ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 10 (485)

УДК 517.547

Л.А. АЙЗЕНБЕРГ, И.Б. ГРОССМАН, Ю.Ф. КОРОБЕЙНИК

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ О РАДИУСЕ БОРА ДЛЯ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

1°. Классический результат Х. Бора [1], который в окончательную форму привели М. Рисс, И. Шур и Ф. Винер, состоит в следующем: если ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \tag{1}$$

сходится в единичном круге и его сумма в этом круге по модулю меньше 1, то в круге $\{z : |z| < \frac{1}{3}\}$ верно неравенство $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |c_k z^k| < 1$, причем константа $\frac{1}{3}$ не может быть улучшена. В [2] был приведен другой вариант феномена Бора: если сумма ряда (1) $f(z)$ имеет в единичном круге положительную вещественную часть и $f(0) > 0$, то

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_k z^k| < 2f(0) \tag{2}$$

в круге $\{z : |z| < \frac{1}{3}\}$. При этом константа $\frac{1}{3}$ в неравенстве (2) также не может быть улучшена. Если $f(z)$ есть сумма ряда (1), то определим $Mf(z) := \sum\limits_{k=0}^{\infty} |c_k| z^k$ и мажорантную функцию $Mf(r)$. В [3] поставлена проблема определения величины $\sup\limits_{f\in B_1} \inf\limits_{0<r<1} \frac{Mf(r)}{r} := A$, где B_1 — класс всех функций $f(z)$, аналитических в единичном круге, для которых $|f(z)| < 1$ при $|z| < 1$. Из теоремы Бора следует, что $A \le 3$. В [3] ошибочно утверждалось, что $A = 3$. Правильный результат, опубликованный в [4], состоит в том, что $A = 2$.

Отметим еще некоторые обобщения результата Бора для степенных рядов в единичном круге. Обозначим через $R_{(n)}$ радиус Бора для класса функций вида

$$\sum_{k=n}^{\infty} c_k z^k, \tag{3}$$

т. е. наибольший радиус такой, что если сумма ряда (3) принадлежит B_1, то $\sum\limits_{k=n}^{\infty} |c_k z^k| < 1$ в круге $\{z : |z| < R_{(n)}\}$. Очевидно, что $R_{(0)} = \frac{1}{3}$. В [5] доказано, что $R_{(n)} \ge b_n$, где b_n — положительный корень многочлена

$$x^{n+1} + x - 1 + \frac{1}{4}x^{n-1}(1-x)^2.$$

В [6] для $q \in [1,2)$ систематически изучена функция

$$\alpha_q(r) = \sup_{f\in B_1} \Big[\sum_{k=0}^{\infty} \Big(\frac{|f^{(k)}(0)|}{k!} \Big)^q r^{qk} \Big]^{\frac{1}{q}},$$

определено понятие q-радиуса Бора для $q \in [1,2)$: $R_q := \sup\{r \in (0,1) : \alpha_q(r) < 1\}$ и получены двусторонние оценки для $\alpha_q(r)$ и R_q. Многомерные аналоги теоремы Бора и ее обобщений имеются в [2], [4], [6]–[11] (см. также [12], [13]).

В данной статье приведены новые результаты, относящиеся к указанному кругу вопросов.

2°. Рассмотрим сначала q-радиус Бора для $q \in (0,1)$.

Предложение. *Для любого* $q \in (0,1)$ $\quad R_q = 0$.

Доказательство. Для произвольно зафиксированных r и $q \in (0,1)$ рассмотрим функцию

$$\varphi_q^r(z) = \left[1 + r^{\frac{q}{1-q}}\right]^{-1} + zr^{\frac{q}{1-q}}\left[1 + r^{\frac{q}{1-q}}\right]^{-1} = A + Dz.$$

Очевидно,

$$\varphi_q^r \in B_1 \quad \text{и} \quad (A^q + D^q r^q)^{\frac{1}{q}} = \left[1 + r^{\frac{q}{1-q}}\right]^{\frac{1-q}{q}} > 1.$$

Но тогда $\alpha_q(r) \geq \left[1 + r^{\frac{q}{1-q}}\right]^{\frac{1-q}{q}} > 1$ и, следовательно, $R_q \leq r$. В силу произвольности $r \in (0,1)$ получаем $R_q = 0$. $\square$

