ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2003 МАТЕМАТИКА № 12 (499)

УДК 519.853

И.Я. ЗАБОТИН

РЕЛАКСАЦИОННЫЕ АЛГОРИТМЫ УСЛОВНОЙ МИНИМИЗАЦИИ НЕГЛАДКИХ СТРОГО ПСЕВДОВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ

В данной статье предлагается общая схема отыскания точки выпуклого множества. Одна из ее реализаций дает способ построения направлений спуска для негладких строго псевдовыпуклых функций. На основе этого способа разрабатываются релаксационные алгоритмы решения задачи псевдовыпуклого программирования.

Пусть $G \subset R_n$ — выпуклое ограниченное замкнутое множество, $\overset{\circ}{G} \neq \emptyset$, $W(x,G) = \{a \in R_n : \langle a, z-x\rangle \leq 0 \ \forall z \in G\}$ — конус обобщенно-опорных векторов для множества G в точке $x \in R_n$. Опишем процедуру, которая используется при реализации предлагаемых ниже методов или может служить схемой отыскания точки множества G.

Процедура π. Пусть $y \notin \overset{\circ}{G}$. Выбирается конечное множество $P \subset \{p \in R_n : p \in W(y,G),\ \|p\| \leq C < \infty\}$. Строится выпуклое ограниченное замкнутое множество $M_0 \subset R_n$, содержащее точку $y^* = \arg\min\limits_{x\in G}\max\limits_{p\in P}\langle p, x-y\rangle$. Выбираются такие числа $\overline{\mu}$, $\overline{\overline{\mu}}$, что

$$0 < \overline{\mu} \leq \overline{\overline{\mu}} < 1, \tag{1}$$

полагается $i=0$.

1°. Отыскивается точка $\overline{\overline{y_i}} \in M_i$, удовлетворяющая условию

$$\max_{p\in P}\langle p, \overline{\overline{y_i}} - y\rangle \leq \max_{p\in P}\langle p, y^* - y\rangle. \tag{2}$$

Если $\overline{\overline{y_i}} \in G$, то процесс заканчивается. В противном случае полагается $h_i = \overline{\overline{y_i}} - y$.

2°. Полагается $\overline{y}_i = y + \alpha_i h_i$, где α_i — максимальное из чисел $\alpha \geq 0$, для которых $y + \alpha h_i \in \mathrm{co}(\{y\} \cup G)$.

3°. Полагается $\overline{z}_i = \begin{cases} \overline{y}_i, & \alpha_i > 0; \\ \overline{y}_i + \overline{\mu}(\overline{\overline{y_i}} - \overline{y}_i), & \alpha_i = 0, \end{cases}$

$\overline{\overline{z_i}} = \overline{y}_i + \overline{\overline{\mu}}(\overline{\overline{y_i}} - \overline{y}_i)$, $z_i = \lambda_i \overline{z}_i + (1-\lambda_i)\overline{\overline{z_i}}$, где $\lambda_i \in [0,1]$.

4°. В множестве $\{a \in R_n : a \in W(z_i, G),\ \|a\| = 1\}$ выбирается такое подмножество A_i, что для всех $a \in A_i$ и некоторого $\delta > 0$ выполняется неравенство

$$\langle a, y - z_i\rangle \leq -\delta. \tag{3}$$

5°. Полагается $M_{i+1} = M_i \cap \{x \in R_n : \langle a, x - z_i\rangle \leq 0 \ \forall a \in A_i\}$, и следует переход к п. 1° при i, увеличенном на единицу.

Возможность выбора множеств A_i и числа δ, удовлетворяющих условию (3), будет обсуждаться позже при описании реализации процедуры π. Заметим, что если $y \notin G$, то процедуру можно считать схемой отыскания точки из G, поскольку ниже будет доказано существование подпоследовательности точек $\overline{\overline{y_i}}$, сходящейся к точке из G. Предложенная схема, вообще говоря, не обеспечивает решение задачи отыскания точки из множества за конечное число шагов, поэтому ее нельзя назвать эффективной. Однако, во-первых, если задать некоторое выпуклое замкнутое множество B такое, что $\overset{\circ}{B} \neq \emptyset$, $B \subset \overset{\circ}{G}$, и применить процедуру π для нахождения точки множества B, то через конечное число шагов будет найдена точка из G. Во-вторых, одна из реализаций процедуры π будет использована ниже как практический способ построения направлений спуска в предлагаемых методах минимизации строго псевдовыпуклой функции.

Итак, в результате применения описанной процедуры либо на некотором шаге будет найдена точка $\overline{\overline{y_i}} \in G$, либо выработается последовательность $\{\overline{\overline{y_i}}\}$, $i \in I = \{0, 1, \dots\}$.

Лемма 1. *Пусть последовательность* $\{\overline{\overline{y_i}}\}$, $i \in I$, *построена согласно процедуре* π. *Тогда найдется подпоследовательность* $\{\overline{\overline{y_i}}\}$, $i \in I' \subset I$, *сходящаяся к некоторой точке из* G.

