell)\theta_{\overline{T+1}}, \tag{20}$$

$$(\lambda_A - \lambda_B)\omega_{\overline{T+1}\,\alpha} + \omega_{\overline{T+1}\,\alpha-1} = (Z_{\overline{T+1}}\ell)\theta_\alpha + (Z_\alpha\ell)\theta_{\overline{T+1}}, \tag{21}$$

$$(\lambda_B - \lambda_A)\omega_{Q+1\,\overline{\beta}} + \omega_{Q+1\,\overline{\beta-1}} = (Z_{Q+1}\ell)\theta_{\overline{\beta}} + (Z_{\overline{\beta}}\ell)\theta_{\overline{T+1}}, \tag{22}$$

$$(\lambda_B - \lambda_A)\omega_{\alpha\overline{\beta}} + \omega_{\alpha\,\overline{\beta-1}} + \omega_{\overline{\beta}\,\alpha-1} = (Z_\alpha\ell)\theta_{\overline{\beta}} + (Z_{\overline{\beta}}\ell)\theta_\alpha, \tag{23}$$

где $\alpha > Q+1$, $\beta > T+1$. Если $A = B$ и, следовательно, $s \neq t$ и $s_A > 1$, то из (19)–(23) получим

$$\omega_{Q+1\,\overline{\beta-1}} = \omega_{T+1\,\overline{\alpha-1}} = 0, \quad \alpha > Q+1, \beta > T+1, \tag{24}$$

$$\omega_{\alpha\overline{\beta-1}} = \omega_{\alpha-1\,\overline{\beta}}. \tag{25}$$

Если $A \neq B$ и $m_s^A > 1$, то $Z_{Q+1}\ell = 0$ и из (20), (21) находим

$$\omega_{Q+\alpha\,\overline{T+1}} = (Z_{\overline{T+1}}\ell)\sum_{\sigma=1}^{\alpha}(\lambda_B - \lambda_A)^{\sigma-\alpha-1}\theta_{Q+\sigma}, \tag{26}$$
$$\alpha = 1,\dots,m_s^A - 1.$$

Если $r_A, r_B > 1$, то отсюда следует $\omega_{Q+\alpha\,\overline{T+1}} = 0$ при $\alpha = 1,\dots,m_s^A - 1$. Так же получаем $\omega_{Q+1\,\overline{T+\beta}} = 0$ при $\beta = 1,\dots,m_t^B - 1$. Кроме того, из (21) при $\alpha = Q + m_s^A$ имеем

$$\omega_{\overline{T+1}\,Q+m_s^A} = (\lambda_A - \lambda_B)^{-1}(Z_{Q+m_s^A}\ell)\theta_{\overline{T+1}}. \tag{27}$$

Если $r_A, r_B > 2$, то взяв в (23) $\alpha < Q+m_s^A$ и $\beta < T+m_t^B$, с помощью (15) получим рекуррентную формулу $(\lambda_B - \lambda_A)\omega_{\alpha\overline{\beta}} = \omega_{\overline{\beta-1}\,\alpha} + \omega_{\alpha-1\,\overline{\beta}}$, из которой, полагая последовательно $\alpha = Q+2,\dots,Q+m_s^A-1$ при каждом $\beta = T+2,\dots,T+m_t^B-1$, выводим $\omega_{\alpha\overline{\beta}} = 0$ в силу $\omega_{Q+1\,\overline{\beta}} = \omega_{\overline{T+1}\,\alpha} = 0$. Из (23) при $\alpha = Q+m_s^A$ и $\beta < T+m_t^B$ получим $(\lambda_A - \lambda_B)\omega_{\overline{\beta}\,Q+m_s^A} = \omega_{\overline{\beta-1}\,Q+m_s^A} + (Z_{Q+m_s^A}\ell)\theta_{\overline{\beta}}$. Отсюда, пользуясь (27), найдем

$$\omega_{\overline{T+\beta}\,Q+m_s^A} = (Z_{Q+m_s^A}\ell)\sum_{\alpha=1}^{\beta}(\lambda_A - \lambda_B)^{\alpha-\beta-1}\theta_{\overline{T+\beta}}, \tag{28}$$
$$\beta = 1,\dots,m_t^B - 1.$$