В связи с предложением естественно ввести понятие (q,a)-радиуса Бора, положив для любых $q \in (0,+\infty)$, $a \in (0,+\infty)$: $R_q(a) := \sup\{r \in (0,1) : \alpha_q(r) < a\}$. Ясно, что $R_q(1) = R_q$. Положим для любых $q \in (0,+\infty)$ и $r \in (0,1)$

$$\Psi_r^q(x) := \left[x^q + \frac{(2r)^q(1-x)^q}{1-r^q}\right]^{\frac{1}{q}}, \quad x \in [0,1].$$

Теорема 1. *Для всех* $r \in (0,1)$, $q \in (0,+\infty)$ *и всех* $f \in B_1$

$$S_q^f(r) := \left[\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{|f^{(k)}(0)|}{k!}\right)^q \cdot r^{kq}\right]^{\frac{1}{q}} \leq \Psi_r^q(|f(0)|). \tag{4}$$

Доказательство. По известной лемме Каратеодори [12], если $f(z)$ голоморфна в единичном круге и $\operatorname{Re} f(z) > 0$, то для любого $k \geq 1$ имеем $|f^{(k)}(0)| \leq 2k! \operatorname{Re} f(0)$. Отсюда следует, что если $f \in B_1$, $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k z^k$, то для любого $k \geq 1$ справедливо неравенство $|f_k| \leq 2(1 - \operatorname{Re} f_0)$. Отсюда

$$[S_q^f(r)]^q = |f_0|^q + \sum_{k=1}^{\infty}|f_k|^q r^{qk} \leq |f_0|^q + \frac{2^q[1 - \operatorname{Re} f(0)]^q}{1-r^q}.$$

Можно считать, что $f(0)$ — действительное неотрицательное число, т.к. в случае необходимости всегда можно заменить функцию $f(z)$ функцией $g(z) := f(z)e^{i\gamma}$ при подходящем γ. Очевидно, что модули функций f и g и их тейлоровских коэффициентов совпадают. Поэтому

$$\sum_{k=0}^{\infty}|f_k|^q r^{qk} \leq |f_0|^q + \frac{(2r)^q}{1-r^q}(1-|f_0|)^q. \quad \square$$

Выясним, насколько точна эта теорема. Рассмотрим функцию $f_a(z) = \frac{a-z}{1-az}$, где $a \in (0,1)$. Ясно, что $f_a(z) \in B_1$. При этом $f_a(z) = a - (1-a^2)\sum\limits_{k=1}^{\infty} a^{k-1}z^k$. Если $r_1 \in (0,1)$, то

$$S_q^{f_a}(r_1) = \left[a^q + \frac{(1-a^2)^q r_1^q}{1-(ar_1)^q}\right]^{\frac{1}{q}}.$$

По произвольному $r \in (0,1)$ выберем $r_1 = r_1^a(r)$ так, чтобы $[r_1(1+a)]^q(1-r^q) = (2r)^q[1-(ar_1)^q]$. Последнее равенство имеет место, если

$$r_1 = r_1^a(r) = 2r\{(2ar)^q + (1+a)^q - [(1+a)r]^q\}^{-\frac{1}{q}}.$$

Нетрудно проверить, что
$$\frac{1}{a} > r_1 > \frac{2r}{1+a} > r, \quad \lim_{a\to 1-0} r_1^a(r) = r.$$
Кроме того, $r_1 < 1$, если
$$r \in \big(0,\ (1+a)[2^q - (2a)^q + (1+a)^q]^{-\frac{1}{q}}\big).$$
При произвольно зафиксированном r всегда можно найти $a_0 < 1$ настолько близкое к 1, что $\forall a \in (a_0, 1)$ $\ r_1^a(r) < 1$. Возьмем номер $N > 1$ такой, что $\forall n \geq N$ $\ r_n := n^{\frac{1}{n}} r_1^{1-\frac{1}{n}}(r) < 1$. Тогда
$$S_q^{f_{1-\frac{1}{n}}}(r_n) > S_q^{f_{1-\frac{1}{n}}}(r_1^{1-\frac{1}{n}}(r)) = \Psi_r^q(|f_{1-\frac{1}{n}}(0)|).$$
Таким образом, для любых $r \in (0,1)$ и $\rho \in (r,1)$ найдется функция $g(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} g_k z^k$ из B_1 такая, что $S_q^g(\rho) > \Psi_r^q(|g(0)|)$. В силу этого для произвольного $\theta \in (0,1)$ каждое из двух неравенств
$$S_q^f(r) \leq \Psi_{\theta r}^q(|f(0)|), \quad S_q^f(r) \leq \theta \Psi_r^q(|f(0)|)$$
не может выполняться сразу для всех $f \in B_1$, каково бы ни было фиксированное $r \in (0,1)$.

