

УДК 519.6:532.546

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЫТЕСНЕНИЯ ВЫСОКОВЯЗКОЙ НЕФТИ ВОДОЙ ПРИ НЕЛИНЕЙНОМ ЗАКОНЕ ФИЛЬТРАЦИИ

В.Д. Слабнов¹, Р.А. Султанов

¹Казанский инновационный университет имени В.Г. Тимирязева (ИЭУП),
г. Казань, 420111, Россия

Аннотация

Рассмотрена фильтрация двух несмешивающихся жидкостей (нефть и вода) в плоском недеформируемом пласте, эксплуатируемом системой вертикальных и горизонтальных скважин, когда движение нефти соответствует закону фильтрации с предельным градиентом, а воды – закону Дарси. Приведен метод численного определения давления и нефтенасыщенности в области двухфазной фильтрации и соответствующие разностные аналоги. Проведен анализ вытеснения высоковязкой нефти водой в элементе пятиточечной системы заводнения для трех видов неоднородности: зональной, существенной и слоистой. Исследовано также влияние величины предельного градиента сдвига на основные технологические показатели добычи неньютоновской нефти.

Ключевые слова: двухфазная фильтрация, численное моделирование, нелинейный закон фильтрации, предельный градиент, пятиточечный элемент заводнения, слоистый пласт

Введение

Перспективы добычи нефти в Республике Татарстан связаны с повышением эффективности разработки месторождений с высоковязкими нефтями, обладающими неньютоновскими свойствами [1, 2]. На стадиях составления уточненных проектов разработки, анализа, контроля и регулирования процесса разработки необходимы гидродинамические расчеты, позволяющие отобразить в деталях сложную картину обводнения скважин и процесса выработки продуктивного неоднородного пласта, а именно изменения во времени нефтенасыщенности по площади залежи, определять текущую и конечную нефтеотдачу. При моделировании заводнения нефтяного пласта, неоднородного по площади и толщине, в настоящее время широко применяются двумерные или трехмерные модели двухфазной фильтрации, позволяющие с хорошей точностью описывать распределение по площади или толщине залежи нефтенасыщенности, пластового давления, а также средние по его толщине скорости движения фильтрующихся фаз [3]. Чаще всего для этих целей используется модель Баклея–Левретта, в которой не учитываются гравитационные и капиллярные эффекты, сжимаемость породы и фильтрующихся фаз.

Цель настоящей работы – провести анализ вытеснения высоковязкой нефти водой в плоском недеформируемом пласте для трех видов распределения коэффициента абсолютной проницаемости, а также исследовать влияние величины предельного градиента сдвига на основные технологические показатели добычи неньютоновской нефти.

1. Постановка задачи

Фильтрация двух несмешивающихся жидкостей (индексами «н» и «в» обозначены характеристики соответственно нефти и воды) в плоском недеформируемом пласте, эксплуатируемом системой вертикальных и горизонтальных скважин, когда движение нефти соответствует закону фильтрации с предельным градиентом [3–5], а воды – закону Дарси, описывается следующей известной системой уравнений в частных производных относительно распределения давления $p = p(x, y, t)$ и нефтенасыщенности $\tilde{s} = \tilde{s}(x, y, t)$:

$$\operatorname{div} \vec{V} = \tilde{q}, \tag{1}$$

$$\operatorname{div}(\Phi \vec{V} H) = mH \frac{\partial \tilde{s}}{\partial t}, \tag{2}$$

$$\tilde{s}_n + \tilde{s}_v = 1$$

с учетом краевых условий

$$\left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_{\Gamma} = 0, \quad \tilde{s}|_{t=t_0} = s^*, \quad \tilde{q} = \int_{\gamma_l} \tilde{\sigma}(\tilde{s}) \frac{\partial p}{\partial n} d\gamma, \quad l \in N, \tag{3}$$

где

$$\vec{V} = \vec{V}_n + \vec{V}_v = -\tilde{\sigma}(\tilde{s}) \nabla p, \quad \vec{V}_n = -\frac{k_a}{\mu_n} k_n(\tilde{s}) \psi_n \nabla p, \quad \vec{V}_v = -\frac{k_a}{\mu_v} k_v(\tilde{s}) \nabla p,$$

$$\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}(x, y, \tilde{s}) = k_a(x, y) (k_n(\tilde{s}) \psi_n / \mu_n + k_v(\tilde{s}) / \mu_v), \quad \Phi(\tilde{s}) = k_a(x, y) k_n(\tilde{s}) \psi_n / (\mu_n \tilde{\sigma}),$$

$$\psi_n = \begin{cases} 0, & |\nabla p| \leq G, \\ 1 - G/|\nabla p|, & |\nabla p| > G, \end{cases} \tag{4}$$

