ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2005 МАТЕМАТИКА № 8 (519)

УДК 517.983

В.В. КЛЮЧЕВ

О НЕОБХОДИМЫХ УСЛОВИЯХ МЕДЛЕННОЙ СХОДИМОСТИ КЛАССА МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

1. Рассматривается задача приближенного решения некорректного операторного уравнения

$$Bu = f, \quad u \in X, \tag{1}$$

где линейный ограниченный оператор B, действующий в банаховом пространстве X, не предполагается непрерывно обратимым. Методам решения таких задач посвящено множество публикаций (см., напр., [1]–[4] и библиографию там). Предположим, что задача (1) имеет единственное решение u^*. Для аппроксимации решения будем использовать один из методов в рамках общей схемы ([4], с. 39)

$$u_\alpha = (E - \Theta(B,\alpha)B)\xi + \Theta(B,\alpha)f, \quad \alpha \in (0,\alpha_0], \tag{2}$$

определяющей такое семейство элементов $u_\alpha \in X$, что $\lim\limits_{\alpha\to 0} u_\alpha = u^*$. В формуле (2) через ξ обозначено начальное приближение к решению, а функция от оператора $\Theta(B,\alpha)$ понимается в смысле подходящего операторного исчисления. При соответствующем выборе порождающей функции $\Theta(\cdot,\alpha)$ схема (2) позволяет получить метод М.М. Лаврентьева и его итерированный вариант, метод установления, простейшие явный и неявный итерационные методы. Поскольку задача (1) некорректна, сходимость приближений u_α к решению u^* может быть сколь угодно медленной, если решение не подчинено дополнительным требованиям, например, условиям истокообразной представимости. Так, если оператор B удовлетворяет условию секториальности и имеет место истокообразное представление начальной невязки

$$u^* - \xi \in R(B^p), \quad p > 0, \tag{3}$$

то обеспечена степенная оценка скорости сходимости ([4], с. 42)

$$\|u_\alpha - u^*\| \le C_1\alpha^p, \quad \alpha \in (0,\alpha_0]. \tag{4}$$

Здесь и ниже $C_1, C_2, \dots$ — положительные постоянные. Условие (3), достаточное для установления оценки (4), близко к необходимому в том смысле, что (4) влечет представление ([4], с. 63)

$$u^* - \xi \in R(B^q) \quad \forall q \in (0,p).$$

Эти же утверждения справедливы, если B — самосопряженный неотрицательный оператор, действующий в гильбертовом пространстве (напр., [2], [3]). Далее, в случае $B = B^* \ge 0$ в гильбертовом пространстве представление вида

$$u^* - \xi \in R((-\ln B)^{-p}), \quad p > 0, \tag{5}$$

влечет оценку

$$\|u_\alpha - u^*\| \le C_2(-\ln\alpha)^{-p}, \quad p > 0, \quad \alpha \in (0,\alpha_0], \tag{6}$$

из которой следует включение [5], [6]

$$u^* - \xi \in R((-\ln B)^{-q}) \quad \forall q \in (0, p).$$

В данной работе рассматривается уравнение (1) с оператором

$$B = U(T), \quad \text{где } U(t),\ 0 \le t \le T,$$

— полугруппа ограниченных операторов, действующих в банаховом пространстве X. Ранее установлено [7], что условие истокопредставимости

$$u^* - \xi \in R(A^{-p}), \quad p > 0, \tag{7}$$

в котором $-A$ есть генератор полугруппы $U(t)$, обеспечивает выполнение (7) при некоторых условиях на оператор A и нежестких условиях на функцию $\Theta(z, \alpha)$. Требование (7) может рассматриваться в качестве банахова аналога требования логарифмической истокопредставимости (5) в применении к уравнению (1) с оператором B указанного выше вида.

Основной результат работы — обратная теорема об истокообразном представлении

$$u^* - \xi \in R(A^{-q}) \quad \forall q \in (0, p), \tag{8}$$

как необходимом условии для логарифмической оценки скорости сходимости (6) при тех же условиях на A, что и в [7].

