

Л.А. АКСЕНТЬЕВ, Е.А. ИОНОВА, Д.Е. РОМАДИН

МНОГОЛИСТНЫЕ ФУНКЦИИ ИЗ РАСШИРЕННЫХ КЛАССОВ НЕХАРИ В СЕКТОРАХ, СОДЕРЖАЩИХ ПОЛУПЛОСКОСТЬ

1. В [1] доказано, что класс Нехари регулярных в области D функций $f(z)$, которые удовлетворяют соотношению

$$\sup_{z \in D} [|\{f(z), z\}|R^2(D, z)] \leq a(D) \tag{1}$$

со шварцианом $\{f, z\} = (f''/f')' - (f''/f')^2/2$ и с конформным радиусом $R(D, z)$ области D в точке z , состоит из однолистных функций, когда наибольшая возможная постоянная $a(D) < 2$, если D отличается от круга и полуплоскости. Давно известно [2], [3], что для круга и полуплоскости $a(D) = 2$.

Для многих областей соотношение (1) с увеличенной правой частью нельзя использовать в качестве достаточного условия p -листности с $p \geq 2$. Это значит, что не существуют такие постоянные $a_p = a_p(D)$, чтобы $a_p > a_1 = a(D)$, причем функции, удовлетворяющие условию (1) с правой частью a_p вместо $a(D)$, были не более чем p -листными.

Следуя ([4], п. 2.1), скажем, что в этом случае функционал Нехари в (1) не является p -допустимым при $p \geq 2$. Напомним, что 1-допустимость этого функционала доказана в форме характеристики для областей с границами в виде квазиокружностей. В случае односвязной области D справедлива такая эквивалентность (напр., [5]) $a(D) > 0 \Leftrightarrow \partial D$ — квазиокружность.

Утверждение, что функционал Нехари в (1) не является p -допустимым при $p \geq 2$ в круге и полуплоскости, доказано Хиллом [3] еще в 1949 г. Аналогичные факты для условия Беккера в форме

$$\sup_{z \in D} [|f''(z)/f'(z)|R(D, z)] \leq b(D)$$

получены в [6] и [7].

Целью данной статьи является увеличение набора областей, для которых справедливо утверждение о невозможной p -допустимости функционала в (1) при $p \geq 2$. Такую теорему в случае бесконечных секторов представил И.Р. Каюмов [8], но строгого доказательства не дал. Мы приведем корректировки его утверждения и доказательства.

2. В [9], [10] и [1] получены следующие результаты, которые будут использоваться впоследствии. Применяя квазиконформное отражение относительно сторон сектора $D_\varkappa = \{z : |\arg z| < \varkappa\pi/2\}$ в форме

$$\lambda(z) = \begin{cases} z^{1-1/\varkappa} \bar{z}^{1/\varkappa} e^{-i\pi}, & |\arg z| < \varkappa\pi/2; \\ z^{1-1/(2-\varkappa)} \bar{z}^{1/(2-\varkappa)} e^{-i\varkappa\pi/(2-\varkappa)}, & \varkappa\pi/2 - 2\pi < \arg z < -\varkappa\pi/2, \end{cases}$$

Лехто получил достаточные условия однолистности для двух видов секторов. Именно, при обозначении

$$\|\{f(z), z\}\|_{D_\varkappa} = \sup_{z \in D_\varkappa} [|\{f(z), z\}|R^2(D_\varkappa, z)]$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №№ 02-01-00914, 03-01-00015).

достаточными условиями однолиственности в области D_{\varkappa} являются

$$\|\{f(z), z\}\|_{D_{\varkappa}} \leq 2\varkappa^2, \quad 0 < \varkappa \leq 1, \quad (2)$$

$$\|\{f(z), z\}\|_{D_{\varkappa}} \leq 2\varkappa(2 - \varkappa), \quad 1 \leq \varkappa < 2. \quad (3)$$

Для доказательства применялось квазиконформное продолжение функции $f(z)$ из области D_{\varkappa} на всю плоскость в форме

$$\widehat{f}(z) = \frac{f_1(\lambda(z)) + (z - \lambda)f_1'(\lambda(z))}{f_2(\lambda(z)) + (z - \lambda)f_2'(\lambda(z))}, \quad z \in D_{2-\varkappa} = \overline{C} \setminus \overline{D}_{\varkappa},$$

причем $\widehat{f}(z) = f_1(z)/f_2(z) = f(z)$, $z \in D_{\varkappa}$, и $f_k''(z) + \frac{\{f, z\}}{2}f_k' = 0$, $k = 1, 2$.

Условия (2) и (3) приводят к неравенству $|\widehat{f}'_z/\widehat{f}'_z| < 1$, которое обеспечивает гомеоморфное отображение $w = \widehat{f}(z)$ плоскости на плоскость. Следовательно, сужение этого отображения — функция $f(z)$ — будет однолистной в D_{\varkappa} .

В общем случае для однолиственности $f(z)$ в области D достаточно обеспечить неравенство $|z - \lambda|^2 \left| \{f(z), z\} \right|_{\lambda(z)} \left(|\lambda_z| + |\lambda_{\bar{z}}| \right) < 2$, где $z \in \overline{C} \setminus \overline{D}$ и $\lambda(z)$ — квазиконформное отражение области $\overline{C} \setminus \overline{D}$ в границе ∂D .

3. Для области $D_{\varkappa} = \{z : |\arg z| < \varkappa\pi/2\}$ при $0 < \varkappa < 2$ конформный радиус записывается в виде

$$R(D_{\varkappa}, z) = 2\varkappa|z| \cos \frac{\arg z}{\varkappa}. \quad (4)$$

Для проверки используем функцию $F(\omega)$, отображающую область D_{\varkappa} на круг так, чтобы $F(z) = 0$. Так как $F(\omega) = (\omega^{1/\varkappa} - z^{1/\varkappa})/(\omega^{1/\varkappa} + z^{1/\varkappa})$, то $|F'(z)| = \frac{1}{\varkappa}|z|^{1/\varkappa-1}/(2 \operatorname{Re} z^{1/\varkappa})$. Поэтому для $R(D_{\varkappa}, z) = 1/|F'(z)|$ справедлива формула (4).