\vec{V} – вектор суммарной усредненной скорости фильтрации, \tilde{q} – усредненный дебит скважины, $\tilde{\sigma}$ – суммарная усредненная проводимость пласта, Ψ_n – градиент сдвига для нефти, G – предельное значение градиента сдвига, m – пористость, $\Phi(\tilde{s})$ – усредненная доля нефти в потоке жидкости, H – толщина пласта, $k_a(x, y)$ – абсолютная проницаемость пласта, $k_n(\tilde{s})$ ($k_v(\tilde{s})$) – относительная фазовая проницаемость нефти (воды), μ_n (μ_v) – вязкость нефти (воды); N – множество номеров скважин.

2. Метод решения

Численный метод интегрирования системы (1), (2) основан на раздельном определении давления и нефтенасыщенности для некоторого времени t . Разностные аппроксимации уравнений строятся аналогично работам [6, 7].

При решении краевой задачи (1)–(3) возникают значительные трудности в моделировании процесса вытеснения нефти водой. Действительно, из условия (4) видно, что уравнение (1) может вырождаться в области с заранее неизвестной границей. Для расчета плоских задач теории стационарной нелинейной фильтрации в [8, 9] был применен полуаналитический метод, использующий преобразование годографа наряду с прямыми вариационными методами. Другой возможный подход, предложенный в [10], заключается в регуляризации исходной задачи – мы регуляризуем функцию ψ_n (4) функцией $\psi_{n\varepsilon}$:

$$\psi_{n\varepsilon} = \begin{cases} \varepsilon, & |\nabla p| \leq G/(1 - \varepsilon), \\ 1 - G/|\nabla p|, & |\nabla p| > G/(1 - \varepsilon), \end{cases} \tag{5}$$

где ε – малый положительный параметр. Возникающая при этом корректно поставленная краевая задача решается численно с использованием метода мажорирующего оператора.

В качестве мажорирующего оператора для уравнения (1) берется следующий [6, 9]:

$$Kp_{i,j} = \Delta\sigma\Delta p - a_{i,j}p_{i,j},$$

где

$$\begin{aligned}\Delta\sigma\Delta p &= \Delta_{i+1/2}\sigma_x\Delta_{i+1}p\Delta x^2 + \Delta_{j+1/2}\sigma_y\Delta_{j+1}p\Delta y^2, \\ a_{i,j} &= 2\pi\sigma_{i,j}k_{i,j}/[\Delta x\Delta y\ln(R/r_c)],\end{aligned}$$

$(i, j) \in (x_l, y_l)$, $k_{i,j}$ – доля общей производительности скважины, приходящейся на рассматриваемый элемент системы заводнения, R – эффективный радиус, r_c – радиус скважины.

Очевидно, что мажорирующий оператор K является «каркасом» для обращаемого оператора Λ : $\Lambda p_{i,j} = \Delta\sigma_H\psi_{H\varepsilon}\Delta p + \Delta\sigma_B\Delta p + I_{i,j}$. Если ячейка (i, j) содержит скважину, то функция $I_{i,j}$ вычисляется по формулам $I_{i,j} = Q_{i,j}^n \pm a_{i,j}^n\Phi_{i,j}^n$ (если задан расход) или $I_{i,j} = a_{i,j}^n(p_{i,j}^n - p_{3i,j}^n \mp G^*\Phi_{i,j}^n)$ (если задано забойное давление). В противном случае $I_{i,j}^n = 0$.

Для определения поля давления p используется следующий итерационный процесс, сходящийся в метрике $W^{(1)}$ к обобщенному решению уравнения (1) с регуляризованной функцией $\psi_{H\varepsilon}$ (5):

$$Kp_{i,j}^{n+1} = Kp_{i,j}^n - \omega\Lambda p_{i,j}^n, \quad p_{i,j}^0 = p_{i,j}^{n-1}, \quad (6)$$

где ω – итерационный параметр. Для заданной точности ε при выполнении условия $\|Kp_{i,j}^{n+1} - Kp_{i,j}^n\| < \varepsilon$ итерации (6) прекращаем и полагаем $p_{i,j}^n = Kp_{i,j}^{n+1}$.