Замечание. При $q = 1$, $r = \frac{1}{3}$, $\Psi_{\frac{1}{3}}^1(x) \equiv 1$ из неравенства (4) следует, что в этом случае $S_1^f(\frac{1}{3}) \leq 1\ \ \forall f \in B_1$. Если учесть еще сказанное по поводу точности теоремы 1, то мы получаем теорему Бора.

Рассматривая функцию $\nu_A^q(x) = [x^q + A(1-x)^q]$ на $[0,1]$ при фиксированных $q \in (0,1]$ и $A \in (0,+\infty)$, обычными методами анализа находим, что ее наибольшее значение на $[0,1]$ равно при $q \in (0,1)$ числу $\big[1 + A^{\frac{1}{1-q}}\big]^{\frac{1-q}{q}}$, а при $q = 1$ — числу $\max\{A^{\frac{1}{q}}, 1\}$. Из теоремы 1 получаем

Следствие. При всех $r \in (0,1)$
$$\alpha_1(r) \leq \max\left\{1, \frac{2r}{1-r}\right\}, \quad \alpha_q(r) \leq \left\{1 + \left[\frac{(2r)^q}{1-r^q}\right]^{\frac{1}{1-q}}\right\}^{\frac{1-q}{q}} \quad \forall q \in (0,1). \tag{5}$$

Из (5) вытекает соотношение
$$R_q\left(\left\{1 + \left[\frac{(2r)^q}{1-r^q}\right]^{\frac{1}{1-q}}\right\}^{\frac{1-q}{q}}\right) \geq r \quad \forall r \in (0,1), \quad \forall q \in (0,1). \tag{6}$$
Чтобы записать (6) в несколько ином, но равносильном виде, рассмотрим функцию
$$\beta_q(r) := \left\{1 + \left[\frac{(2r)^q}{1-r^q}\right]^{\frac{1}{1-q}}\right\}^{\frac{1-q}{q}},$$
непрерывную и монотонно возрастающую на $[0,1)$. Очевидно, что $\beta_q(0) = 1$, $\lim\limits_{r\to 1-0} \beta_q(r) = +\infty$ и $\beta_q(r)$ принимает все значения из $[1,+\infty)$. При этом $r = \big\{1 + 2^q\big[(\beta_q(r))^{\frac{q}{1-q}} - 1\big]^{q-1}\big\}^{-\frac{1}{q}}$. Поэтому неравенство (6) равносильно следующему
$$R_q(a) \geq \big\{1 + 2^q\big[a^{\frac{q}{1-q}} - 1\big]^{q-1}\big\}^{-\frac{1}{q}}, \quad a \in (1,+\infty), \quad q \in (0,1). \tag{7}$$
Чтобы получить оценку сверху для $R_q(a)$, вспомним, что
$$S_q^{f_b}(r) = \left[b^q + \frac{(1-b^2)^q r^q}{1-(br)^q}\right]^{1/q}.$$

Отсюда
$$\alpha_q(r) \geq \sup_{b\in(0,1)} \left[b^q + \frac{(1-b^2)^q r^q}{1-(br)^q}\right]^{1/q} =: \tau_q(r), \quad 0 \leq r < 1. \tag{8}$$

Функция $\tau_q(r)$ непрерывна и монотонно возрастает на $[0,1)$, причем $\tau_q(0)=1$. Кроме того,

$$\lim_{r\to 1-0}\inf \alpha_q(r) \geq \lim_{r\to 1-0}\inf \tau_q(r) \geq \lim_{r\to 1-0}\inf \left[b^q + \frac{(1-b^2)r^q}{1-(br)^q}\right]^{1/q} = \left[b^q + \frac{(1-b^2)^q}{1-b^q}\right]^{1/q}$$