Доказательство. Поскольку для всех $i, j \in I$ таких, что $j > i$, выполняются включения $M_j \subset M_i$, $\overline{\overline{y_j}} \in M_i$, и любой элемент множества A_i является обобщенно-опорным для множества M_j, то $\langle a, \overline{\overline{y_j}} - z_i \rangle \le 0 \ \forall a \in A_i$, $j > i$. Кроме того,

$$z_i = \overline{\overline{y_i}} + \gamma_i (y - \overline{\overline{y_i}}), \tag{4}$$

где $\gamma_i \in (0, 1)$, $i \in I$. Значит, $\langle a, \overline{\overline{y_i}} - \overline{\overline{y_j}} \rangle \ge \gamma_i \langle a, \overline{\overline{y_i}} - y \rangle$, а поскольку $\langle a, \overline{\overline{y_i}} - y \rangle \ge \langle a, z_i - y \rangle \ge \delta$, то $\langle a, \overline{\overline{y_i}} - \overline{\overline{y_j}} \rangle \ge \gamma_i \delta$ для всех $j > i$ и всех $a \in A_i$. Отсюда с учетом того, что $\|a\| = 1$, получим оценку $\|\overline{\overline{y_i}} - \overline{\overline{y_j}}\| \ge \gamma_i \delta$, где $j > i$. В силу ограниченности последовательности $\{\overline{\overline{y_i}}\}$, $i \in I$, из предыдущего неравенства следует существование такой подпоследовательности $\{\gamma_i\}$, $i \in I_1 \subset I$, что $\gamma_i \to 0$, $i \to \infty$, $i \in I_1$. Тогда из (4), учитывая ограниченность сверху величин $\|y - \overline{\overline{y_i}}\|$, $i \in I_1$, получаем предельное соотношение

$$\lim_{i \in I_1} \|z_i - \overline{\overline{y_i}}\| = 0. \tag{5}$$

Далее, для каждого $i \in I_1$ в силу (1) найдется такое число $\mu_i \in [\overline{\mu}, \overline{\overline{\mu}}]$, что $z_i - \overline{\overline{y_i}} = \mu_i (\overline{y}_i - \overline{\overline{y_i}})$ или

$$(1/\mu_i) \|z_i - \overline{\overline{y_i}}\| = \|\overline{y}_i - \overline{\overline{y_i}}\|, \quad i \in I_1. \tag{6}$$

Согласно (2) найдется такое $r > 0$, что $\|y - \overline{\overline{y_i}}\| \ge r \ \forall i \in I_1$. Тогда нетрудно доказать существование такого числа $\sigma \in (0, 1)$, что

$$\|y - \overline{\overline{y_i}}\| \ge \sigma \|x - \overline{\overline{y_i}}\| \tag{7}$$

для любого $x \in G$, $i \in I_1$. Пусть для некоторого $i \in I_1$ выполняется включение $\overline{y}_i \in G$. Тогда найдется точка $\widetilde{y}_i \in G$ (напр., $\widetilde{y}_i = \mathrm{Pr}_G(\overline{\overline{y_i}})$) такая, что $\|\overline{y}_i - \overline{\overline{y_i}}\| \ge \|\widetilde{y}_i - \overline{\overline{y_i}}\|$. Если $\overline{y}_i \notin G$ для некоторого $i \in I_1$, то $\overline{y}_i = y$, и в силу (7)

$$\|\overline{y}_i - \overline{\overline{y_i}}\| \ge \sigma \|x - \overline{\overline{y_i}}\| \tag{8}$$

для всех $x \in G$. Таким образом, можно построить такую последовательность точек $\widetilde{y}_i$, $i \in I_1$, что $\widetilde{y}_i \in G$ и $\|\overline{y}_i - \overline{\overline{y_i}}\| \ge \sigma \|\widetilde{y}_i - \overline{\overline{y_i}}\|$ для всех $i \in I_1$. Отсюда и из равенства (6) следует неравенство

$$(1/(\mu_i \sigma)) \|z_i - \overline{\overline{y_i}}\| \ge \|\widetilde{y}_i - \overline{\overline{y_i}}\|, \quad i \in I_1. \tag{9}$$

Выделим из ограниченной последовательности $\{\widetilde{y}_i\}$, $i \in I_1$, сходящуюся подпоследовательность $\{\widetilde{y}_i\}$, $i \in I_2 \subset I_1$. Пусть $\widetilde{y}$ — ее предельная точка. Отметим, что $\widetilde{y} \in G$ в силу замкнутости G. Переходя в неравенстве (9) к пределу по $i \to \infty$, $i \in I_2$, и учитывая (5), получим предельное соотношение $\lim\limits_{i \in I_2} \|\widetilde{y}_i - \overline{\overline{y_i}}\| = 0$, из которого следует утверждение леммы. $\square$

Заметим, что точки $\overline{\overline{y_i}}$ в предложенной процедуре можно искать, например, из условия $\max\limits_{p \in P} \langle p, \overline{\overline{y_i}} - y \rangle = \min\limits_{x \in M_i} \max\limits_{p \in P} \langle p, x - y \rangle$. В таком случае множество M_0 удобно выбирать в виде многогранника, поскольку задача отыскания точек $\overline{\overline{y_i}}$ при всех $i \in I$ будет задачей линейного программирования.