Так же выводится формула

$$\omega_{Q+\mu\,\overline{T+m_t^B}} = (Z_{\overline{T+m_t^B}}\ell)\sum_{\sigma=1}^{\mu}(\lambda_B - \lambda_A)^{\sigma-\mu-1}\theta_{Q+\mu}, \tag{29}$$
$$\mu = 1,\dots,m_s^A - 1.$$

Наконец, из (23) при $\alpha = Q + m_s^A$ и $\beta = T + m_t^B$ получим

$$\omega_{Q+m_s^A\,\overline{T+m_t^B}} = (Z_{\overline{T+m_t^B}}\ell)\sum_{\mu=1}^{m_s^A}(\lambda_B - \lambda_A)^{\mu-m_s^A-1}\theta_{Q+\mu} - (Z_{Q+m_s^A}\ell)\sum_{\nu=1}^{m_t^B}(\lambda_A - \lambda_B)^{\nu-m_t^B-1}\theta_{\overline{T+\nu}}. \tag{30}$$

3. H-проективно-эквивалентные римановы связности: комплексные корни

Методика исследования в случае комплексных корней в основном аналогична вещественному случаю. В связи с этим далее мы опускаем доказательства и приводим лишь окончательные результаты. Подробные доказательства можно найти в диссертации автора [12].

1. Пусть $\alpha, \beta \in \widetilde{I}_s^A \equiv I_s^A \cup \overset{*}{I}{}_s^A$, $\lambda_A \neq \overline{\lambda_A}$. В этом случае имеются следующие соотношения между компонентами формы связности:

$$d\lambda_A = \frac{1}{m_s^A}((Z_{\overline{n_s^A+2m_s^A}}\ell)\theta_{n_s^A+1} + (Z_{n_s^A+m_s^A}\ell)\theta_{\overline{n_s^A+m_s^A+1}}), \tag{31}$$

$$Z_{n_s^A+1}\ell = Z_{n_s^A+m_s^A-1}\ell = Z_{n_s^A+m_s^A+1}\ell = Z_{n_s^A+2m_s^A-1}\ell = 0, \tag{32}$$

$$\omega_{n_s^A+\alpha\,\overline{n_s^A+2m_s^A-\alpha}} = \Big(1 - \frac{\alpha}{m_s^A}\Big)((Z_{\overline{n_s^A+2m_s^A}}\ell)\theta_{n_s^\alpha+1} - \frac{\alpha}{m_s^A}(Z_{n_s^A+m_s^A}\ell)\theta_{\overline{n_s^A+m_s^A+1}}), \quad r_A > 1, \tag{33}$$

$$\omega_{n_s^A+\alpha\,\overline{n_s^A+\beta}} = \omega_{n_s^A+m_s^A+\alpha\,\overline{n_s^A+m_s^A+\beta}} = 0, \tag{34}$$

$$\omega_{n_s^A+m_s^A\,\overline{n_s^A+\beta}} = -\sum_{\sigma=1}^{\beta}(\lambda_A-\overline{\lambda_A})^{\sigma-\beta-1}(Z_{n^A+m_s^A}\ell)\theta_{\overline{n_s^A+\sigma}}, \tag{35}$$

$$\omega_{n_s^A+2m_s^A\,\overline{n_s^A+m_s^A+\beta}} = -\sum_{\sigma=1}^{\beta}(\overline{\lambda_A}-\lambda_A)^{\sigma-\beta-1}(Z_{n^A+2m_s^A}\ell)\theta_{\overline{n_s^A+m_s^A+\sigma}}, \tag{36}$$

$$\alpha,\beta=1,\dots,m_s^A-1,$$

$$\omega_{n_s^A+m_s^A\,\overline{n_s^A+m_s^A}} = -\sum_{\sigma=1}^{m_s^A}(\lambda_A-\overline{\lambda_A})^{\sigma-m_s^A-1}(Z_{n^A+m_s^A}\ell)\theta_{\overline{n_s^A+\sigma}}+$$

$$+\sum_{\sigma=1}^{m_s^A}(\overline{\lambda_A}-\lambda_A)^{\sigma-m_s^A-1}(Z_{\overline{n^A+m_s^A}}\ell)\theta_{n_s^A+\sigma}, \tag{37}$$