Уравнение для нефтенасыщенности интегрируем точно так же, как и в случае ньютоновских нефтей. В этом случае разностный аналог уравнения (2) имеет вид

$$\Delta(V\Phi)\Delta p + I_{si,j} = mH_{i,j} [s_{i,j}^{n+1} - s_{i,j}^n] / \Delta t, \quad (7)$$

где $I_{si,j}^n = (Q_{i,j}^n(p_{i,j}^n \pm a_{i,j}^n G^* \Phi_{i,j}^n) \Phi_{i,j}^n)$ (при задании расхода) и $I_{si,j}^n = [a_{i,j}^n (p_{i,j}^n - p_{3i,j}^n \mp G^* \Phi_{i,j}^n)] \Phi_{i,j}^n$ (при задании забойного давления), если ячейка (i, j) содержит скважину, иначе $I_{si,j}^n = 0$. В приведенных выражениях верхний арифметический знак – для добывающей скважины, нижний арифметический знак – для нагнетательной скважины, $G^* = G(R - r_c) / \delta p$, $R = (h_x h_y / \pi)^{1/2}$.

Разностный аналог (7) с использованием метода Эйлера решается по схеме «уголок». Таким образом, система уравнений (1), (2) решается IMPES-методом, то есть неявным по давлению (методом переменных направлений со стандартным набором оптимальных параметров) и явным по насыщенности. Сама схема расчета является монотонной, полностью консервативной и условно устойчивой. Для обеспечения устойчивости расчета значения доли нефти на границах ячеек берутся вверх по потоку [7, 11].

3. Результаты численного моделирования

Методом, описанным выше, решен ряд задач о вытеснении неьютоновской нефти в рамках двумерной модели двухфазной фильтрации в неоднородных по площади и толщине пластах. При моделировании неоднородных пластов предполагались непроницаемыми их кровля и подошва. Неоднородность по площади моделировалась в виде зональной однородности в области фильтрации некоторой скважины (зональная неоднородность) или восстановлением абсолютной проницаемости сплайн-интерполяцией по всей области фильтрации D по известным ее

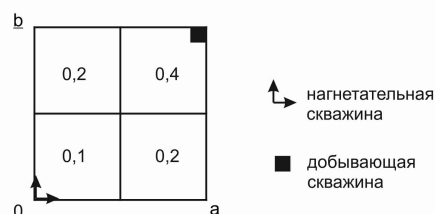


Рис. 1. Элемент заводнения слоистого пласта и распределение коэффициента абсолютной проницаемости в области двухфазной фильтрации

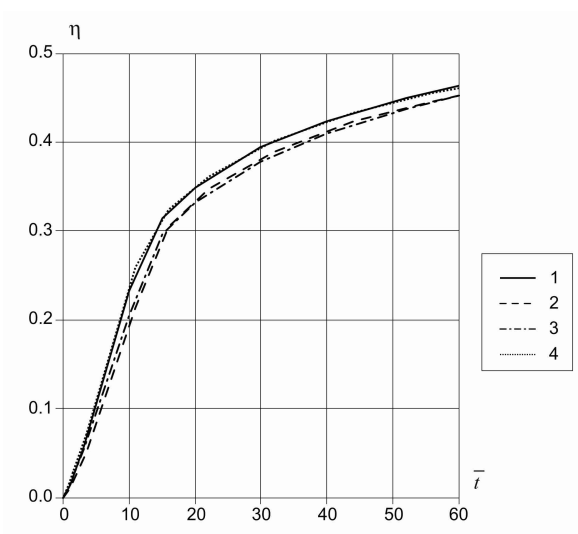


Рис. 2. Графики 1–4 зависимости коэффициента нефтеотдачи η от значений безразмерного времени \bar{t}

значениям в ячейках (x_l, y_l) введенных в эксплуатацию скважин (существенная неоднородность). Средняя интегральная проницаемость по области фильтрации для двух способов моделирования неоднородности принимала одно и то же значение. Гидродинамические расчеты для неоднородных пластов сравнивались с расчетами для однородного пласта со средней интегральной проницаемостью неоднородного. Решение задач о вытеснении неньютоновской нефти сравнивалось с решением о вытеснении ньютоновской нефти. Исследовалось влияние задания предельного градиента сдвига на основные технологические показатели добычи неньютоновской нефти. Относительные фазовые проницаемости те же, что и в [12].