Второе обоснование формулы (4) связано с функцией

$$z = z(\zeta) = \left(\frac{1 + \zeta}{1 - \zeta} \right)^{\varkappa} \quad \left(\zeta = \frac{z^{1/\varkappa} - 1}{z^{1/\varkappa} + 1} \right),$$

отображающей круг $E = \{\zeta : |\zeta| < 1\}$ на область D_{\varkappa} . В этом случае

$$\begin{aligned} R(D_{\varkappa}, z) &= |z'(\zeta)|(1 - |\zeta|^2) = 2\varkappa \left| \frac{1 + \zeta}{1 - \zeta} \right|^{\varkappa-1} \frac{1 - |\zeta|^2}{|1 - \zeta|^2} = 2\varkappa|z| \frac{|z^{1/\varkappa} + 1|^2 - |z^{1/\varkappa} - 1|^2}{|(z^{1/\varkappa} + 1)^2 - (z^{1/\varkappa} - 1)^2|} = \\ &= \frac{2\varkappa|z|4|z|^{1/\varkappa} \cos \frac{\arg z}{\varkappa}}{4|z|^{1/\varkappa}} = 2\varkappa|z| \cos \frac{\arg z}{\varkappa}. \end{aligned}$$

4. Неулучшаемость условий (2) (при $0 < \varkappa \leq 1$) получается с помощью функции Хилла [3]

$$f_{\varepsilon}(z) = \frac{z^{i\varepsilon} - 1}{i\varepsilon} = \frac{e^{i\varepsilon \ln z} - 1}{i\varepsilon} = \ln z + \frac{i\varepsilon}{2}(\ln z)^2 + \dots \quad (5)$$

и ее предельного положения $f_0(z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_{\varepsilon}(z) = \ln z$. Действительно, для z^{γ} имеем $\{z^{\gamma}, z\} = -\frac{\gamma-1}{z^2} - \frac{1}{2} \frac{(\gamma-1)^2}{z^2} = \frac{1-\gamma^2}{2z^2}$. Тогда $\{f_{\varepsilon}(z), z\} = \{z^{i\varepsilon}, z\} = \frac{1+\varepsilon^2}{2z^2}$ и $\{f_0(z), z\} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{2z^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{z^2}$. Следовательно,

$$\|\{f_{\varepsilon}(z), z\}\|_{D_{\varkappa}} = \sup_{z \in D_{\varkappa}} \left[\frac{1 + \varepsilon^2}{2|z|^2} 4\varkappa^2|z|^2 \cos^2 \frac{\arg z}{\varkappa} \right] = 2\varkappa^2(1 + \varepsilon^2), \quad \varepsilon \geq 0,$$

причем \sup достигается при $\arg z = 0$.

В итоге обнаружили [10], что любое расширение (с коэффициентом $2\varkappa^2 + \tilde{\varepsilon}$, $\tilde{\varepsilon} > 0$) класса функций с условием (2) приводит к появлению бесконечнолистных функций, к которым относятся функции (5) с $\varepsilon > 0$. Поэтому функционал Нехари из (2) не является p -допустимым при $p \geq 2$.

5. Функции (5) не позволяют доказать неулучшаемость условия (3), т.к. при $1 < \varkappa < 2$ $\|\{f_\varepsilon(z), z\}\|_{D_\varkappa} = 2\varkappa(2 - \varkappa)\frac{\varepsilon}{2 - \varepsilon}(1 + \varepsilon^2) = 2\varkappa(2 - \varkappa)(1 + \varepsilon^2)Q$, где $Q = \varkappa/(2 - \varkappa) > 1$. Поэтому нужно найти другой путь обоснования итога (из предыдущего пункта) в применении к классу с условием (3).

В основание дальнейшего изложения положим функцию Лехтинена [1]

$$w = h(z) : D_\varkappa \mapsto B_\varkappa = D_\varkappa \cap (-D_\varkappa + 1), \quad 1 < \varkappa < 2, \quad (6)$$

т.е. B_\varkappa является пересечением областей $\{w : |\arg w| < \varkappa\pi/2\}$ и $\{w : |\arg(1 - w)| < \varkappa\pi/2\}$ (рис. 1).

Предварительно используем вспомогательную функцию

$$g(\zeta) : H = \{\zeta : \text{Im } \zeta > 0\} \mapsto B_\varkappa \cap H,$$

отображающую верхнюю полуплоскость на верхнюю половину области B_\varkappa с нормировкой $g(\infty) = 0$, $g(0) = 1$, $g(1) = \infty \Rightarrow g(\zeta) = C_0 \int_0^\zeta \zeta^{\varkappa/2-1} (\zeta - 1)^{-\varkappa} d\zeta + 1$, $C_0 = -1 / \int_0^\infty \zeta^{\varkappa/2-1} (\zeta - 1)^{-\varkappa} d\zeta$.

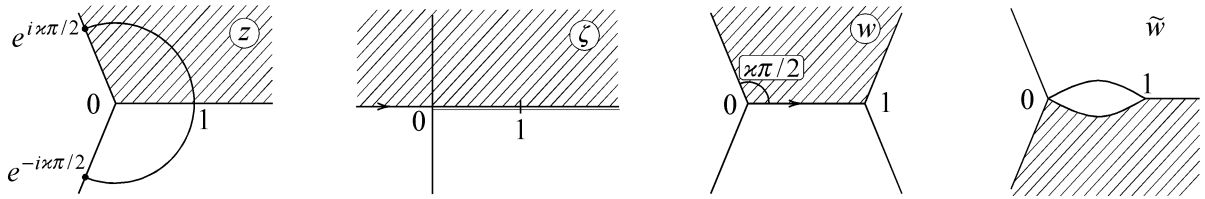


Рис. 1

Тем самым лучу $(-\infty, 0)$ на вещественной оси плоскости ζ соответствует интервал $(0, 1)$ на вещественной оси плоскости w . С использованием принципа симметрии получим, что функция $g(\zeta)$ переводит плоскость ζ с разрезом по лучу $(0, \infty)$ (на вещественной оси) в область B_\varkappa . Плоскость с разрезом $(0, \infty)$ получится из области D_\varkappa с помощью функции $\zeta = -z^{2/\varkappa}$, поэтому $h(z) = g(-z^{2/\varkappa})$. Проведем нетрудные вычисления для шварцианов с использованием $g'(\zeta) = C_0 \zeta^{\varkappa/2-1} (\zeta - 1)^{-\varkappa}$. Получим