при любом фиксированном $b\in[0,1)$. Отсюда

$$\lim_{r\to 1-0}\inf \tau_q(r) \geq \sup_{b\in(0,1)} \left[b^q + \frac{(1-b^2)^q}{1-b^q}\right]^{1/q} =: A_q.$$

Так как $\lim\limits_{b\to 1-0}\frac{(1-b)^q}{1-b^q}=+\infty$, $0<q<1$, то $A_q=+\infty$, и тем более $\lim\limits_{r\to 1-0}\tau_q(r)=+\infty$, $\lim\limits_{r\to 1-0}\alpha_q(r)=+\infty$. Обратная к $\tau_q(r)$ функция $\tau_q^{-1}(a)$ непрерывна и монотонно возрастает на $[1,+\infty)$, причем $\tau_q^{-1}(1)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\tau_q^{-1}(x)=1$. Из (8) следует, что $\forall a\in[1,+\infty)\ \ \alpha_q(\tau_q^{-1}(a))\geq a$, откуда

$$\tau_q^{-1}(a)\geq R_q(a),\quad a\in[1,+\infty). \tag{9}$$

Объединяя (7) и (9), получаем такой результат.

Теорема 2.

$$\tau_q^{-1}(a)\geq R_q(a)\geq \left\{1+2^q\left[a^{\frac{q}{1-q}}-1\right]^{q-1}\right\}^{-\frac{1}{q}},\quad q\in(0,1),\quad a\in[1,+\infty). \tag{10}$$

Обе крайние части неравенств (10) стремятся к нулю, когда $a\to 1{+}0$. Поэтому $\lim\limits_{a\to 1+0}R_q(a)=0$. Чтобы выяснить асимптотику стремления к нулю функции $R_q(a)$ при $a\to 1+0$ и стремления к $+\infty$ функции $\alpha_q(r)$ при $r\to 1-0$, приведем еще некоторые односторонние оценки для этих функций. Именно, в ходе доказательства предложения было установлено, что $\forall r\in(0,1)\ \ \alpha_q(r)\geq (1+r^{\frac{q}{1-q}})^{\frac{1-q}{q}}$, откуда $R_q\big((1+r^{\frac{q}{1-q}})^{\frac{1-q}{q}}\big)\leq r$. Полагая $a=(1+r^{\frac{q}{1-q}})^{\frac{1-q}{q}}$, находим

$$R_q(a)\leq \left[a^{\frac{q}{1-q}}-1\right]^{\frac{1-q}{q}},\quad a\in[1,2^{\frac{1-q}{q}}). \tag{11}$$

Так как

$$\lim_{a\to 1+0}\frac{(a^{\frac{q}{1-q}}-1)^{\frac{1-q}{q}}}{(a-1)^{\frac{1-q}{q}}} = \left(\frac{q}{1-q}\right)^{\frac{1-q}{q}} =: \gamma_q,$$

то из (11) получаем

Следствие.

$$\lim_{a\to 1+0}\sup R_q(a)(a-1)^{\frac{q-1}{q}}\leq \gamma_q,\quad \lim_{a\to 1+0}\inf R_q(a)(a-1)^{\frac{q-1}{q}}\geq \frac{\gamma_q}{2}.$$

Оценку сверху для $\alpha_q(r)$ при $r\to 1-0$ дает неравенство (5), из которого прямо следует, что $\forall q\in(0,1)\ \ \lim\limits_{r\to 1-0}\sup \alpha_q(r)(1-r)^{1/q}\leq 2q^{-1/q}$. Оценку снизу для $\alpha_q(r)$ можно получить, если заметить, что все рассуждения, проведенные в [6] во второй части доказательства теоремы 2 с использованием результата Кахана, остаются в силе без всяких изменений и в случае, когда $p\in(0,1]$. Следовательно, $\lim\limits_{t\to 1-0}\inf \alpha_q(r)(1-r)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}\geq q^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}(\varphi(t_q))^{1/q}$, где согласно [6] t_q — единственный положительный корень уравнения $2t+q-qe^t=0$. Однако в отличие от вышеуказанных оценок для $R_q(a)$ при $a\to 1+0$ соответствующие оценки для $\alpha_q(r)$ при $r\to 1-0$ менее точны (имеется “зазор” в порядке роста).