Математическое моделирование процесса заводнения неоднородного пласта прямоугольной конфигурации $D = \{0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$ с нефтью, следующей закону с предельным градиентом сдвига; предполагается, что пласт вскрыт элементом пятиточечной системы заводнения, осуществлялось с помощью вычислительных экспериментов для следующих данных: $a = b = 750$ м; $H = 5$ м; $m = 0.2$; $\mu_n = 20$ мПа·с; $\mu_b = 1$ мПа·с; $G = 0.06$ (0.01) атм/м; средняя интегральная $k_a = 0.255$ мкм²; $s_* = 0.2$; $s^* = 0.7$; $r_c = 0.1$ м; $n = 2$; область фильтрации покрыта разностной сеткой из 15×15 узлов. На рис. 1 показаны размещение скважин в пятиточечном элементе заводнения и распределение абсолютной проницаемости в зонально-неоднородном пласте.

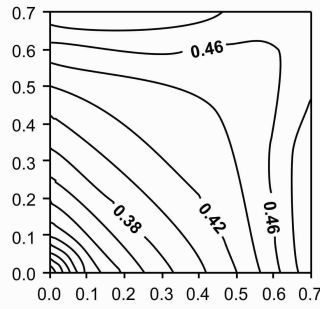


Рис. 3. Распределение изосат 0.2–0.5 на момент времени $\bar{t} = 30$ в зонально-неоднородном пласте

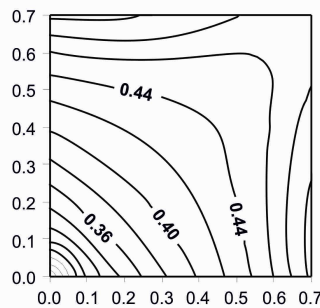


Рис. 4. Распределение изосат 0.2–0.5 на момент времени $\bar{t} = 30$ в однородном пласте

На рис. 2 показана динамика коэффициента нефтеотдачи η (доля извлеченной нефти по отношению к начальным ее запасам в пласте) от значений безразмерного времени \bar{t} . Графики 1–3 являются показателями вытеснения неньютоновской нефти в существенно-неоднородном, зонально-неоднородном и однородном пластах соответственно, график 4 – показатель вытеснения ньютоновской (обычной) нефти в зонально-неоднородном пласте. Из сравнения графиков 1–4 видно, что, во-первых, показатели извлечения неньютоновской нефти при прочих равных условиях хуже, чем ньютоновской (графики 2 и 4), что связано с ее реологическими свойствами; во-вторых, чем неоднороднее пласт, тем лучше показатели извлечения неньютоновской нефти (графики 1–3) для пятиточечного элемента заводнения. Это, по-видимому, связано с формой застойных зон. На начальной стадии вытеснения движение фронта близко к круговому. Движение неньютоновской нефти после прорыва вытесняющей жидкости в добывающую скважину происходит в основном в узкой области, прилегающей к прямой линии тока, соединяющей нагнетательную и добывающую скважины. Это хорошо видно из распределения изосат 0.2–0.5 для значения времени $\bar{t} = 30$ в зонально-неоднородном (рис. 3) и однородном (рис. 4) пластах.

Как и в первых двух случаях (зонально-неоднородный и однородный пласты), движение неньютоновской нефти в существенно-неоднородном пласте происходит в узкой области. Однако здесь вследствие несимметричного распределения значений коэффициента абсолютной проницаемости по области фильтрации D отсутствует прямая линия тока. Ее заменяет линия тока, изогнутая в сторону области высокой проницаемости неоднородного пласта, что хорошо видно из распределения изосат

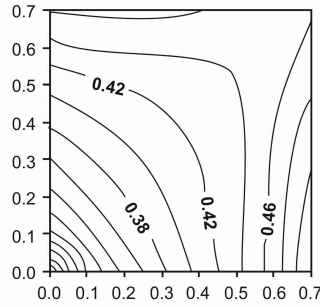


Рис. 5. Распределение изосат 0.2–0.5 на момент времени $\bar{t} = 30$ в существенно-неоднородном пласте

Табл. 1

Варианты распределения абсолютной проницаемости в слоистом пласте

	i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	k_{ai}	0.055	0.105	0.155	0.205	0.255	0.305	0.355	0.405	0.455
1	$\alpha_i^{(1)}$	1/9	2/9	3/9	4/9	5/9	6/9	7/9	8/9	1
2	$\alpha_i^{(2)}$	0.05	0.45	0.75	0.85	0.90	0.94	0.97	0.99	1
	k_{ai}	0.060	0.085	0.110	0.135	0.160	0.185	0.210	0.235	0.260
3	$\alpha_i^{(3)}$	1/9	2/9	3/9	4/9	5/9	6/9	7/9	8/9	1