$$\begin{aligned} \{h(z), z\} &= \{g(\zeta), \zeta\}|_{\zeta=-z^{2/\varkappa}} \frac{4}{\varkappa^2} z^{4/\varkappa-2} + \{-z^{2/\varkappa}, z\}, \\ \{g(\zeta), \zeta\} &= \left[\left(\frac{\varkappa}{2} - 1 \right) \frac{1}{\zeta} - \frac{\varkappa}{\zeta - 1} \right]' - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\varkappa}{2} - 1 \right) \frac{1}{\zeta} - \frac{\varkappa}{\zeta - 1} \right]^2 = \frac{4 - \varkappa^2}{8\zeta^2} + \frac{2\varkappa - \varkappa^2}{2} \frac{1}{\zeta(\zeta - 1)^2}, \\ \{-z^{2/\varkappa}, z\} &= \frac{1 - 4/\varkappa^2}{2z^2}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \{h(z), z\} &= \frac{4 - \varkappa^2}{8z^{4/\varkappa}} \frac{4}{\varkappa^2} z^{4/\varkappa-2} + \frac{2\varkappa - \varkappa^2}{2} \left(-\frac{1}{z^{2/\varkappa}} \right) \frac{1}{(1 + z^{2/\varkappa})^2} \frac{4}{\varkappa^2} z^{4/\varkappa-2} + \frac{\varkappa^2 - 4}{2\varkappa^2 z^2} = \\ &= -\frac{2}{\varkappa^2} \frac{2\varkappa - \varkappa^2}{z^2} \frac{1}{(z^{1/\varkappa} + z^{-1/\varkappa})^2}. \end{aligned}$$

Используем оценку

$$|\{h(z), z\}| R^2(D_\varkappa, z) = \frac{2}{\varkappa^2} \frac{2\varkappa - \varkappa^2}{|z|^2} \frac{1}{|z^{1/\varkappa} + z^{-1/\varkappa}|^2} 4\varkappa^2 |z|^2 \cos^2 \frac{\arg z}{\varkappa} \leq 2(2\varkappa - \varkappa^2),$$

т.к. $|z^{1/\varkappa} + z^{-1/\varkappa}|^2 = |z|^{2/\varkappa} + |z|^{-2/\varkappa} + 2 \text{Re } e^{i2(\arg z)/\varkappa} \geq 2(1 + \cos \frac{2 \arg z}{\varkappa}) = 4 \cos^2 \frac{\arg z}{\varkappa}$, причем знак равенства будет достигаться только при $|z| = 1$. Полученную оценку перепишем в виде

$$\|\{h(z), z\}\|_{D_\varkappa} = 4\varkappa - 2\varkappa^2. \quad (7)$$

Поскольку граница $\partial h(D_\varkappa)$ имеет двойную точку в ∞ , то функция $h(z)$ будет неоднолистной в замкнутой области $\overline{D_\varkappa}$. Функция $\tilde{w} = 1/h(z)$ создаст двойную точку в нуле на границе области $1/h(D_\varkappa)$, т. к. $1/h(e^{i\varkappa\pi/2}) = 1/h(e^{-i\varkappa\pi/2}) = 0$. Малое изменение функции $1/h(z)$ может привести к неоднолистности в открытой области D_\varkappa (напр., при действии $(\tilde{w} - 1/2)^{1+\alpha}$, $\alpha > 0$). При этом коэффициент в оценке (7) мало изменится. Тем самым показана невозможность увеличения коэффициента в достаточном условии однолистности (3).

По функции $h(z) = g(-z^{2/\varkappa})$ с отображением (6) можно построить функцию [8]

$$f(z, \varepsilon) = \frac{\varepsilon}{h(z/\varepsilon)}, \quad (8)$$

которая отображает область D_\varkappa на область D_\varkappa без круговой луночки с угловыми точками в 0 и 1. Функция $f(z, \varepsilon)$ будет склеивать точки $\varepsilon e^{\pm i\varkappa\pi/2}$, т. е. $f(\varepsilon e^{-i\varkappa\pi/2}, \varepsilon) = f(\varepsilon e^{i\varkappa\pi/2}, \varepsilon)$.

При фиксированном z и при $\varepsilon \rightarrow 0$ раскроем в (8) получившуюся неопределенность, учитывая, что $h(\infty) = 0 \Leftrightarrow f(\infty, \varepsilon) = \infty$. Имеем $f(z, 0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{h(z/\varepsilon)} = z \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{\omega h(\omega)}$.

Учтем, что

$$\begin{aligned} h(\omega) = g(-\omega^{2/\varkappa}) &= C_0 \left(\int_0^{-\omega^{2/\varkappa}} t^{\varkappa/2-1} (t-1)^{-\varkappa} dt - \int_0^\infty t^{\varkappa/2-1} (t-1)^{-\varkappa} dt \right) = \\ &= C_0 \int_\infty^{-\omega^{2/\varkappa}} t^{\varkappa/2-1} (t-1)^{-\varkappa} dt \sim C_1 \int_\infty^{-\omega^{2/\varkappa}} t^{-\varkappa/2-1} dt = C_2 \omega^{-1}. \end{aligned}$$

Поэтому $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{\omega h(\omega)} = \frac{1}{C_2} = C \neq 0$ и $f(z, 0) = Cz$. Постоянная C будет вещественной и положительной, т. к. поворота в плоскости f не будет до предельного перехода, следовательно, его не будет и в пределе.