Можно также поставить задачу об асимптотике функции $1-R_q(a)$ при $a\to+\infty$. Из (7) находим

$$1-R_q(a)\leq 1-\left(1+2^q(a^{q/(1-q)}-1)^{q-1}\right)^{-1/q},\quad a\in(1,+\infty),\quad q\in(0,1).$$

Так как $\lim\limits_{a\to+\infty}(a^{q/(1-q)}-1)^{q-1}a^q=1$, то $\lim\limits_{a\to+\infty}\sup\,(1-R_q(a))\,a^q\leq \frac{2^q}{q}$.

Оценки снизу для $1 - R_q(a)$ при $a \to +\infty$ можно найти, оценив снизу функцию $(1 - \tau_q^{-1}(a))$. Однако на этом пути не удалось получить точную (по порядку стремления к нулю $1 - R_q(a)$) оценку, и потому мы ее здесь не приводим.

3°. Укажем теперь результаты, относящиеся к радиусу $R_{(n)}$. Ясно, что $R_{(0)} = 1/3$ — это классический радиус Бора. Удалось точно вычислить радиус $R_{(1)}$.

Теорема 3. $R_{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Доказательство. Пусть $f \in B_1$, $f(z) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k z^k$. Тогда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \le 1$, и мы получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| r^k = r \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| r^{k-1} \le r \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2} \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} r^{2k}} \le \frac{r}{\sqrt{1 - r^2}} =: \lambda(r).$$

Очевидно, что $\lambda\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1$. Таким образом, $R_{(1)} \ge \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Обратное неравенство легко устанавливается с помощью экстремальной функции

$$f(z) = z \frac{z - \frac{1}{\sqrt{2}}}{1 - \frac{z}{\sqrt{2}}} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k.$$

Для этой функции

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| r^k = r \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \frac{r}{1 - \frac{r}{\sqrt{2}}} \right),$$

что равно 1, если $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$. $\square$

Для $n \ge 1$ приведем следующие оценки.

Теорема 4. *При* $n \ge 1$

$$r_n \le R_{(n)} \le \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n+1}}, \tag{12}$$

где r_n *— корень многочлена* $x^{2n} + x^2 - 1$ *в интервале* $(0, 1)$.

Доказательство. Если $f(z) = \sum\limits_{k=n}^{\infty} c_k z^k$, то так же, как при доказательстве теоремы 3, получим

$$\sum_{k=n}^{\infty} |c_k| r^k \le \frac{r^n}{\sqrt{1 - r^2}},$$

откуда следует левое неравенство в (12).

Для доказательства правой части в (12) рассмотрим функцию

$$f(z) = z^n \frac{z - R_{(n)}}{1 - z R_{(n)}}.$$

В этом случае $\sum\limits_{k=n}^{\infty} |c_k| R_{(n)}^k = 2(R_{(n)})^{n+1}$, и приходим к правой части в неравенствах (12). $\square$

Отметим, что при $n = 1$ из (12) получается теорема 3. Кроме того, левая часть в (12) лучше, чем вышеприведенное неравенство из [5] $R_{(n)} \ge b_n$. Действительно, в интервале $(0, 1)$

$$P_1(x) = x^{n+1} + x - 1 + \frac{1}{4} x^{n-1}(1 - x^2) > P_2(x) = x^{2n} + x^2 - 1. \tag{13}$$

Легко видеть, что многочлены $P_1(x)$ и $P_2(x)$ имеют в интервале $(0, 1)$ ровно по одному корню. Кроме того, $P_1(0) = -1$, $P_1(r_n) > 0$ в силу неравенства (13). Поэтому $b_n \in (0, r_n)$, т. е. $b_n < r_n$.

4°. Неравенство (2) можно заменить эквивалентным:

$$\frac{1}{2f(0)}\sum_{k=0}^{\infty}|c_k z^k| < 1.$$

Рассмотрим теперь такую задачу: найти

$$\sup_f \inf_{0<r<1} \frac{M_1 f(r)}{r} = B, \quad \text{где} \quad M_1(f) = \frac{1}{2f(0)}\sum_{k=0}^{\infty}|c_k| z^k,$$

а sup рассматривается по всему классу голоморфных в единичном круге функций f таких, что $\operatorname{Re} f(z) > 0$, $f(0) > 0$.