Процедура π имеет пока лишь принципиальный характер, т. к. не указан способ построения множеств A_i, удовлетворяющих условию (3). Приведем пример использования процедуры. Опишем ее реализацию для множества G специального вида и покажем, как с помощью этой реализации можно решать задачу отыскания направления спуска для строго псевдовыпуклой функции.

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема по направлениям в R_n, $f'(x_0, h)$ — ее производная в точке x_0 по направлению h. Функция $f(x)$ называется [1] псевдовыпуклой в R_n, если в любой точке x_0 выполняется импликация

$$f'(x_0, x - x_0) \geq 0 \implies f(x) \geq f(x_0)$$

для всех $x \in R_n$. Функция $f(x)$ названа строго псевдовыпуклой в R_n [1], если в любой точке x_0 для всех $x \in R_n$, $x \neq x_0$, имеет место импликация

$$f'(x_0, x - x_0) \geq 0 \implies f(x) > f(x_0)$$

либо эквивалентная ей импликация $f(x) \leq f(x_0) \implies f'(x_0, x - x_0) < 0$.

Итак, пусть $f(x)$ — строго псевдовыпуклая дифференцируемая по направлениям в R_n функция, $y \in R_n$, множество $E(y) = \{x \in R_n : f(x) \leq f(y)\}$ ограничено, $\overset{\circ}{E}(y) \neq \emptyset$, $G = E(y) \cap Q$, где $Q \subset R_n$ — выпуклое замкнутое множество такое, что $y \in Q$ и $\overset{\circ}{G} \neq \emptyset$. Пусть $W(f, y) = \{a \in R_n : \langle a, x - y\rangle \leq 0 \; \forall x \in E(y)\}$ — конус обобщенно-опорных векторов для функции $f(x)$ в точке y [2]. Реализация процедуры π заключается в следующем.

Задается множество $P \subset \{p \in R_n : p \in W(f, y), \; \|p\| \leq c < \infty\}$. Как и в процедуре π, выбираются множество M_0 и числа $\overline{\mu}$, $\overline{\overline{\mu}}$. На i-м шаге, $i = 0, 1, \ldots$, согласно пунктам 1°–3° процедуры π с учетом того, что $G = E(y) \cap Q = \mathrm{co}(\{y\} \cup G)$, находятся точки $\overline{\overline{y_i}}$, $\overline{y}_i$, z_i. Далее, если

$$f(z_i) \geq f(y), \tag{10}$$

то строится множество $A_i \subset \{a \in R_n : a \in W(f, z_i), \; \|a\| = 1\}$. В противном случае выбирается множество A_i элементов $a \in W(z_i, Q)$, $\|a\| = 1$, такое, что выполняется (3) при всех $a \in A_i$ и некотором $\delta > 0$. Затем выполняется п. 5° процедуры.

Докажем, что этот алгоритм действительно является реализацией процедуры π. Отметим, что в описанном алгоритме элементы множеств P и A_i являются обобщенно-опорными векторами для множества G в точках y и z_i соответственно. Поэтому для доказательства того, что алгоритм является реализацией процедуры, достаточно показать выполнение для векторов $a \in A_i$ условия (3) при всех $i \in I$ и некотором $\delta > 0$.

Пусть множество $I_1 \subset I$ таково, что для всех $i \in I_1$ справедливо (10), а $I_2 = I \setminus I_1$. Для $i \in I_2$ условие (3) выполняется по построению алгоритма, причем если

$$y \in \overset{\circ}{Q}, \tag{11}$$

то в множество A_i, $i \in I_2$, можно включать любые векторы $a \in W(z_i, Q)$, $\|a\| = 1$, т. к. для этих векторов неравенство (3) заведомо выполняется при некотором $\delta > 0$. Возможность выполнения условия (3) для всех $i \in I_1$ обосновывает

Лемма 2. *Существует такое число $\delta > 0$, что для всех $i \in I_1$ и всех $a \in W(f, z_i)$, $\|a\| = 1$, выполняется неравенство* (3).