Используя оценку (7), покажем, что

$$\|\{f(z, \varepsilon), z\}\|_{D_\varkappa} = 4\varkappa - 2\varkappa^2, \quad \varepsilon > 0. \quad (9)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} |\{f(z, \varepsilon), z\}| R^2(D_\varkappa, z) &= |\{h(z/\varepsilon), z\}| R^2(D_\varkappa, z) = \\ &= \frac{2}{\varkappa^2} \frac{2\varkappa - \varkappa^2}{(|z/\varepsilon|^2)^2} \frac{1}{|(z/\varepsilon)^{1/\varkappa} + (z/\varepsilon)^{-1/\varkappa}|^2 \varepsilon^2} 4\varkappa^2 |z|^2 \cos^2 \frac{\arg z}{\varkappa} = \\ &= 2(2\varkappa - \varkappa^2) \frac{\cos^2 \frac{\arg z}{\varkappa}}{|(z/\varepsilon)^{1/\varkappa} + (z/\varepsilon)^{-1/\varkappa}|^2} \leq 4\varkappa - 2\varkappa^2 \end{aligned}$$

со знаком равенства при $|z| = \varepsilon$.

Предельное положение поверхности с уравнением $\Omega = |\{f(z, \varepsilon), z\}| R^2(D_\varkappa, z)$ над областью D_\varkappa будет самой этой областью D_\varkappa со столбиком высотой $4\varkappa - 2\varkappa^2$ при $z = 0$. До предельного положения сглаженные столбики будут расположены на окружности $|z| = \varepsilon$, иметь ту же высоту и давать плавные переходы на поверхности, расположенной над D_\varkappa и близкой к D_\varkappa , т. е. имеющей малые высоты.

6. Для последующих построений нужно исследовать такое преобразование области D_\varkappa (при $1 \leq \varkappa < 2$) на D_\varkappa , чтобы точка 0 перешла в точку $\varepsilon e^{i\varkappa\pi/2}$, точка $\varepsilon e^{-i\varkappa\pi/2}$ перешла в 0 и ∞ осталась на месте. Этим преобразованием будет

$$\omega = \Phi(z, \varepsilon) = (z^{1/\varkappa} + i\varepsilon^{1/\varkappa})^\varkappa \quad (10)$$

— суперпозиция функций $\varphi(z) = z^{1/\varkappa} + i\varepsilon^{1/\varkappa}$ и $\omega(\zeta) = \zeta^\varkappa$. Посмотрим, как ведет себя шварциан от функции $\Phi(z, \varepsilon)$ при малых ε и в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$. Последовательно получим такие выражения

для шварцианов

$$\{\omega, \zeta\} = \{\zeta^\varkappa, \zeta\} = \frac{1 - \varkappa^2}{2\zeta^2}, \quad \{\varphi(z), z\} = \{z^{1/\varkappa} + i\varepsilon^{1/\varkappa}, z\} = \frac{1 - 1/\varkappa^2}{2z^2},$$

$$\{\Phi(z, \varepsilon), z\} = \{\omega, \zeta\}|_{\zeta=\varphi(z)} \cdot \varphi'^2(z) + \{\varphi(z), z\} = \varepsilon^{1/\varkappa} \frac{\varkappa^2 - 1}{\varkappa^2} \frac{1}{2z^2} \frac{2iz^{1/\varkappa} - \varepsilon^{1/\varkappa}}{(z^{1/\varkappa} + i\varepsilon^{1/\varkappa})^2}.$$

Если $z \neq 0$ и $z \neq \varepsilon e^{-i\varkappa\pi/2}$, то для остальных $z \in \overline{D_\varkappa}$ осуществляется поточечная сходимость шварциана $\{\omega[\varphi(z)], z\}$ к нулю: $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \{\Phi(z, \varepsilon), z\} = 0$. Нулю будет равен шварциан предельной функции, т. к. $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Phi(z, \varepsilon) = z$.

Распишем и оценим произведение

$$A(z, \varepsilon) = |\{\Phi(z, \varepsilon), z\}| R^2(D_\varkappa, z) = \varepsilon^{1/\varkappa} \frac{\varkappa^2 - 1}{\varkappa^2} \frac{1}{2|z|^2} \frac{|2iz^{1/\varkappa} - \varepsilon^{1/\varkappa}|}{|z^{1/\varkappa} + i\varepsilon^{1/\varkappa}|^2} 4\varkappa^2 |z|^2 \cos^2 \frac{\arg z}{\varkappa} =$$

$$= 2\varepsilon^{1/\varkappa} (\varkappa^2 - 1) \frac{|2iz^{1/\varkappa} - \varepsilon^{1/\varkappa}|}{|z^{1/\varkappa} + i\varepsilon^{1/\varkappa}|^2} \cos^2 \frac{\arg z}{\varkappa} = 2(\varkappa^2 - 1) \frac{|2i(z/\varepsilon)^{1/\varkappa} - 1|}{|i(z/\varepsilon)^{1/\varkappa} - 1|^2} \cos^2 \frac{\arg z}{\varkappa}.$$

Обозначим $i(z/\varepsilon)^{1/\varkappa} = \zeta$, тогда $\frac{\pi}{2} + \frac{1}{\varkappa} \arg z = \arg \zeta = \sigma$ и $\cos \frac{\arg z}{\varkappa} = \cos(\frac{\pi}{2} - \sigma) = \sin \sigma$. Поэтому $A(z, \varepsilon) = 2(\varkappa^2 - 1) \frac{|2\zeta - 1|}{|\zeta - 1|^2} \sin^2 \sigma = 2(\varkappa^2 - 1) A_1(\xi, \rho)$, где

$$A_1(\xi, \rho) = \frac{\sqrt{1 + 4\rho^2 - 4\xi} \rho^2 - \xi^2}{1 + \rho^2 - 2\xi}, \quad \xi + i\eta = \zeta = \rho e^{i\sigma} = \rho \cos \sigma + i\rho \sin \sigma. \quad (11)$$

Нужно найти максимальное значение $A_1(\xi, \rho)$ по ξ ($-\rho \leq \xi \leq \rho$) и ρ ($0 \leq \rho < \infty$).