Теорема 5. $B = \dfrac{3+2\sqrt{2}}{2}$.

Заметим, что ответ здесь другой, чем в задаче Винтнера (сравни A и B), и ближе к 3.

Доказательство. Из неравенства Каратеодори вытекает

$$\frac{M_1 f(r)}{r} \le \frac{1}{r}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k\right) = \frac{1+r}{2r(1-r)}. \tag{14}$$

Легко проверить, что min правой части (14) в интервале $(0,1)$ равен $\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$. Тем самым доказано, что $B \le \frac{3+2\sqrt{2}}{2}$. Обратное неравенство получается для экстремальной функции

$$\frac{1+z}{1-z}. \quad \square \tag{15}$$

Рассмотрим аналогичную задачу в ограниченной полной области Рейнхардта $D \subset C^n$. Пусть $f(z) = \sum\limits_{\alpha} c_\alpha z^\alpha$, где $z = (z_1, \dots, z_n)$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, все α_j — целые неотрицательные числа, $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \dots z_n^{\alpha_n}$, $f(z)$ имеет в D положительную вещественную часть и $f(0) > 0$. Положим

$$B^1(D) = \sup_f \inf_r \frac{M_2 f(r)}{r}, \quad \text{где} \quad M_2 f(r) = \frac{1}{2f(0)} \max_{(r_1,\dots,r_n)\in \overline{D}_r} \sum_\alpha |c_\alpha| r_1^{\alpha_1} \dots r_n^{\alpha_n},$$

$D_r = rD$, sup берется по всему указанному классу $T(D)$ голоморфных в D функций.

Теорема 6. *Для гиперконуса* $D^\circ = \{z : |z_1| + \dots + |z_n| < 1\}$ *верно*

$$\frac{3+2\sqrt{2}}{2} \le B^1(D^\circ) < 4,1751. \tag{16}$$

Доказательство левой части неравенства (16) очевидно следует из того, что подклассом класса $T(D^\circ)$ является множество функций, зависящих только от одного переменного z_1, рассмотренное в теореме 5. Доказательство правой части неравенства (16) получается при рассмотрении многомерного аналога функции (15)

$$f(z) = \frac{1 + z_1 + \dots + z_n}{1 - z_1 - \dots - z_n}. \tag{17}$$

Для краткости опускаем простые вычисления (аналогичные выкладки имеются в доказательстве теоремы 8).

Положим

$$B^2(D) = \sup_f \inf_r \frac{M_3 f(r)}{r}, \quad \text{где} \quad M_3 f(r) = \frac{1}{2f(0)} \sum_\alpha |c_\alpha| \max_{z\in \overline{D}_r} |z^\alpha|;$$

sup в $B^2(D)$ рассматривается по тому же классу $T(D)$ голоморфных в D функций.

Заметим, что $B^1(D)$ и $B^2(D)$ — это два разных многомерных аналога величины B из теоремы 5.

Теорема 7. *Для всякой ограниченной полной области Рейнхардта $D \subset C^n$ справедливо неравенство $B^2(D) < (n+1)(\mathrm{e} - \frac{1}{2})$.*

Доказательство. Используя метод статьи [13], легко получить многомерное обобщение неравенства Каратеодори: если $f(z)$ голоморфна в полной ограниченной области Рейнхардта D, $\operatorname{Re} f(z) > 0$, $f(0) > 0$, то $|c_\alpha| \le \frac{2c_0}{d_\alpha(D)}$, $c_0 = f(0)$, где $d_\alpha(D) = \sup\limits_D |z^\alpha|$. Далее имеем

$$\frac{1}{2f(0)} \sum_\alpha |c_\alpha| \max_{\overline{D}_r} |z^\alpha| \le \frac{1}{2c_0}\left[c_0 + 2c_0 \sum_{|\alpha|=1}^{\infty} \frac{d_\alpha(D_r)}{d_\alpha(D)}\right] = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} r^k =$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{(1-r)^n} - 1 = \frac{1}{(1-r)^n} - \frac{1}{2},$$

где $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$. Поэтому

$$\inf_r \frac{M_3 f(r)}{r} \le \inf_r \left[\frac{1}{r(1-r)^n} - \frac{1}{2r}\right]. \tag{18}$$