$$\omega_{n_s^A+2m_s^A\,\overline{n_s^A+2m_s^A}} = -\sum_{\sigma=1}^{m_s^A}(\overline{\lambda_A}-\lambda_A)^{\sigma-m_s^A-1}(Z_{n^A+2m_s^A}\ell)\theta_{\overline{n_s^A+m_s^A+\sigma}}+$$

$$+\sum_{\sigma=1}^{m_s^A}(\lambda_A-\overline{\lambda_A})^{\sigma-m_s^A-1}(Z_{\overline{n^A+2m_s^A}}\ell)\theta_{n_s^A+m_s^A+\sigma}. \tag{38}$$

Остальные компоненты $\omega_{\alpha\overline{\beta}}$, $\alpha,\beta\in\widetilde{I}_s^A$ являются 1-формами на M, удовлетворяющими соотношениям

$$\omega_{n_s^A+m_s^A\,\overline{n_s^A+m_s^A+\mu-1}}+\omega_{\overline{n_s^A+2m_s^A}\,n_s^A+\mu-1} = (Z_{\overline{n_s^A+2m_s^A}}\ell)\theta_{n_s^A+\mu}+(Z_{n_s^A+m_s^A}\ell)\theta_{\overline{n_s^A+\mu}}, \tag{39}$$

$$\omega_{n_s^A+\alpha\,\overline{n_s^A+m_s^A+\mu}} = \omega_{n_s^A+m_s^A+\mu\,\overline{n_s^A+\alpha}}, \tag{40}$$

$$\alpha,\mu=1,\dots,m_s^A-1, s=1,\dots,s_A, A=k_1+1,\dots,k_1+k_2\equiv k,$$

а в остальном — произвольными.

Если λ_A — кратный базис элементарных делителей λ-матрицы $(\check{a}_{\alpha\overline{\beta}}-\lambda\check{g}^{\alpha\overline{\beta}})$, $\alpha,\beta=1,\dots,n$, т.е. $s_A>1$, то из (31) имеем

$$d\lambda_A=\frac{1}{m_s^A}((Z_{\overline{n_s^A+2m_s^A}}\ell)\theta_{n_s^A+1}+(Z_{n_s^A+m_s^A}\ell)\theta_{\overline{n_s^A m_s^A+1}})=(Z_{\overline{n_t^A+2m_t^A}}\ell)\theta_{n_t^A+1}+(Z_{n_t^A+m_t^A}\ell)\theta_{\overline{n_t^A m_t^A+1}}$$

при $s,t=1,\dots,s_A$, $s\neq t$, следовательно,

$$d\lambda_A=0,\quad Z_\alpha\ell=Z_{\overline{\alpha}}\ell=0 \tag{41}$$

при $\alpha\in\widetilde{I}_A$. С помощью леммы получается

Теорема 1. *Пусть (M,g,J) – келерово многообразие, a — дифференцируемая симметричная билинейная форма с приведенной характеристикой (3), определенная в области $U\subset M$ и удовлетворяющая соотношению $a(JX,JY)=a(X,Y)$ для любых векторных полей X, Y на M. Пусть $\{Z_\alpha,Z_{\overline{\alpha}}\}$, $\alpha=1,\dots,n$, — подвижной репер в U, адаптированный в каждой точке $p\in U$ к комплексной структуре J. Тогда если форма a удовлетворяет уравнению (1), то кратные базисы элементарных делителей λ-матрицы $(\check{a}_{\alpha\overline{\beta}}-\lambda\check{g}_{\alpha\overline{\beta}})$, $\alpha,\beta=1,\dots,n$, постоянны в U.*