Первая производная по ξ при фиксированном ρ выглядит довольно громоздко

$$\frac{dA_1(\xi, \rho)}{d\xi} = \frac{-2[6\xi^3 - (9\rho^2 + 6)\xi^2 + (4\rho^4 + 7\rho^2 + 1)\xi - 3\rho^4]}{\rho^2(1 + \rho^2 - 2\xi)^2 \sqrt{1 + 4\rho^2 - 4\xi}}.$$

Тем не менее отсюда сделаем вывод, что $\frac{dA_1(\xi, \rho)}{d\xi} > 0$ при $\xi \in [-\rho, 0]$. Поэтому $\max_{-\rho \leq \xi \leq \rho} A_1(\xi, \rho)$ будет достигаться при положительных значениях $\xi < \rho$. С учетом того, что

$$|2\rho - 1| \leq \sqrt{1 + 4\rho^2 - 4\xi} < \sqrt{1 + 4\rho^2}, \quad \xi \in (0, \rho], \quad (12)$$

выделим из выражения (11) (для $A_1(\xi, \rho)$) удобную для анализа часть

$$A_2(\xi, \rho) = (\rho^2 - \xi^2)[(1 + \rho^2 - 2\xi)\rho^2]^{-1}.$$

Производная этой функции по ξ обращается в нуль в точках ρ^2 и 1. Действительно,

$$A'_2 = \frac{dA_2(\xi, \rho)}{d\xi} = -\frac{2}{\rho^2} \frac{\xi(1 + \rho^2 - 2\xi) - \rho^2 + \xi^2}{(1 + \rho^2 - 2\xi)^2} = \frac{2}{\rho^2} \frac{\xi^2 - (1 + \rho^2)\xi + \rho^2}{(1 + \rho^2 - 2\xi)^2}$$

и при $\rho < 1$ $A'_2 = \begin{cases} > 0, & \xi \in [-\rho, \rho^2]; \\ < 0, & \xi \in (\rho^2, \rho], \end{cases}$ при $\rho > 1$ $A'_2 = \begin{cases} > 0, & \xi \in [-\rho, 1]; \\ < 0, & \xi \in (1, \rho]. \end{cases}$ Поэтому $\max_{\xi \in [-\rho, \rho]} A_2(\xi, \rho) = A_2(\rho^2, \rho) = \frac{\rho^2 - \rho^4}{(1 - \rho^2)\rho^2} = 1$ при $\rho \leq 1$ и $\max_{\xi \in [-\rho, \rho]} A_2(\xi, \rho) = A_2(1, \rho) = \frac{\rho^2 - 1}{(\rho^2 - 1)\rho^2} = \frac{1}{\rho^2}$ при $\rho \geq 1$.

С помощью неравенств (12) получим оценку для максимума функции (11) при $-\rho < \xi < \rho$. Именно,

$$\max_{\xi} A_1(\xi, \rho) = A_1(\xi_0, \rho) = \sqrt{1 + 4\rho^2 - 4\xi_0} A_2(\xi_0, \rho) \leq \sqrt{1 + 4\rho^2 - 4\xi_0} \max_{0 < \xi < \rho} A_2(\xi, \rho),$$

$$A_1(0, \rho) < \max_{\xi} A_1(\xi, \rho) < \sqrt{1 + 4\rho^2}, \quad \rho \leq 1; \quad \frac{2\rho - 1}{\rho^2} < \max_{\xi} A_1(\xi, \rho) < \frac{\sqrt{1 + 4\rho^2}}{\rho^2}, \quad \rho \geq 1.$$

При малых ρ $\max_{\xi} A_1(\xi, \rho)$ будет близок к 1 сверху.

Для $\bar{A} = \max_{z \in D_{\varkappa}} A(z, \varepsilon)$ получим оценку $2(\varkappa^2 - 1)A_1(0, \rho) < \bar{A} < 2(\varkappa^2 - 1)\sqrt{1 + 4\rho^2}$ ($\rho \leq 1$), которую запишем в ослабленном виде $2(\varkappa^2 - 1) < \bar{A} < 2(\varkappa^2 - 1)\sqrt{5}$. Чтобы $\bar{A} = \|\{\Phi(z, \varepsilon), z\}\|_{D_{\varkappa}}$ было не больше $4\varkappa - 2\varkappa^2$, нужно ограничение на \varkappa :

$$1 \leq \varkappa \leq \varkappa_0 \Rightarrow \|\{\Phi(z, \varepsilon), z\}\|_{D_{\varkappa}} \leq 4\varkappa - 2\varkappa^2, \quad (13)$$

причем

$$\varkappa_1 \approx 1,2 < \varkappa_0 < 1,36 \approx \varkappa_2. \quad (14)$$

Обоснуем неравенства (14):

- 1) $(\varkappa^2 - 1)\sqrt{5} = 2\varkappa - \varkappa^2 \Leftrightarrow \varkappa^2 - \frac{2\varkappa}{1+\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} = 0 \Rightarrow \varkappa_1 = \frac{1+\sqrt{6+\sqrt{5}}}{1+\sqrt{5}} \approx 1,2$;
- 2) $\varkappa^2 - 1 = 2\varkappa - \varkappa^2 \Leftrightarrow \varkappa^2 - \varkappa - 1/2 = 0 \Rightarrow \varkappa_2 = (1 + \sqrt{3})/2 \approx 1,36$.

7. С помощью функций $f(z, \varepsilon)$ с представлением (8) и $\Phi(z, \varepsilon)$ с представлением (10) построим последовательность функций с нарастающим порядком листности.

На нулевом этапе берем функцию

$$F_0(z, \varepsilon_0, \alpha_0) = [(f(z, \varepsilon_0) - a_0\varepsilon_0)^{1+\alpha_0} + b_0\varepsilon_0]^{1/(1+\alpha_0)},$$

α_0 и ε_0 — малые положительные величины, a_0 — фиксированная положительная величина меньше 1, $(-b_0\varepsilon_0)$ — точка пересечения с вещественной осью асимптоты к образу луча $\arg z = \varkappa\pi/2$ при отображении функцией $(f(z, \varepsilon_0) - a_0\varepsilon_0)^{1+\alpha_0}$.