Доказательство. Отметим, что согласно (10) $\langle a, y - z_i\rangle \leq 0$ для всех $i \in I_1$ и всех $a \in W(f, z_i)$. Допустим, что утверждение леммы неверно. Тогда найдутся подпоследовательности точек z_i, $i \in I' \subset I_1$, и $a_i \in W(f, z_i)$, $\|a_i\| = 1$, $i \in I'$, такие, что $\lim\limits_{i \in I'} \langle a_i, y - z_i\rangle = 0$. Выделим из последовательностей $\{z_i\}$, $\{a_i\}$, $i \in I'$, сходящиеся подпоследовательности $\{z_i\}$, $\{a_i\}$, $i \in I'' \subset I'$. Пусть соответственно $\overline{z}$ и $\overline{a}$ — их предельные точки. Тогда

$$\lim_{i \in I''} \langle a_i, y - z_i\rangle = \langle \overline{a}, y - \overline{z}\rangle = 0. \tag{12}$$

Докажем, что

$$\overline{a} \in W(f, \overline{z}), \tag{13}$$

т. е. для всех $x \in E(\overline{z})$ выполняется неравенство $\langle \overline{a}, x - \overline{z} \rangle \le 0$. Предположим существование такой точки $\overline{x} \in E(\overline{z})$, что $\langle \overline{a}, \overline{x} - \overline{z} \rangle = \gamma > 0$. Выберем такие окрестности ω_1, ω_2, ω_3 точек $\overline{a}$, $\overline{x}$ и $\overline{z}$ соответственно, что $\langle a, x - z \rangle \ge \gamma/2 \ \forall a \in \omega_1$, $x \in \omega_2$, $z \in \omega_3$. Поскольку $a_i \in \omega_1$, $z_i \in \omega_3$ для всех $i \in I''$, начиная с некоторого номера $N \ge 0$, то $\langle a_i, x - z_i \rangle \ge \gamma/2$ для всех $i \ge N$, $i \in I''$, и всех $x \in \omega_2$. Так как $f(\overline{x}) \le f(\overline{z})$, то найдутся точка $\widetilde{x}$ и номер $N' \ge N$ такие, что $f(\widetilde{x}) < f(z_i)$ $\forall\ i \ge N'$, $i \in I''$. Тогда, с одной стороны, $\langle a_i, \widetilde{x} - z_i \rangle \ge \gamma/2 \ \forall\ i \ge N'$, $i \in I''$, а с другой стороны, $\langle a_i, \widetilde{x} - z_i \rangle < 0 \ \forall\ i \ge N'$, $i \in I''$, поскольку $\widetilde{x} \in \overset{\circ}{E}(z_i)$, $i \ge N'$, $i \in I''$. Полученное противоречие доказывает включение (13).

Далее, в силу (10) $f(\overline{z}) \ge f(y)$. Если допустить, что $f(\overline{z}) > f(y)$, то согласно (13) $\langle \overline{a}, y - \overline{z} \rangle < 0$, а это противоречит (12). Значит, $f(\overline{z}) = f(y)$. Тогда из определения строгой псевдовыпуклости функции $f(x)$ следует, что $y - \overline{z}$ — направление спуска для $f(x)$ в точке $\overline{z}$, т. е. при некотором $\lambda > 0$ выполняется включение $\overline{z} + \lambda(y - \overline{z}) \in \overset{\circ}{E}(\overline{z})$. Отсюда с учетом (13) следует неравенство $\langle \overline{a}, \overline{z} + \lambda(y - \overline{z}) - \overline{z} \rangle < 0$, которое противоречит (12). $\square$

Таким образом, приведенный выше алгоритм действительно является реализацией процедуры π. Если в алгоритме положить $Q = R_n$, то для всех $i \in I$ справедливо неравенство (10), и $I_2 = \emptyset$. Подчеркнем также, что при выполнении включения (11) в реализации не нужно конкретно задавать значение δ, используемое в самой процедуре π, т. к. согласно сделанному выше замечанию и лемме 2 для всех $i \in I_1$ и $i \in I_2$ условие (3) заведомо выполняется при некотором $\delta > 0$.

Покажем теперь, что с помощью этой реализации за конечное число шагов можно построить для строго псевдовыпуклой функции $f(x)$ направление убывания в точке y. Пусть согласно алгоритму получена последовательность точек $\overline{\overline{y_i}}$, $i \in I$. Тогда по лемме 1 найдется подпоследовательность этой последовательности, сходящаяся к некоторой точке $\widetilde{y} \in E(y) \cap Q$. Очевидно, $\widetilde{y} \ne y$ и $f(\widetilde{y}) \le f(y)$. Отсюда с учетом строгой псевдовыпуклости и непрерывности функции $f(x)$ следует существование такой окрестности w точки $\widetilde{y}$, что для всех $x \in w$ вектор $x - y$ будет направлением спуска для функции $f(x)$ в точке y. Значит, в ходе построения последовательности $\{\overline{\overline{y_i}}\}$, $i \in I$, найдется номер $i_0 \in I$, начиная с которого все направления $\overline{\overline{y_i}} - y$ станут искомыми.

Оказывается, что направление убывания, которое можно получить с помощью описанной реализации, позволяет существенно уменьшать значение функции. Этот факт будет использован ниже при построении релаксационных методов минимизации. В [3] такой способ отыскания направлений применен в методе безусловной минимизации строго псевдовыпуклой функции.