2. Рассмотрим задачу Коши для абстрактного параболического уравнения

$$\frac{dx}{dt} + Ax = 0, \quad x(0) = x_0. \tag{9}$$

Здесь $A : D(A) \subset X \to X$ — замкнутый, в общем случае неограниченный оператор с плотной в X областью определения $\overline{D(A)} = X$. Под решением (9) понимается функция $x = x(t) \in X$, $t \in [0, T]$, дифференцируемая и удовлетворяющая дифференциальному уравнению при $t > 0$ и непрерывная в точке $t = 0$ ([8], с. 76). Всюду далее через $\sigma(A)$ и $\rho(A) = \mathbf{C} \setminus \sigma(A)$ обозначается спектр и резольвентное множество оператора A соответственно, $R(\lambda, A) = (\lambda E - A)^{-1}$ — резольвента оператора A. Обозначим также $K(\varphi) = \{\lambda \in \mathbf{C} \setminus \{0\} : |\arg \lambda| \le \varphi\} \cup \{0\}$, $\varphi \in [0, \pi]$; $S(R) = \{\lambda \in \mathbf{C} : |\lambda| \le R\}$.

В дальнейшем считаем выполненным основное

Условие 1. Оператор A обладает компактным обратным $A^{-1} : X \to X$, спектр $\sigma(A)$ принадлежит полуполосе

$$\Pi = \{\lambda \in \mathbf{C} : |\operatorname{Im} \lambda| \le \psi_0/T,\ \operatorname{Re} \lambda \ge a\} \subset K(\varphi_0), \tag{10}$$

где $\psi_0 < \pi/2$, $a > 0$, и выполняется оценка

$$\|R(\lambda, A)\| \le C_3/|\lambda| \quad \forall \lambda \in \mathbf{C} \setminus K(\varphi_0), \quad \varphi_0 \in (0, \pi/2). \tag{11}$$

Условие 1 выполняется для широкого класса операторов A, например, для операторов, определяемых регулярно-эллиптическими наборами ([9], с. 453) при соответствующих условиях на коэффициенты.

Согласно ([10], с. 307) при выполнении условий (10), (11) задача Коши (9) является корректной ([8], с. 38), и ее решение имеет вид $x = U(t)x_0$, где $U(t)$ — сильно непрерывная полугруппа линейных ограниченных операторов в X, генератор которой совпадает с оператором $-A$. Обратная же задача Коши для уравнения $dx/dt + Ax = 0$, состоящая в определении начального условия $x_0 = x(0)$ по заданному состоянию $x(T)$ в момент $T > 0$, является в общем случае некорректной ([8], с. 101). Положив $B = U(T)$, $x_0 = u$, $x(T) = f$, представим эту задачу в виде (1).

Функция $\varphi(B)$ оператора B в (2) понимается в смысле исчисления Рисса–Данфорда ([8], с. 27):

$$\varphi(B) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \varphi(\lambda) R(\lambda, B) d\lambda. \tag{12}$$

Контур Γ окружает спектр $\sigma(B)$, функция $\varphi(\lambda)$ предполагается аналитической в окрестности $\sigma(B)$, содержащей контур Γ. Формула (12) пригодна и в случае, когда $B : D(B) \subset X \to X$ есть неограниченный оператор с плотной в X областью определения $D(B)$. При этом контур Γ в (12) выбирается неограниченным. Корректность определения $\varphi(B)$ интегралом (12) в этом случае обеспечивается, например, оценкой (11) и условием $\lambda^s\varphi(\lambda) \to 0$, $|\lambda| \to \infty$, $s > 0$, равномерно по $\arg\lambda$, $\lambda \in K(\varphi_0)$. В частности, при $\varphi(\lambda) = \lambda^{-p}$, $p > 0$, для оператора $\Lambda : D(\Lambda) \subset X \to X$, $\overline{D(\Lambda)} = X$, удовлетворяющего (10), (11) и такого, что $0 \in \rho(\Lambda)$, справедливо представление

$$\Lambda^{-p} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \lambda^{-p} R(\lambda,\Lambda)d\lambda,$$

где в качестве Γ можно выбрать границу множества $K(\varphi_0)\setminus S(r)$, $r > 0$. Известно ([8], сс. 48, 50), что в смысле данного выше определения $U(t) = \exp(-tA)$, $t \geq 0$, поэтому в (1) и (2) имеем $B = U(T) = \exp(-TA)$.

Рассмотрим некоторые примеры реализации схемы (2), соответствующие конкретным порождающим функциям $\Theta(z,\alpha)$.

Пример 1. Пусть

$$\Theta(z,\alpha) = \frac{1}{z}\left(1 - \left(\frac{\alpha}{z+\alpha}\right)^N\right), \quad N \in \mathbf{N} = \{1, 2, \dots\}.$$

Схема (2) с этой порождающей функцией приводит к итерированному варианту метода М.М. Лаврентьева

$$(\exp(-TA) + \alpha E)u_{k,\alpha} = \alpha u_{k-1,\alpha} + f, \quad k = 1,\dots,N, \quad u_{0,\alpha} = \xi.$$

В силу условия 1 $-\alpha \in \rho(\exp(-TA))$, поэтому последние уравнения корректны.