0.2–0.5 для значения времени $\bar{t} = 30$ (рис. 5). Вытеснение нефти от нагнетательной к добывающей скважине в пятиточечном элементе заводнения (см. рис. 1) идет более интенсивно через левый верхний угол области фильтрации D , чем через ее правый нижний угол. Данная картина вытеснения объясняется наличием в левом верхнем углу более высокой абсолютной проницаемости. Этот факт объясняет и лучшее извлечение нефти в существенно-неоднородном пласте по сравнению с зонально-неоднородным и однородным (график 1 по сравнению с графиками 2 и 3 на рис. 2).

В случае слоистого пласта предполагается, что абсолютная проницаемость задана ступенчатой функцией распределения или гистограммой. Использование абсолютной проницаемости как случайной величины обусловлено тем, что замеры коллектора в разных скважинах нередко показывают не только различное количество слоев, но и разное их расположение по вертикали, то есть предполагается, что абсолютная проницаемость расположена по вертикали хаотично. В этом случае система уравнений двухфазной фильтрации усредняется по толщине пласта, то есть трехмерная модель пласта сводится к двумерной. При этом вводятся «фиктивные», или модифицированные фазовые проницаемости, учитывающие разброс абсолютной проницаемости по толщине пласта. Для их построения был использован тот же подход, что и в [12, 13].

Пусть k_{ai} , $i = 1, 2, \dots, 9$, – значения, которые может принимать случайная величина k_a , $\alpha_i^{(j)}$ – накопленная относительная частота для i -го значения абсолютной проницаемости k_a в j -м варианте, $j = 1, 2, 3$.

Функция распределения случайной величины k_a для трех вариантов представлена в табл. 1.

Математическое ожидание $M(k_a)$ и дисперсия $D(k_a)$ для трех вариантов табл. 1 приведены в табл. 2.

На рис. 6 показана динамика коэффициента текущей нефтеотдачи η от значений безразмерного времени \bar{t} для трех вариантов моделирования слоисто-неодно-

Табл. 2
Математическое ожидание и дисперсия для
трех вариантов распределения абсолютной
проницаемости в слоистом пласте

№	1	2	3
$M(k_a)$	0.255	0.160	0.160
$D(k_a)$	0.0166	0.0064	0.0041

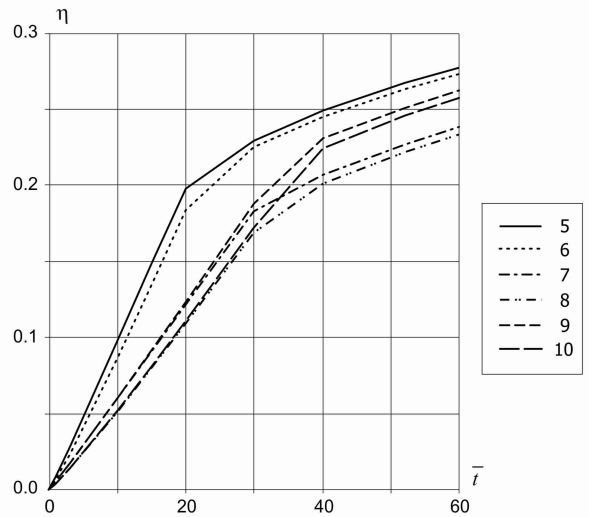


Рис. 6. Графики 5–10 зависимости коэффициента нефтеотдачи η от значений безразмерного времени \bar{t}

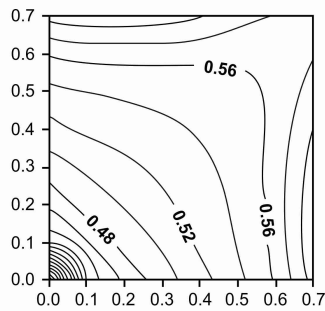


Рис. 7. Распределение изосат 0.2–0.5 на момент времени $\bar{t} = 30$ в слоистом пласте с $M(k_a) = 0.255$ и $D(k_a) = 0.0166$

родного пласта. Графики 5, 6 соответствуют варианту 1, графики 7, 8 – варианту 2, графики 9, 10 – варианту 3 функции распределения случайной величины k_a в слоистом пласте, которые представлены в табл. 1. Графики 6, 8, 10 являются показателями вытеснения неньютоновской нефти в слоистом пласте для пятиточечного элемента заводнения, графики 5, 7, 9 – ньютоновской (обычной) нефти при прочих равных условиях соответственно. Из сравнения графиков 5–10 видно ухудшение показателей извлечения неньютоновской нефти по сравнению с ньютоновской, что полностью подтверждается выводами при анализе рис. 2.