Отметим, что реализация процедуры π может использоваться при построении направлений спуска и в том случае, если функция $f(x)$ строго выпукла. Тогда в алгоритме множество P можно задавать как подмножество множества $\partial f(y)$ субградиентов функции $f(x)$ в точке y, а в качестве элементов множества A_i, $i \in I_1$, можно выбирать векторы $p = g/\|g\|$, где $g \in \partial f(z_i)$.

Перейдем к построению двух методов решения задачи

$$\min_{x \in D} f(x), \tag{14}$$

где $D \subset R_n$ — выпуклое замкнутое множество, $\overset{\circ}{D} \ne \emptyset$, $f(x)$ — дифференцируемая по направлениям строго псевдовыпуклая в некоторой окрестности множества D функция. Пусть $x^* = \arg\min\limits_{x \in D} f(x)$, $f^* = f(x^*)$, $D(y) = \{x \in D : f(x) \le f(y)\}$, где $y \in D$.

Первый из предлагаемых методов решения задачи (14) вырабатывает последовательность приближений x_k, $k \in K = \{0, 1, \dots\}$, и заключается в следующем. Выбирается точка начального приближения $x_0 \in D$, задаются числа λ, σ_k, $k \in K$, такие, что $0 < \lambda \le 1$, $0 < \overline{\sigma} \le \sigma_k \le 1$, $k \in K$.

Пусть найдена точка x_k, отличная от x^*. Тогда выбирается подмножество P_k множества

$$W_k = \{p \in R_n : p \in W(f, x_k), \quad \|p\| = 1\}$$

и отыскивается такая точка $\overline{x}_k \in D(x_k)$, что

$$\max_{p \in P_k} \langle p, \overline{x}_k - x_k \rangle \leq \sigma_k \min_{x \in D(x_k)} \max_{p \in P_k} \langle p, x - x_k \rangle. \tag{15}$$

Находится α_k — максимальное из чисел $\alpha \geq 0$, при которых $x_k + \alpha(\overline{x}_k - x_k) \in D(x_k)$, и полагается $s_k = \alpha_k(\overline{x}_k - x_k)$, $x_{k+1} = x_k + \beta_k s_k$, где шаг β_k выбирается из условия

$$f(x_k + \beta_k s_k) \leq (1 - \lambda) f(x_k) + \lambda w_k, \tag{16}$$

$w_k = \min\limits_{0 < \beta \leq 1} f(x_k + \beta s_k)$.

Второй из предлагаемых методов предназначен для решения задачи (14) с дополнительным условием строгой выпуклости множества D, т. е. с условием, что

$$\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2 \in \overset{\circ}{D} \quad \forall x_1, x_2 \in D, \quad \lambda \in (0, 1).$$

Этот алгоритм отличается от предыдущего лишь тем, что на k-м шаге подмножество P_k выбирается из множества

$$W_k = \{p \in R_n : p \in W_f(x_k, D), \quad \|p\| = 1\},$$

где $W_f(x_k, D) = \{a \in R_n : \langle a, x - x_k \rangle \leq 0 \ \forall x \in D(x_k)\}$ — конус обобщенно-опорных векторов для функции $f(x)$ в точке x_k относительно множества D.

Заметим, что если в первом алгоритме в множество P_k включаются только векторы конуса $W(f, x_k)$, то во втором кроме них могут включаться элементы множества $W(x_k, D)$, а также нормированные линейные комбинации с неотрицательными коэффициентами векторов из $W(f, x_k)$ и $W(x_k, D)$. Если в задаче (14)

$$D = \{x \in R_n : F(x) \leq 0\} \tag{17}$$

и функции $f(x)$, $F(x)$ строго выпуклы, то в алгоритмах в качестве элементов множеств P_k могут выбираться нормированные субградиенты функций $f(x)$ и $F(x)$ в точках x_k. Отметим также, что множество $D(x_k)$ имеет общий вид, и задача отыскания точки $\overline{x}_k$ из условия (15) является сложной с практической точки зрения. Позже будет предложен способ решения этой задачи, основанный на процедуре π и позволяющий найти $\overline{x}_k$, решая конечное число задач линейного программирования.

Обоснуем сходимость методов, предварительно доказав некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 3. *Пусть функция $f(x)$ псевдовыпукла и дифференцируема по направлениям в R_n, множество $D \subset R_n$ выпукло и замкнуто, последовательности точек $x_k \in D$, $p_k \in W_f(x_k, D)$, $k \in K$, таковы, что $x_k \to \overline{x}$, $k \to \infty$, $p_k \to \overline{p}$, $k \to \infty$. Тогда*

$$\overline{p} \in W_f(\overline{x}, D). \tag{18}$$

Доказательство. Покажем, что для всех $x \in D(\overline{x})$ выполняется неравенство