На первом и последующих этапах вступает в действие функция (10). Будем иметь

$$\begin{aligned} F_1(z, \varepsilon_1, \alpha_1) &= [\{f[\Phi(F_0(z, \varepsilon_0, \alpha_0), \varepsilon_1), \varepsilon_1] - a_1\varepsilon_1\}^{1+\alpha_1} + b_1\varepsilon_1]^{1/(1+\alpha_1)}, \\ &\dots \\ F_n(z, \varepsilon_n, \alpha_n) &= [\{f[\Phi(F_{n-1}(z, \varepsilon_{n-1}, \alpha_{n-1}), \varepsilon_n), \varepsilon_n] - a_n\varepsilon_n\}^{1+\alpha_n} + b_n\varepsilon_n]^{1/(1+\alpha_n)}, \\ &\dots \end{aligned} \quad (15)$$

Все α_k — малые положительные величины, a_k — фиксированная положительная величина меньше 1, $(-b_k\varepsilon_k)$ — точка пересечения с вещественной осью асимптоты к образу луча $\arg z = \varkappa\pi/2$ при отображении функцией $(f(z, \varepsilon_k) - a_k\varepsilon_k)^{1+\alpha_k}$ ($k = 1, 2, \dots$). Отметим, что внешняя функция в любой (k -й) суперпозиции, начиная с первой, совпадает с функцией $F_0(z, \varepsilon_k, \alpha_k) = F_{0k}(z)$.

Наглядность действий представленных суперпозиций показывает, что $F_n(z, \varepsilon_n, \alpha_n)$ является $(n + 2)$ -листной функцией в области D_{\varkappa} .

Проявление первой суперпозиции видно из рис. 2.

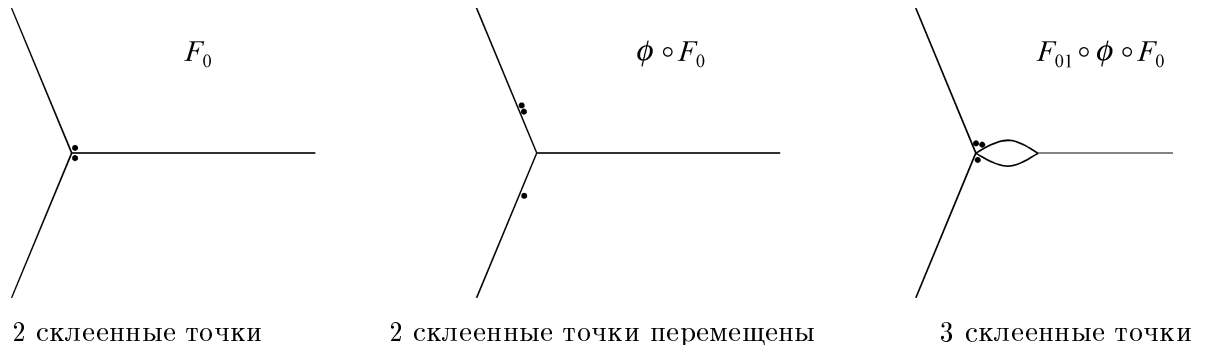


Рис. 2

8. Займемся неравенствами для норм шварцманов, в которых участвуют выписанные суперпозиции.

Начнем оценки с $F_0(z, \varepsilon_0, \alpha_0)$. Вычислим шварциан суперпозиций

$$\{F_0(z, \varepsilon_0, \alpha_0), z\} = \{(\omega_0(z) + b_0\varepsilon_0)^{1/(1+\alpha_0)}, \omega_0 + b_0\varepsilon_0\} \omega_0'^2(z) + \{\omega_0(z), z\}, \quad (16)$$

причем $\omega_0(z) = [f(z, \varepsilon_0) - a_0\varepsilon_0]^{1+\alpha_0}$, и

$$\{\omega_0(z), z\} = \{(f(z, \varepsilon_0) - a_0\varepsilon_0)^{1+\alpha_0}, f(z, \varepsilon_0)\} f'^2(z, \varepsilon_0) + \{f(z, \varepsilon_0), z\}.$$

При оценке $\sup_{z \in D_{\varkappa}} [\{ \omega_0(z), z \} |R^2(D_{\varkappa}, z)]$ учтем (9) и

$$\sup_{z \in D_{\varkappa}} \left[\frac{1 - (1 + \alpha_0)^2}{2|f(z, \varepsilon_0) - a_0\varepsilon_0|^2} |f'(z, \varepsilon_0)|^2 R^2(D_{\varkappa}, z) \right] = \frac{\alpha_0(\alpha_0 + 2)}{2} \sup_{z \in D_{\varkappa}} \left(\frac{|f'(z, \varepsilon_0)|}{|f(z, \varepsilon_0) - a_0\varepsilon_0|} R(D_{\varkappa}, z) \right)^2.$$

Так как $\ln(f(z, \varepsilon_0) - a_0\varepsilon_0) \prec \frac{2}{\varkappa} \ln z - \frac{2}{\varkappa} \ln a + \ln[f(a, \varepsilon_0) - a_0\varepsilon_0]$, $0 < a \in D_{\varkappa}$, то по принципу гиперболической метрики ([11], с. 326) получим (см. рис. 3 и 4)

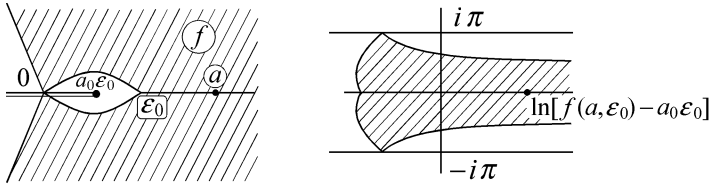


Рис. 3

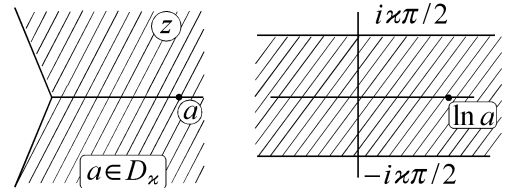


Рис. 4

$$\frac{|f'(z, \varepsilon_0)|}{|f(z, \varepsilon_0) - a_0\varepsilon_0|} = \frac{2}{\varkappa} \frac{|\psi'(z)|}{|\psi(z)|} \leq \frac{2}{\varkappa} \frac{1}{|\psi(z)|} \frac{R(D_{\varkappa}, \psi)}{R(D_{\varkappa}, z)} = \frac{2}{\varkappa} \frac{1}{|\psi(z)|} \frac{2\varkappa|\psi| \cos \frac{\arg \psi}{\varkappa}}{R(D_{\varkappa}, z)} \leq \frac{4}{R(D_{\varkappa}, z)}.$$