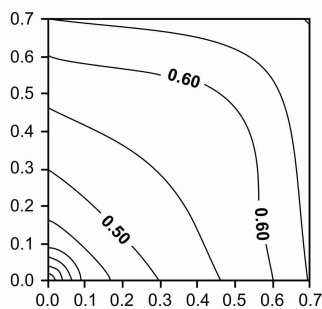


Рис. 8. Распределение изосат 0.2–0.5 на момент времени $\bar{t} = 30$ в слоистом пласте с $M(k_a) = 0.160$ и $D(k_a) = 0.0064$

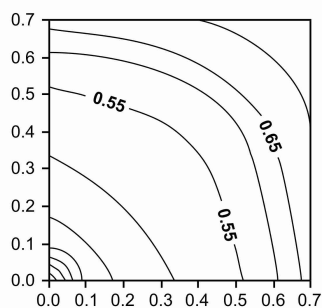


Рис. 9. Распределение изосат 0.2–0.5 на момент времени $\bar{t} = 30$ в слоистом пласте с $M(k_a) = 0.160$ и $D(k_a) = 0.0041$

На основании анализа данных табл. 1, 2 и графиков рис. 6, 7, 9 можно предположить, что на динамику коэффициента нефтеотдачи η и скорость фильтрации нефти существенное влияние оказывает неоднородность слоистого пласта по толщине, моделируемая значениями математического ожидания (графики 5, 6 в сравнении с графиками 9, 10 на рис. 6 и распределение изосат на рис. 7 в сравнении с изосатами на рис. 9) и дисперсии случайной величины k_a , показывающей средний разброс значений случайной величины относительно своего математического ожидания (графики 7, 8 в сравнении с графиками 9, 10 на рис. 6). Действительно, распределения, соответствующие вариантам 2, 3 табл. 2, имеют одинаковое значение математического ожидания, но разные значения дисперсии. При этом значение дисперсии в варианте 2 больше, чем в варианте 3, что указывает на большую неоднородность слоистого пласта по его толщине. Максимальная разница нефтеотдачи в 2.4% достигается для значений $\bar{t} \in [40, 60]$. Это можно объяснить функцией распределения случайной величины k_a вариантов 2, 3 и, как следствие этого, видом модифицированных фазовых проницаемостей, влияющих на скорость фильтрации нефти и воды в пласте. Разница нефтеотдачи хорошо видна из распределения изосат 0.2–0.6 при значениях $\bar{t} = 30$ в слоисто-неоднородном пласте для вариантов 2 (рис. 8) и 3 (рис. 9).

Заключение

Результаты математического моделирования показали, что на начальной стадии вытеснения движение фронта близко к круговому. Движение неньютоновской нефти после прорыва вытесняющей жидкости в добывающую скважину происходит в основном в узкой области, прилегающей к прямой линии тока, соединяющей нагнетательную и добывающую скважины. Динамика коэффициента текущей нефтеотдачи зависит от свойства вытесняемой жидкости, распределения абсолютной проницаемости по области фильтрации и задания ограничений на эксплуатацию действующих добывающих и нагнетательных скважин.