$$\langle \overline{p}, x - \overline{x} \rangle \leq 0,$$

тогда лемма будет доказана. Допустим противное, т. е. существуют $\gamma > 0$ и точка $\overline{y} \in D$ такие, что $f(\overline{y}) \leq f(\overline{x})$ и $\langle \overline{p}, \overline{y} - \overline{x} \rangle = \gamma$. Выберем окрестности ω_1 точки $\overline{p}$, ω_2 точки $\overline{y}$ и ω_3 точки $\overline{x}$ так, чтобы для всех $p \in \omega_1$, $y \in \omega_2$, $x \in \omega_3$ выполнялось неравенство

$$\langle p, y - x \rangle \geq \gamma/2.$$

Так как $\overline{p}$ и $\overline{x}$ — предельные точки последовательностей $\{p_k\}$ и $\{x_k\}$ соответственно, то

$$\langle p_k, y - x_k \rangle \geq \gamma/2 \tag{19}$$

для всех $k \in K$, начиная с некоторого номера $N \geq 0$, и для всех $y \in \omega_2$. Поскольку $\overline{y} \in D(\overline{x})$, то в окрестности ω_2 можно выбрать такую точку $\widetilde{y} \in \overset{\circ}{D}$, что $f(\widetilde{y}) < f(x_k)\ \forall k \in K,\ k \geq N'$, где $N' \geq N$. Таким образом, с одной стороны, в силу (19) $\langle p_k, \widetilde{y} - x_k \rangle \geq \gamma/2\ \forall k \geq N',\ k \in K$, а с другой стороны, $\langle p_k, \widetilde{y} - x_k \rangle < 0\ \forall k \geq N',\ k \in K$, т. к. $\widetilde{y} \in \overset{\circ}{D}(x_k),\ k \geq N',\ k \in K$. Полученное противоречие доказывает утверждение леммы. $\square$

По схеме обоснования леммы 3 доказывается

Лемма 4. *Пусть в условиях леммы 3 последовательность точек p_k, $k \in K$, выбрана из конуса $W(f, x_k)$. Тогда $\overline{p} \in W(f, \overline{x})$.*

Лемма 5. *Пусть функция $f(x)$ строго псевдовыпукла и дифференцируема по направлениям в R_n, множество $D \subset R_n$ выпукло, замкнуто, $\overset{\circ}{D} \neq \emptyset$, последовательность точек $x_k \in D$, $k \in K$, такова, что для всех $k \in K$ выполняется неравенство*

$$f(x_k) \geq f^* + t \tag{20}$$

при некотором $t > 0$. Тогда найдется такое $\gamma > 0$, что

$$\langle p, x^* - x_k \rangle \leq -\gamma \tag{21}$$

для всех $p \in W(f, x_k)$, $\|p\| = 1$, и всех $k \in K$. Если множество D, кроме того, строго выпукло, то (21) *справедливо также для всех $p \in W_f(x_k, D)$, $\|p\| = 1$, и всех $k \in K$.*

Доказательство. Поскольку $x^* \in D(x_k)$, $k \in K$, то $\langle p, x^* - x_k \rangle \leq 0$ для всех $p \in W(f, x_k)$, $p \in W_f(x_k, D)$, $\|p\| = 1$, $k \in K$. Докажем первое утверждение леммы. Допустим, что оно неверно. Тогда существуют сходящаяся подпоследовательность $\{x_k\}$, $k \in K' \subset K$, последовательности $\{x_k\}$, $k \in K$, и сходящаяся последовательность точек $p_k \in W(f, x_k)$, $\|p_k\| = 1$, $k \in K'$, такие, что

$$\lim_{k \in K'} \langle p_k, x^* - x_k \rangle = 0. \tag{22}$$

Пусть $\overline{x}$ и $\overline{p}$ — предельные точки последовательностей $\{x_k\}$, $k \in K'$, и $\{p_k\}$, $k \in K'$, соответственно. Отметим, что $\overline{x} \neq x^*$ согласно (20), а $\|\overline{p}\| = 1$. Тогда в силу (22)

$$\langle \overline{p}, x^* - \overline{x} \rangle = 0. \tag{23}$$

Это равенство противоречит тому, что $x^* \in \overset{\circ}{E}(\overline{x})$, а вектор $\overline{p}$ по лемме 4 является обобщенно-опорным для функции $f(x)$ в точке $\overline{x}$.