Пример 2. Положив

$$\Theta(z,\alpha) = z^{-1}(1 - (1-\mu_0 z)^{1/\alpha}), \quad \alpha = 1/n, \quad n \in \mathbf{N},$$

в соответствии с (2) будем иметь простейший итерационный процесс $u_\alpha = u^{(n)}$, где

$$u^{(0)} = \xi, \quad u^{(k+1)} = u^{(k)} - \mu_0(\exp(-TA)u^{(k)} - f), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

И в этом случае для получения очередного приближения $u^{(k+1)}$ решается корректная задача.

Другие примеры реализации схемы (2) имеются в ([4], с. 26–28).

3. Перейдем к формулировке условий на порождающую функцию $\Theta(z,\alpha)$ и теоремы.

Условие 2. Функция $\Theta(z,\alpha)$ аналитична по z в открытой окрестности D_α множества

$$G(\psi_0,\alpha) = (K(\psi_0)\cap S(1)) \cup S(\alpha/2), \quad \alpha \in (0,\alpha_0].$$

Пусть $\Gamma_0(\alpha)$ — граница множества $G(\psi_0,\alpha)$.

Условие 3. При некоторой постоянной $\varkappa$ справедлива оценка

$$\int\limits_{\Gamma_0(\alpha)} |\Theta(z,\alpha)||dz| \leq C_4(-\ln\alpha)^{\varkappa}, \quad \alpha \in (0,\alpha_0].$$

Условиям 2, 3 удовлетворяют функции $\Theta(z,\alpha)$ из примеров 1, 2 и функции, порождающие по схеме (2) метод установления и простейший неявный итерационный процесс.

Методы теории интерполяции (напр., [9], гл. 1) в сочетании с исчислением Рисса–Данфорда позволяют получить следующее утверждение.

Теорема. *Пусть приближения к решению u^* уравнения* (1) *строятся по схеме* (2), *оператор A удовлетворяет условию* 1, *порождающая функция метода $\Theta(z,\alpha)$ удовлетворяет условиям* 2, 3. *Если справедлива логарифмическая оценка* (6) *скорости сходимости приближений u_α к решению, то имеет место истокообразное представление начальной невязки* (8).

Заметим еще, что смысл условия истокообразной представимости состоит в повышенной гладкости начальной невязки по сравнению с гладкостью, которую обеспечивает исходное пространство X. Например, в случае $X = L_r$, $1 < r < \infty$, и регулярно-эллиптического дифференциального оператора A условие (9) означает принадлежность начальной невязки некоторому пространству Соболева, зависящему от показателя p.

Литература

1. Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П. *Теория линейных некорректных задач и ее приложения.* – М.: Наука, 1978. – 208 с.
2. Вайникко Г.М., Веретенников А.Ю. *Итерационные процедуры в некорректных задачах.* – М.: Наука, 1986. – 181 с.
3. Бакушинский А.Б., Гончарский А.В. *Итеративные методы решения некорректных задач.* – М.: Наука, 1989. – 128 с.
4. Бакушинский А.Б., Кокурин М.Ю. *Итерационные методы решения некорректных операторных уравнений с гладкими операторами.* – М.: Едиториал УРСС, 2002. – 192 с.
5. Hohage T. *Regularization of exponentially illposed problems* // Numer. Funct. Anal. and Optimiz. – 2000. – V. 21. – №№ 3, 4. – P. 439–464.
6. Hohage T. *Logarithmic convergence rates of the iteratively regularized Gauss - Newton method for the inverse potential and inverse scattering problem* // Inverse Problems. – 1997. – V. 13. – № 6. – P. 1279–1299.
7. Кокурин М.Ю., Ключев В.В. *О логарифмических оценках скорости сходимости методов решения обратной задачи Коши в банаховом пространстве* // Изв. вузов. Математика. – 2004. – № 3. – С. 73–75.
8. Крейн С.Г. *Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве.* – М.: Наука, 1967. – 464 с.
9. Трибель Х. *Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы.* – М.: Мир, 1980. – 664 с.
10. Мизохата С. *Теория уравнений с частными производными.* – М.: Мир, 1977. – 504 с.

Марийский государственный университет

Поступила
30.09.2004