Литература

1. Христианович С.А. Движение грунтовых вод, не следующих закону Дарси // Прикл. матем. и механика. – 1940. – Т. 4, Вып. 1. – С. 33–52.
2. Бернадинер М.Г., Ентов В.М. О вытеснении несмешивающихся жидкостей при нелинейной фильтрации // Прикл. механика и техн. физика. – 1968. – № 2. – С. 15–17.
3. Максимов В.М., Дмитриев Н.М., Мамедов М.Т. Нелинейные законы фильтрации с предельным градиентом // Газовая промышленность. – 2009. – № 11. – С. 38–40.
4. Дмитриев Н.М., Максимов В.М., Мамедов М.Т. Законы фильтрации с предельным градиентом в анизотропных пористых средах // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. – 2010. – № 2. – С. 64–71.
5. Халимов Э.М., Леви Б.И., Дзюба В.И., Пономарев С.А. Технология повышения нефтеотдачи пластов. – М.: Недра, 1984. – 271 с.
6. Леви Б.И., Санкин В.М. Численные решения трехмерных задач двухфазной неизо-термической фильтрации ньютоновских и неньютоновских жидкостей // Численные методы механики сплошной среды. – Новосибирск: СО АН СССР, 1977. – № 5. – С. 115–119.
7. Азиз Х., Сеттари Э. Математическое моделирование пластовых систем. – М.: Недра, 1982. – 407 с.
8. Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. – М.: Недра, 1984. – 211 с.
9. Бадриев И.Б., Задворнов О.А., Исмагилов Л.Н., Скворцов Э.В. Решение плоских задач фильтрации при многозначном законе фильтрации и наличии точечного источника // Прикл. матем. и механика. – 2009. – Т. 73, Вып. 4. – С. 604–614.
10. Розенберг М.Д., Кундин С.А. Многофазная многокомпонентная фильтрация. – М.: Недра, 1976. – 312 с.
11. Волков Ю.А., Слабнов В.Д. О методах гидродинамического расчета процесса разработки в системе скважин // Математическое моделирование процессов фильтрации и оптимизации нефтедобычи. – Казань, 1989. – С. 5–12.
12. Слабнов В.Д., Султанов Р.А. К задаче регулирования текущей нефтеотдачи в слоистом пласте // Вопросы математического моделирования процессов фильтрации и рациональной разработки нефтяных месторождений. – Казань, 1989. – С. 44–48.
13. Султанов Р.А. Новый подход к построению фиктивных фазовых проницаемостей в условиях двухфазной фильтрации // Оптимизация нефтедобычи и вопросы подземной гидромеханики. – Казань, 1987. – С. 106–109.

Поступила в редакцию
09.09.14

Слабнов Виктор Дмитриевич, кандидат физико-математических наук, доцент
Казанский инновационный университет имени В.Г. Тимирязова (ИЭУП)
ул. Московская, д. 42, г. Казань, 420111, Россия
E-mail: slabnov@ieml.ru

Султанов Рустем Анварович, кандидат физико-математических наук, доцент.

ISSN 1815-6088 (Print)

ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)
2016, vol. 158, no. 2, pp. 276–286

**Numerical Simulation of High Viscosity Oil Displacement
by Water Following Non-Linear Filtration Law**

V.D. Slabnov^{a*}, *R.A. Sultanov*

^a*Kazan Innovative University named after V. G. Timiryasov (IEML), Kazan, 420111 Russia*

E-mail: *slabnov@ieml.ru

Received September 9, 2014

Abstract

The non-linear filtration law with a limiting gradient of two immiscible fluids (oil and water) into a flat warp-free layer exploited by horizontal and vertical wells is investigated. The method for numerical determination of pressure and oil saturation and the corresponding difference analogues are considered. The analysis of high viscosity oil displacement by water in the five-point waterflooding element for three types of heterogeneity (zonal, with spline-interpolation application, and laminated) is carried out. The influence of the displacement limiting gradient on the basic technological characteristics of non-Newtonian oil production is studied. The results of the mathematical simulation show that the front movement at the initial stage of displacement is close to circular. The movement of non-Newtonian oil after the displacing fluid breakthrough into the producing well occurs mainly in a narrow area close to the straight current line connecting the producing and pressure wells. The dynamics of the current oil recovery coefficient depends on the properties of the displaced fluid, absolute permeability distribution in the filtration area, and set of limitations to exploitation of the operating producing and pressure wells.

Keywords: two-phase filtration, numerical simulation, non-linear filtration law, limiting gradient, five-point waterflooding element, laminated layer

Figure captions

Fig. 1. The waterflooding element of the laminated layer and the absolute permeability distribution in the area of two-phase filtration.

Fig. 2. Diagrams 1–4 showing the dependence of the oil recovery coefficient η on the non-dimensional time \bar{t} .

Fig. 3. The distribution of 0.2–0.5 isosates at the time $\bar{t} = 30$ in the zonally inhomogeneous layer.

Fig. 4. The distribution of 0.2–0.5 isosates at the time $\bar{t} = 30$ in the homogeneous layer.

Fig. 5. The distribution of 0.2–0.5 isosates at the time $\bar{t} = 30$ in the substantially inhomogeneous layer.

Fig. 6. Diagrams 5–10 showing the dependence of the oil recovery coefficient η on the non-dimensional time \bar{t} .