Докажем второе утверждение леммы по той же схеме, считая теперь множество D строго выпуклым. Допустим, что утверждение неверно. Выделим, как и выше, сходящуюся подпоследовательность $\{x_k\}$, $k \in K' \subset K$, последовательности $\{x_k\}$, $k \in K$, с предельной точкой $\overline{x}$ и сходящуюся последовательность $\{p_k\}$, $k \in K'$, $p_k \in W_f(x_k, D)$, $\|p_k\| = 1$, $k \in K'$, с предельной точкой $\overline{p}$ такие, что выполняется (22), а значит, и (23). Положим $y = (1/2)x^* + (1/2)\overline{x}$. Тогда из (23) следует

$$\langle \overline{p}, y - \overline{x} \rangle = 0. \tag{24}$$

Поскольку множества D и $E(\overline{x})$ строго выпуклы и $\overset{\circ}{D}(\overline{x}) \neq \emptyset$, то $D(\overline{x})$ также строго выпукло. Следовательно, $y \in \overset{\circ}{D}(\overline{x})$, а т. к. по лемме 3 выполняется включение (18), то $\langle \overline{p}, y - \overline{x} \rangle < 0$. Последнее неравенство противоречит (24). $\square$

Теорема. *Пусть для функции $f(x)$ и множества D выполняются условия, указанные в постановке задачи* (14), *и множество $D(x_0)$ ограничено. Тогда для последовательности $\{x_k\}$, $k \in K$, построенной первым из предложенных методов, справедливо предельное соотношение*

$$\lim_{k \to \infty} f(x_k) = f^*. \tag{25}$$

Если множество D, кроме того, строго выпукло, то для последовательности $\{x_k\}$, $k \in K$, построенной по второму методу, также выполняется равенство (25).

Доказательство. Пусть последовательность $\{x_k\}$, $k \in K$, построена любым из двух предложенных методов. Положим $\widetilde{x}_k = x_k + s_k$. Так как $\widetilde{x}_k \in D$, $f(\widetilde{x}_k) \le f(x_k)$, $k \in K$, а функция $f(x)$ строго псевдовыпукла, то направление s_k является подходящим для $f(x)$ в точке x_k при всех $k \in K$. Поэтому последовательность $\{f(x_k)\}$ релаксационна, и существует

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = \overline{f} \ge f^*.$$

Допустим, что утверждение теоремы, касающееся того метода, по которому построена последовательность $\{x_k\}$, неверно. Тогда $\overline{f} > f^*$, и для всех $k \in K$ при некотором $t > 0$ справедливо неравенство (20). Следовательно, по лемме 5 найдется такое $\gamma > 0$, что для всех $k \in K$ и всех $p \in P_k$ выполняется (21), а значит,

$$\max_{p\in P_k}\langle p, x^* - x_k\rangle \le -\gamma, \quad k \in K. \tag{26}$$

В силу (20) найдутся точка $u_k \in D(x_k)$ и число $\theta_k > 0$ такие, что $x^* = x_k + \theta_k(u_k - x_k)$, $\theta_k \le \theta < \infty$, для всех $k \in K$. Тогда с учетом (15) $\max\limits_{p\in P_k}\langle p, x^* - x_k\rangle \ge \theta \max\limits_{p\in P_k}\langle p, u_k - x_k\rangle \ge \theta \min\limits_{x\in D(x_k)} \max\limits_{p\in P_k}\langle p, x - x_k\rangle \ge (\theta/\overline{\sigma}) \max\limits_{p\in P_k}\langle p, \overline{x}_k - x_k\rangle$, $k \in K$. Отсюда и из неравенства (26) следует $\|\overline{x}_k - x_k\| \ge \delta = \gamma\overline{\sigma}/\theta$ и

$$\|\widetilde{x}_k - x_k\| \ge \delta \ \ \forall\, k \in K. \tag{27}$$

Далее, выделим из ограниченной последовательности $\{x_k\}$, $k \in K$, сходящуюся подпоследовательность $\{x_k\}$, $k \in K' \subset K$, так, чтобы последовательность $\{\widetilde{x}_k\}$, $k \in K'$, была также сходящейся. Пусть, соответственно, $\overline{x}$ и $\widetilde{x}$ — предельные точки этих подпоследовательностей. Согласно (27) $\overline{x} \ne \widetilde{x}$. Кроме того, $f(\widetilde{x}) \le f(\overline{x})$, т.к. $f(\widetilde{x}_k) \le f(x_k)$, $k \in K'$. Тогда из условия строгой псевдовыпуклости $f(x)$ следует, что вектор $\widetilde{x} - \overline{x}$ является подходящим для функции $f(x)$ в точке $\overline{x}$ относительно D направлением. Поэтому найдется такое $\overline{\beta} \in (0,1]$, что $\overline{x} + \overline{\beta}(\widetilde{x} - \overline{x}) \in D$ и $f(\overline{x} + \overline{\beta}(\widetilde{x} - \overline{x})) < f(\overline{x})$ или

$$f(\overline{x} + \overline{\beta}(\widetilde{x} - \overline{x})) < \overline{f}. \tag{28}$$

В силу (16) $f(x_{k+1}) \le (1-\lambda)f(x_k) + \lambda f(x_k + \overline{\beta}(\widetilde{x}_k - x_k))$ $\forall k \in K'$. Переходя в последнем неравенстве к пределу по $k \to \infty$, $k \in K'$, с учетом того, что $\lim\limits_{k\in K'} f(x_k) = \lim\limits_{k\in K'} f(x_{k+1}) = \overline{f}$, получим соотношение, противоречащее (28). $\square$

Выше уже отмечалась трудоемкость отыскания в методах точек $\overline{x}_k$ из условия (15). Укажем теперь практический способ решения задачи (15), считая, что $\sigma_k < 1$, а множество D задано в виде (17). Отметим, что D можно задать системой неравенств $f_j(x) \le 0$, $j \in J$, со строго псевдовыпуклыми функциями в левой части, а затем положить $F(x) = \max\limits_{j\in J} f_j(x)$. Нетрудно проверить, что функция $F(x)$ будет также строго псевдовыпуклой.