В переходах задействована функция $\psi(z)$, отображающая область D_{\varkappa} на часть этой области. Отсюда $|f'(z, \varepsilon_0)|R(D_{\varkappa}, z)/|f(z, \varepsilon_0) - a_0\varepsilon_0| \leq 4$ и $\|\{\omega_0(z), z\}\|_{D_{\varkappa}} = \sup_{z \in D_{\varkappa}} [\{ \omega_0(z), z \} |R^2(D_{\varkappa}, z)] \leq 4\varkappa - 2\varkappa^2 + \gamma_{01}$, где $\gamma_{01} = 8\alpha_0(\alpha_0 + 2)$ — малая величина при малом параметре α_0 .

Аналогично получается неравенство для (16)

$$\begin{aligned} \sup_{z \in D_{\varkappa}} [\{F_0(z, \varepsilon_0, \alpha_0), z\} |R^2(D_{\varkappa}, z)] &\leq \frac{1 - (1 + \alpha_0)^{-2}}{2} \sup_{z \in D_{\varkappa}} \left(\frac{|\omega_0'(z)|}{|\omega_0(z) + b_0\varepsilon_0|} R(D_{\varkappa}, z) \right)^2 + \\ &+ \|\{\omega_0(z), z\}\|_{D_{\varkappa}} \leq \frac{\alpha_0(\alpha_0 + 2)}{2(\alpha_0 + 1)^2} (\alpha_0 + 1) 2\varkappa + 4\varkappa - 2\varkappa^2 + \gamma_{01} = 4\varkappa - 2\varkappa^2 + \gamma_0, \end{aligned}$$

причем малые величины $\gamma_0 = \gamma_{01} + \gamma_{02}$ и $\gamma_{02} = \alpha_0 \frac{\alpha_0 + 2}{\alpha_0 + 1} \varkappa$.

$$\left[\ln(\omega_0(z) + b_0\varepsilon_0) \prec (1 + \alpha_0) \ln z - (1 + \alpha_0) \ln a + \ln[\omega_0(a) + b_0\varepsilon_0] \Rightarrow \right.$$

$$\begin{aligned} \frac{|\omega_0'(z)|}{|\omega_0(z) + b_0\varepsilon_0|} &= (1 + \alpha_0) \frac{|\psi'(z)|}{|\psi(z)|} \leq (1 + \alpha_0) \frac{1}{|\psi(z)|} \frac{R(D_{\varkappa}, \psi)}{R(D_{\varkappa}, z)} = \\ &= (1 + \alpha_0) \frac{1}{|\psi(z)|} \frac{2\varkappa|\psi| \cos \frac{\arg \psi}{\varkappa}}{R(D_{\varkappa}, z)} \leq \frac{2\varkappa(1 + \alpha_0)}{R(D_{\varkappa}, z)} \end{aligned}$$

Итоговая оценка для нулевого этапа получена в форме

$$\|\{F_0(z, \varepsilon_0, \alpha_0), z\}\| \leq 4\varkappa - 2\varkappa^2 + \gamma_0. \quad (17)$$

Оценим норму шварциана для первой суперпозиции. Вначале возьмем $\Phi[F_0(z, \varepsilon_0, \alpha_0), \varepsilon_1]$ и для шварциана $\{\Phi(F_0), z\}$ получим сумму $\{\Phi[F_0(z, \varepsilon_0, \alpha_0), \varepsilon_1], F_0\}F_0'^2 + \{F_0(z, \varepsilon_0, \alpha_0), z\}$, откуда

$$\|\{\Phi[F_0(z, \varepsilon_0, \alpha_0), \varepsilon_1], z\}\| \leq \sup_{z \in D_{\varkappa}} [\|\{\Phi[F_0, \varepsilon_1], F_0\}\| |F_0'^2(z, \varepsilon_0, \alpha_0)| R^2(D_{\varkappa}, z) + \|\{F_0(z, \varepsilon_0, \alpha_0), z\}\| R^2(D_{\varkappa}, z)]. \quad (18)$$

При оценке суммы модулей учтем следующее обстоятельство. Каждое слагаемое можно представить в форме поверхности над областью D_{\varkappa} , причем предельное положение этой поверхности — сама область D_{\varkappa} со столбиком в граничной точке. До предельного положения указанный столбик перейдет в область и сгладится. За исключением некоторой окрестности с максимальной высотой поверхность будет располагаться на малой высоте, покрывая всю область D_{\varkappa} и совпадая с этой областью в пределе, когда малые параметры достигнут нулевого предела. При этом высота поверхности обратится в нуль за исключением граничного столбика.

Выбором параметров можно развести окрестности максимальных значений двух поверхностей. При сложении поверхностей, на срезе которых имеются по одному максимуму, получится поверхность, на срезе которой будут два максимума. При этом максимальный модуль суммы будет мало отличаться от каждого из двух максимумов в отдельности.

На срезах поверхностей появятся линии, изображенные схематично на рис. 5.