2. В случае $\alpha\in\widetilde{I}_s^A$, $\beta\in\widetilde{I}_t^B$ и $(A,s)\neq(B,t)$, $\lambda_A\neq\overline{\lambda_A}$, $\lambda_B\neq\overline{\lambda_B}$ можно показать [12], что соответствующие компоненты формы связности ω определяются при $A=B$ соотношениями

$$\omega_{\alpha\overline{\beta}}=0,\qquad \omega_{\mu\overline{\nu}}=0, \tag{42}$$

$$\alpha=Q+1,\dots,Q+m_s^A-1,\ \ \beta=T+m_t^B+1,\dots,T+2m_t^B-1,$$

$$\mu=Q+m_s^A+1,\dots,Q+2m_s^A-1,\ \ \beta=T+1,\dots,T+m_t^B-1.$$

$$\omega_{\overline{T+m_t^B+\beta}\,Q+m_s^A} = \sum_{\sigma=1}^{\beta}(\lambda_A - \overline{\lambda_A})^{\sigma-\beta-1}(Z_{Q+m_s^A}\ell)\theta_{\overline{T+m_t^B+\sigma}}, \tag{43}$$
$$\beta = 1,\dots,m_t^B - 1,$$

$$\omega_{Q+m_s^A+\alpha\,\overline{T+m_t^B}} = \sum_{\sigma=1}^{\alpha}(\lambda_A - \overline{\lambda_A})^{\sigma-\alpha-1}(Z_{\overline{T+m_t^B}}\ell)\theta_{Q+m_s^A+\sigma}, \tag{44}$$
$$\alpha = 1,\dots,m_s^A - 1,$$

$$\omega_{\overline{T+2m_t^B}\,Q+2m_s^A} = \sum_{\sigma=1}^{m_s^A}(\lambda_A - \overline{\lambda_A})^{\sigma-m_s^A-1}(Z_{\overline{T+m_t^B}}\ell)\theta_{Q+m_s^A+\sigma} -$$
$$- \sum_{\sigma=1}^{m_s^A}(\overline{\lambda_A} - \lambda_A)^{\sigma-m_s^A-1}(Z_{Q+m_s^A}\ell)\theta_{\overline{T+m_t^B+\sigma}}. \tag{45}$$

Если же $A \neq B$, то имеем равенства

$$\omega_{Q+\alpha\,\overline{T+1}} = (Z_{\overline{T+1}}\ell)\sum_{\sigma=1}^{\alpha}(\lambda_B - \lambda_A)^{\sigma-\alpha-1}\theta_{Q+\sigma}, \tag{46}$$
$$\alpha = 1,\dots,m_s^A - 1,$$

$$\omega_{Q+m_s^A+\alpha\,\overline{T+m_t^B+1}} = (Z_{\overline{T+m_t^B+1}}\ell)\sum_{\sigma=1}^{\alpha}(\overline{\lambda_B} - \overline{\lambda_A})^{\sigma-\alpha-1}\theta_{Q+m_s^A+\sigma}, \quad \alpha = 1,\dots,m_s^A - 1, \tag{47}$$

$$\omega_{\overline{T+\beta}\,Q+m_s^A} = (Z_{Q+m_s^A}\ell)\sum_{\sigma=1}^{\beta}(\lambda_A - \lambda_B)^{\sigma-\beta-1}\theta_{\overline{T+\sigma}}, \tag{48}$$
$$\beta = 1,\dots,m_t^B - 1,$$

$$\omega_{Q+\mu\,\overline{T+m_t^B}} = (Z_{\overline{T+m_t^B}}\ell)\sum_{\sigma=1}^{\mu}(\lambda_B - \lambda_A)^{\sigma-\mu-1}\theta_{Q+\sigma}, \tag{49}$$
$$\mu = 1,\dots,m_s^A - 1,$$

$$\omega_{Q+m_s^A\,\overline{T+m_t^B}} = (Z_{\overline{T+m_t^B}}\ell)\sum_{\sigma=1}^{m_s^A}(\lambda_B - \lambda_A)^{\sigma-m_s^A-1}\theta_{Q+\sigma} - (Z_{Q+m_s^A}\ell)\sum_{\sigma=1}^{m_t^B}(\lambda_A - \lambda_B)^{\sigma-m_t^B-1}\theta_{\overline{T+\sigma}}, \tag{50}$$

$$\omega_{\overline{T+m_t^B+\beta}\,Q+2m_s^A} = (Z_{Q+2m_s^A}\ell)\sum_{\sigma=1}^{\beta}(\overline{\lambda_A} - \overline{\lambda_B})^{\sigma-\beta-1}\theta_{\overline{T+m_t^B+\sigma}}, \tag{51}$$
$$\beta = 1,\dots,m_t^B - 1,$$