Выражение в квадратных скобках в (18) в точке $r = \frac{1}{n+1}$ равно $(n+1)\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - \frac{1}{2}\right] < (n+1)(\mathrm{e} - \frac{1}{2})$. $\square$

Теорема 8. *Для гиперконуса D° $n(\frac{1}{\sqrt{2}} + 1) < B^2(D^\circ)$.*

Доказательство. Для функции (17)

$$\inf_r \frac{1}{2f(0)r} \sum_\alpha |c_\alpha| \max_{z \in \overline{D^\circ_r}} |z^\alpha| = \inf_r \frac{1}{r}\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha_1! \dots \alpha_n!} d_\alpha(D^\circ_r)\right].$$

Применяя метод множителей Лагранжа, находим, что последнее выражение равно

$$\inf_r \frac{1}{r}\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha_1! \dots \alpha_n!} \frac{\alpha_1^{\alpha_1} \dots \alpha_n^{\alpha_n}}{k^k}\right) r^k\right] > \inf_r \frac{1}{r}\left\{\frac{1}{2} + rn + \left[n + \frac{n(n-1)}{4}\right] r^2\right\} =$$
$$= \inf_r \left[\frac{1}{2r} + n + \frac{n^2+3n}{4} r\right] = \sqrt{\frac{n^2+3n}{2}} + n > n\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 1\right). \quad \square$$

Заметим в заключение, что из теорем 7 и 8 получаются двусторонние оценки для гиперконуса D°: $1{,}7n < B^2(D^\circ) < 2{,}22(n+1)$.

Один из авторов статьи выражает благодарность профессору В.С. Азарину за приглашение с научным визитом в университет Бар-Илан, во время которого при обсуждении с профессором Л.А. Айзенбергом известной теоремы Бора и ее возможных обобщений возникла идея написания этой работы.

Литература

1. Bohr H. *A theorem concerning power series* // Proc. London Math. Soc. – 1914. – V. 13. – № 1. – P. 1–5.
2. Aizenberg L., Aytuna A., Djakov P. *An abstract approach to Bohr's phenomenon* // Proc. Amer. Math. Soc. – 2000. – V. 128. – № 9. – P. 2611–2613.
3. Wintner A. *On absolute constant pertaining to Cauchy's "principal moduli" in bounded power series* // Math. Scand. – 1962. – V. 10. – № 1. – P. 108–110.
4. Boas H.P. *Majorant series* // J. Korean Math. Soc. – 2000. – V. 37 – № 2. – P. 321–337.
5. Ricci G. *Complementi a un teorema di H. Bohr riquardante le serie di potenze* // Rev. Un. math. Argentina. – 1955. – V. 17. – № 1. – P. 185–195.
6. Djakov P.B., Ramanujan M.S. *A remark on Bohr's theorem and its generalizations* // J. Analysis. – 2000. – V. 8. – № 1. – P. 65–77.

7. Boas H.P., Khavinson D. *Bohr's power series theorem in several variables* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1997. – V. 125. – № 10. – P. 2975–2979.
8. Aizenberg L. *Multidimensional analogues of Bohr's theorem on power series* // Proc. Amer. Math. Soc. – 2000. – V. 128. – № 4. – P. 1147–1155.
9. Aizenberg L., Aytuna A., Djakov P. *Generalization of theorem of Bohr for bases in spaces of holomorphic functions of several complex variables* // J. Math. Anal. Appl. – 2001. – V. 258. – No 4. – P. 429–447.
10. Aizenberg L. *Bohr theorem.* Encyclopaedia of Math. Suppl. II. – Kluwer: Dordrecht, 2000. – P. 2975–2979.
11. Aizenberg L., Tarkhanov N. *A Bohr's phenomenon for elliptic equations* // Proc. London Math. Soc. – 2001. – V. 28. – № 3. – P. 385–401.
12. Caratheodory C. *Über den Variabilitätsbereich der Koeffizienten von Potenzreihen, die gegebene Werte nicht annehmen* // Math. Ann. – 1907. – V. 64. – № 4. – P. 95–115.
13. Айзенберг Л.А., Митягин Б.С. *Пространства функций, аналитических в кратно-круговых областях* // Сиб. матем. журнал. – 1960. – Т. 2. – № 2. – С. 153–170.

Бар-Иланский университет (Израиль)
Ростовский государственный университет

Поступила
20.03.2002