Fig. 7. The distribution of 0.2–0.5 isosates at the time $\bar{t} = 30$ in the laminated layer with $M(k_a) = 0.255$ and $D(k_a) = 0.0166$.

Fig. 8. The distribution of 0.2–0.5 isosates at the time $\bar{t} = 30$ in the laminated layer with $M(k_a) = 0.160$ and $D(k_a) = 0.0064$.

Fig. 9. The distribution of 0.2–0.5 isosates at the time $\bar{t} = 30$ in the laminated layer with $M(k_a) = 0.160$ and $D(k_a) = 0.0041$.

References

1. Khristianovich S.A. The motion of ground waters not obeying Darcy's law. *Prikl. Mat. Mekh.*, 1940, vol. 4, no. 1, pp. 33–52. (In Russian)
2. Bernadiner M.G., Entov V.M., Displacement of immiscible liquids in nonlinear filtration. *Prikl. Mekh. Tekh. Fiz.*, 1968, no. 3, pp. 15–17. (In Russian)
3. Maksimov V.M., Dmitriev N.M., Mamedov M.T., Nonlinear filtration laws with a limiting gradient. *Gazov. Prom-st.*, 2009, no. 11, pp. 38–40. (In Russian)
4. Dmitriev N.M., Maksimov V.M., Mamedov M.T. Laws of flow with a limiting gradient in anisotropic porous media. *Fluid Dyn.*, 2010, vol. 45, no. 2, pp. 223–229.
5. Khalimov E.M., Levi B.I., Dzyuba V.I., Ponomarev C.A. A Technology of Enhanced Oil Recovery. Moscow, Nedra, 1984, 271 p. (In Russian)
6. Levi B.I., Sankin V.M. Numerical solutions of three-dimensional problems for two-phase non-isothermic filtration of Newtonian and non-Newtonian liquids. *Chislennyye Metody Mekh. Sploshnoi Sredy*, Novosibirsk, Sib. Otd. Akad. Nauk SSSR, 1977, no. 5, pp. 115–119. (In Russian)
7. Aziz Kh., Settari E. Mathematical Modeling of Seam Systems. Moscow, Nedra, 1982. 407 p. (In Russian)
8. Barenblatt G.I., Entov V.M., Ryzhik V.M. Motion of Liquids and Gases in Porous Strata. Moscow, Nedra, 1984. 211 p. (In Russian)
9. Badriev I.B., Zadvornov O.A., Ismagilov L.N., Skvortsov E.V. Solving flat filtration problems following the multivalued filtration law and in the presence of a point source, *Prikl. Mat. Mekh.*, 2009, vol. 73, no. 4, pp. 604–614.
10. Rozenberg M.D., Kundin S.A. Multiphase Multicomponent Filtration. Moscow, Nedra, 1976. 312 p. (In Russian)
11. Volkov Yu.A., Slabnov V.D. On the methods of hydrodynamical calculation of the development process in the system of wells. *Matematicheskoe modelirovanie protsessov fil'tratsii i optimizatsii nefte dobychi* [Mathematical Modelling of Filtration and Optimization Processes during Oil Extraction]. Kazan, 1989, pp. 5–12. (In Russian)
12. Slabnov V.D., Sultanov R.A. On the problem of controlling the current oil recovery in the stratified layer. *Voprosy matematicheskogo modelirovaniya protsessov fil'tratsii i ratsional'noi razrabotki neftyanykh mestorozhdenii* [Problems of Mathematical Modelling of Filtration Processes and Rational Development of Oil Fields]. Kazan, 1989, pp. 44–48. (In Russian)
13. Sultanov R.A. A new approach to construction of fictive phase permeabilities under the conditions of two-phase filtration. *Optimizatsiya nefte dobychi i voprosy podzemnoi gidromekhaniki* [Optimization of Oil Extraction and Problems of Subsurface Hydromechanics]. Kazan, 1987, pp. 106–109. (In Russian)

⟨ **Для цитирования:** Слабнов В.Д., Султанов Р.А. Численное моделирование вытеснения высоковязкой нефти водой при нелинейном законе фильтрации // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2016. – Т. 158, кн. 2. – С. 276–286. ⟩

⟨ **For citation:** Slabnov V.D., Sultanov R.A. Numerical simulation of high viscosity oil displacement by water following non-linear filtration law. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2016, vol. 158, no. 2, pp. 276–286. (In Russian) ⟩