$$\omega_{Q+m_s^A+\mu\,\overline{T+2m_t^B}} = (Z_{\overline{T+2m_t^B}}\ell)\sum_{\sigma=1}^{\mu}(\overline{\lambda_B} - \overline{\lambda_A})^{\sigma-\mu-1}\theta_{Q+m_s^A+\sigma}, \tag{52}$$
$$\mu = 1,\dots,m_s^A - 1,$$

$$\omega_{Q+2m_s^A\,\overline{T+2m_t^B}} = (Z_{\overline{T+2m_t^B}}\ell)\sum_{\sigma=1}^{m_s^A}(\overline{\lambda_B} - \overline{\lambda_A})^{\sigma-m_s^A-1}\theta_{Q+m_s^A+\sigma} -$$
$$- (Z_{Q+2m_s^A}\ell)\sum_{\sigma=1}^{m_t^B}(\overline{\lambda_A} - \overline{\lambda_B})^{\sigma-m_t^B-1}\theta_{\overline{T+m_t^B+\sigma}}. \tag{53}$$

3. $\alpha \in I_s^A$, $\beta \in I_t^B$, $\lambda_A = \overline{\lambda_A}$, $\lambda_B \neq \overline{\lambda_B}$. В этом случае $\lambda_A \neq \lambda_B$, т. е. $A \neq B$ и можно показать, что компоненты $\omega_{\alpha\overline{\beta}}$ $\alpha \in I_s^A$, $\beta \in I_t^B$ формы связности ω определяются формулами (46), (48)–(50).

Отсюда следует

Теорема 2. *Пусть* (M,g,J) *и* (M,g',J') *суть два* $2n$*-мерных келеровых многообразия с общими* H*-планарными кривыми, а* ∇ *и* ∇' *— соответствующие римановы связности*

$$\nabla'_X Y = \nabla_X Y + (X\varphi)Y + (Y\varphi)X + (JX)\varphi\, JY - (JY)\varphi\, JX. \tag{54}$$

Пусть $\mathcal{G}$ *и* $\mathcal{G}'$ *— матричные функции на* M*, значения которых в каждой точке* $p \in M$ *совпадают с матрицами билинейных форм* g*,* g' *в каком-либо базисе пространства* T_pM*. Если* λ*-матрица* $e^{2\varphi}\mathcal{G}^T\mathcal{G}'^{-1}\mathcal{G} - \lambda\mathcal{G}$ *имеет в окрестности* U *произвольной точки* $p \in M$ *приведенную характеристику Сегре, определенную равенством* (3)*, и собственные значения* $\lambda_1,\dots,\lambda_k$*, то существует подвижной репер* $\{Z_\alpha, Z_{\overline{\alpha}}\}$ *в* U*, определенный теоремой* 1 *статьи* [10]*, и сопряженный к* $\{Z_\alpha, Z_{\overline{\alpha}}\}$ *корепер* $\{\theta^\alpha, \theta^{\overline{\alpha}}\}$*, относительно которых форма* ω *связности* ∇ *определяется из следующих условий:*