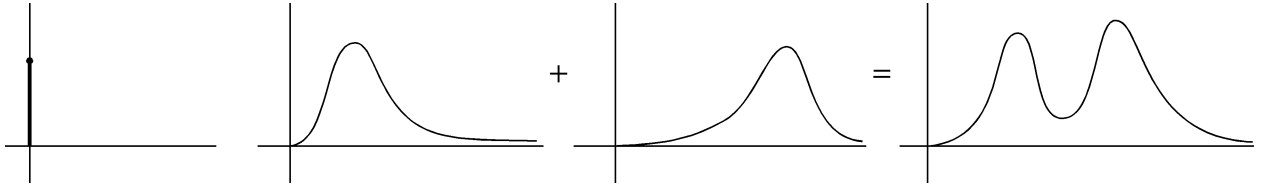


Рис. 5

Учтем неравенство (17) и неравенство (13), переписанное в виде

$$\|\{\Phi[F_0, \varepsilon_1], F_0\}\| \leq (4\varkappa - 2\varkappa^2)R^{-2}(D_{\varkappa}, F_0),$$

откуда

$$\|\{\Phi[F_0, \varepsilon_1], F_0\}\| |F_0'^2(z, \varepsilon_0, \alpha_0)| R^2(D_{\varkappa}, z) \leq (4\varkappa - 2\varkappa^2)R^{-2}(D_{\varkappa}, F_0)R^2(D_{\varkappa}, F_0) = 4\varkappa - 2\varkappa^2.$$

При учете разведенных максимумов двух слагаемых под знаком \sup в (18) получим

$$\|\{\Phi[F_0, \varepsilon_1], F_0\}\|_{D_{\varkappa}} \leq 4\varkappa - 2\varkappa^2 + \gamma_{11},$$

где γ_{11} — малая величина.

Далее возьмем $F_1(z, \varepsilon_1, \alpha_1) = (\omega_1(z) + b_1\varepsilon_1)^{1/(1+\alpha_1)}$, $\omega_1(z) = (f(\Phi, \varepsilon_1) - a_1\varepsilon_1)^{1+\alpha_1}$ и последовательно покажем, что

$$\|\{f[\Phi(F_0, \varepsilon_1), \varepsilon_1], z\}\|_{D_{\varkappa}} \leq 4\varkappa - 2\varkappa^2 + \gamma_{12},$$

и, как при оценках, связанных с $F_0(z, \varepsilon_0, \alpha_0)$, получим $\|\{\omega_1(z), z\}\|_{D_{\varkappa}} \leq 4\varkappa - 2\varkappa^2 + \gamma_{13}$ и $\|\{F_1(z, \varepsilon_1, \alpha_1), z\}\|_{D_{\varkappa}} \leq 4\varkappa - 2\varkappa^2 + \gamma_1$. В этих неравенствах слагаемые γ_{1k} ($k = 1, 2, 3$) и γ_1 являются сколь угодно малыми положительными величинами.

Аналогично происходит оценка нормы шварциана для функции $F_n(z, \varepsilon_n, \alpha_n)$ в (15). Для достижения гладких граничных значений и для упрощения оценок в непосредственной близости от границы области D_{\varkappa} можно использовать функции вида $F_n(z + \delta_n, \varepsilon_n, \alpha_n)$ вместо (15).

9. Сформулируем итоговый результат.

Теорема. *Функции $F_n(z, \varepsilon_n, \alpha_n)$ вида (15) являются $(n+2)$ -листными в области D_{\varkappa} и удовлетворяют условию*

$$\sup_{z \in D_{\varkappa}} [\|\{F_n(z, \varepsilon_n, \alpha_n), z\}\| R^2(D_{\varkappa}, z)] \leq 4\varkappa - 2\varkappa^2 + \gamma_n(\{\varepsilon_k\}_{k=0}^n, \{\alpha_k\}_{k=0}^n)$$

со сколь угодно малыми положительными величинами γ_n (зависящими от наборов $\{\varepsilon_k\}$ и $\{\alpha_k\}$) при дополнительном условии на \varkappa : $1 \leq \varkappa \leq \varkappa_0$ и $1,2 < \varkappa_0 < 1,36$.

Следствие. Функционал $\sup_{z \in D_\varkappa} [|f(z), z]| R^2(D_\varkappa, z)$ не является p -допустимым при $p \geq 2$ в областях D_\varkappa , содержащих полуплоскости, при $\varkappa \leq \varkappa_0$.

Замечание. Все изложенные построения и оценки оказываются наиболее простыми при $\varkappa = 1$, т. е. в случае полуплоскости. Авторы для страховки и вдохновения провели подробно все выкладки в этом случае, но публиковать не стали, потому что пример Хилла (годный для полуплоскости) является более впечатляющим.

Весь материал статьи в конспективном виде был доложен на конференции по теории функций в 2003 г. [12].

Литература

1. Lehtinen M. *On the inner radius of univalence for non-circular domains* // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI Math. – 1980. – V. 5. – P. 45–47.
2. Nehari Z. *The Schwarzian derivative and schlicht functions* // Bull. Amer. Math. Soc. – 1949. – V. 55. – P. 545–551.
3. Hille E. *Remarks on a paper by Zeev Nehari* // Bull. Amer. Math. Soc. – 1949. – V. 55. – P. 552–553.
4. Авхадиев Ф.Г. *Конформные отображения и краевые задачи*. – Казань: Казанск. фонд “Математика”, 1996. – 216 с.
5. Gehring F.W. *Univalent functions and the Schwarzian derivative* // Comment. Math. Helv. – 1977. – V. 52. – P. 561–572.
6. Avhadiev F.G., Kayumov I.R. *Admissible functions and infinite-valent functions* // Complex variables. – 1999. – V. 38. – P. 35–45.
7. Аксентьев Л.А. *Многолистные функции из расширенных классов Беккера и Нехари и их гидромеханическое истолкование* // Изв. вузов. Математика. – 1999. – № 6. – С. 3–14.
8. Kayumov I.R. *One property of Schwarzian derivative* // Demonstratio Math. – 2001. – V. 34. – P. 65–68.
9. Lehto O. *Univalent functions, Schwarzian derivatives and quasi-conformal mappings* // Enseign. Math. – 1987. – V. 24. – № 3–4. – P. 203–214.
10. Lehto O. *Remarks on Nehari’s theorem about the Schwarzian derivative and schlicht functions* // J. Anal. Math. – 1979. – V. 36. – P. 184–190.
11. Голузин Г.М. *Геометрическая теория функций комплексного переменного*. – М.: Наука, 1966. – 628 с.
12. Аксентьев Л.А., Ионова Е.А., Ромадин Д.Е. *Многолистные функции из расширенных классов Нехари и Беккера в неканонических областях* // Тр. матем. центра им. Н.И. Лобачевского. – 2003. – Т. 19. – С. 10–12.

Казанский государственный
университет

Поступила
27.05.2004