1) *из компонент* $\omega_{\alpha\overline{\beta}}$*,* $\alpha,\beta \in I_A$*,* $\lambda_A = \overline{\lambda_A}$ *при* $s_A = 1$ *не равны нулю только компоненты, определенные соотношениями* (16)–(22)*, где* ℓ *— функция на* M*, связанная с* φ *условиями* $a_{ij} = e^{2\phi}g'^{lm}g_{li}g_{mj}$*,* $\ell_\alpha = 2\lambda_\alpha = \overline{\ell_{\overline{\alpha}}} = 2e^{-2\phi}\phi_\nu g'^{\nu\overline{\mu}}g_{\alpha\overline{\mu}}$*, а при* $s_A > 1$ *— компоненты* $\omega_{\alpha\overline{\beta}}$ *с*
$$\alpha+\beta \geq max(n_s^A + n_t^A + m_s^A + 1, n_s^A + n_t^A + m_t^A + 1),$$
$\alpha \in I_s^A$*,* $\beta \in m_t^\alpha$*,* $s = 1,\dots,s_A$*,* $s \neq t$*, связанные условием* (25)*;*
2) *компоненты* $\omega_{\alpha\overline{\beta}}$*,* $\alpha \in I_s^A$*,* $\beta \in I_t^B$*,* $\lambda_A = \overline{\lambda_A}$*,* $\lambda_B = \overline{\lambda_B}$*,* $A \neq B$ *определяются формулами* (28)–(30)*, где* $S \equiv n_s^A$*,* $T \equiv n_t^B$*;*
3) *компоненты* $\omega_{\alpha\overline{\beta}}$*,* $\alpha,\beta \in \widetilde{I}_s^A \equiv I_s^A \cup \overset{*}{I}{}_s^A$*,* $\lambda_A \neq \overline{\lambda_A}$*, определяются формулами* (33)–(38)*;*
4) *компоненты* $\omega_{\alpha\overline{\beta}}$*,* $\alpha \in \widetilde{I}_s^A$*,* $\beta \in \widetilde{I}_t^B \equiv I_t^B \cup \overset{*}{I}{}_t^B$*,* $\lambda_A \neq \overline{\lambda_A}$*,* $\lambda_B \neq \overline{\lambda_B}$*, определяются формулами* (42)–(45) *при* $A = B$ *и формулами* (46)–(53) *при* $A \neq B$*, где* $Q = m_s^A$*,* $T = m_t^B$*;*
5) *компоненты* $\omega_{\alpha\overline{\beta}}$*,* $\alpha \in I_s^A$*,* $\beta \in \widetilde{I}_t^B$*,* $\lambda_A = \overline{\lambda_A}$*,* $\lambda_B \neq \overline{\lambda_B}$*, определяются формулами* (46)*,* (48)–(50)*.*

Форма ω' *связности* ∇' *определяется равенством* (54)*. Если, в частности,* $\ell = \mathrm{const}$*, то* $\omega = \omega'$*, т. е. связности* ∇ *и* ∇' *совпадают.*

Наоборот, если в окрестности каждой точки $p \in M$ существует репер, адаптированный комплексной структуре на M, в котором матрицы G, A имеют канонический вид, определенный теоремой 1 (см. [10]), и выполняются условия 1)–5) сформулированной теоремы 2, то метрики g и g' имеют общие H-планарные кривые, т. е. римановы связности ∇ и ∇' H-проективно эквивалентны.

Литература

1. Аминова А.В., Калинин Д.А. *H-проективно-эквивалентные четырехмерные римановы связности* // Изв. вузов. Математика. – 1994. – № 8. – С. 11–20.
2. Aminova A.V., Kalinin D.A. *Quantization of Kähler manifolds admitting H-projective mappings* // Tensor. – 1995. – V. 56. – P. 1–11.
3. Домашев В.В., Микеш Й. *К теории голоморфно-проективных отображений келеровых пространств* // Матем. заметки. – 1978. – Т. 23. – С. 297–303.
4. Kalinin D.A. *H-projectively equivalent Kähler manifolds and gravitational instantons* // Nihonkai. Math. J. – 1998. – V. 9. – № 2. – P. 132–147.
5. Синюков Н.С. *Геодезические отображения римановых пространств.* – М.: Наука, 1979. – 256 с.
6. Петров А.З. *К теореме о главных осях тензора* // Изв. физ.-матем. о-ва при Казанск. ун-те. – 1949. – Т. 14. – С. 37–51.
7. Aminova A.V. *On skew-orthonormal frame and parallel symmetric bilinear form on Riemannian manifold* // Tensor. – 1987. – V. 45. – P. 1–13.

8. Аминова А.В. *Псевдоримановы многообразия с общими геодезическими* // УМН. – 1993. – Т. 48. – С. 107–159.
9. Аминова А.В. *Проективно-эквивалентные римановы связности* // Изв. вузов. Математика. – 1992. – № 6. – С. 21–32.
10. Калинин Д.А. *Приведение к каноническому виду пары эрмитовых форм* // Изв. вузов. Математика. – 1998. – № 10. – С. 53–59.
11. Кобаяси Ш., Номидзу К. *Основы дифференциальной геометрии.* Т. 2. – М.: Наука, 1981. – 416 с.
12. Калинин Д.А. *Геометрия квантовых систем с келеровой структурой*: Дисс. ... канд. физ.-матем. наук. – Казань, 1996. – 144 с.

Казанский государственный
университет

Поступила
05.07.1996