Применим для решения задачи нахождения точки $\overline{x}_k$ на k-м шаге методов процедуру π, положив в ней $y = x_k$, $G = D(x_k)$, $P = P_k$ и выбрав выпуклое ограниченное замкнутое множество M_0 так, что $D \subset M_0$. Если на i-м шаге процедуры выполнится включение $\overline{\overline{y_i}} \in D(x_k)$, то можно положить $\overline{x}_k = \overline{\overline{y_i}}$, и задача решена. В противном случае согласно пунктам 2°, 3° отыскиваются точки $\overline{y}_i$ и z_i. Выбирается A_i как подмножество множества $\{a \in R_n : a \in W(f, z_i),\ \|a\| = 1\}$, если $f(z_i) \ge f(x_k)$, и подмножество множества $\{a \in R_n : a \in W(F, z_i),\ \|a\| = 1\}$ в противном случае. Затем строится M_{i+1} согласно п. 5° процедуры.

Покажем, что для этого алгоритма выполняется условие (3) при некотором $\delta > 0$, не зависящем от $i \in I$. Пусть $I' = \{i \in I : f(z_i) \ge f(y)\}$, $I'' = I \setminus I'$. Поскольку $F(z_i) \ge F(y)$ $\forall i \in I''$, то по лемме 2 найдутся такие числа $\delta', \delta'' > 0$, что $\langle a, y - z_i\rangle \le -\delta'$ для всех $i \in I'$, $a \in W(f, z_i)$, $\|a\| = 1$, и $\langle a, y - z_i\rangle \le -\delta''$ для всех $i \in I''$, $a \in W(F, z_i)$, $\|a\| = 1$. Значит, для всех $i \in I$ и всех

$a \in A_i$ выполняется неравенство $\langle a, y - z_i\rangle \leq -\max\{\delta', \delta''\}$, и описанный алгоритм отыскания точки $\overline{x}_k$ является реализацией процедуры π.

Докажем теперь, что этим алгоритмом за конечное число итераций действительно отыскивается точка $\overline{x}_k$ из условия (15). При обосновании леммы 1 было показано, что существует подпоследовательность $\{\overline{\overline{y_i}}\}$, $i \in I_1 \subset I$, для которой справедливо (5). Тогда в силу выбора точек z_i выполняется равенство $\lim\limits_{i\in I_1} \|\overline{\overline{y_i}} - \overline{y_i}\| = 0$, из которого следует существование такого номера i_0, что $\|\overline{y}_{i_0} - x_k\| \geq \sigma_k \|\overline{\overline{y}}_{i_0} - x_k\|$. Значит, $(1/\sigma_k) \max\limits_{p\in P_k} \langle p, \overline{y}_{i_0} - x_k\rangle \leq \max\limits_{p\in P_k} \langle p, \overline{\overline{y}}_{i_0} - x_k\rangle \leq \min\limits_{x\in D(x_k)} \max\limits_{p\in P_k} \langle p, x - x_k\rangle$, и точка $\overline{x}_k = \overline{y}_{i_0}$ является искомой.

Очевидно, что в описанном алгоритме множество M_0 удобно выбирать в виде многогранника, а $\overline{\overline{y_i}}$ отыскивать как точки минимума функции $\max\limits_{p\in P_k} \langle p, x - x_k\rangle$ на множествах M_i.

Если способ задания множества D не конкретизирован, то при отыскании $\overline{x}_k$ на i-м шаге процедуры множество A_i можно задавать следующим образом. Если $z_i \notin E(x_k)$, то $A_i \subset \{a \in R_n : a \in W(f, z_i),\ \|a\| = 1\}$. В противном случае A_i выбирается из элементов $a \in W(z_i, D)$, $\|a\| = 1$, так, чтобы выполнялось неравенство (3) при всех $a \in A_i$ и некотором $\delta > 0$. Подчеркнем, что если $x_k \in \mathring{D}$, то (3) справедливо для всех $a \in W(z_i, D)$, поэтому в таком случае задавать δ в процедуре нет необходимости, и любой нормированный вектор из $W(z_i, D)$ можно включать в A_i.

Заметим, что, используя свойство непрерывности функции $g(x) = \max\limits_{p\in P} \langle p, x - y\rangle$, для сходящейся к точке из G подпоследовательности $\{\overline{\overline{y_i}}\}$, $i \in I' \subset I$, последовательности $\{\overline{\overline{y_i}}\}$, $i \in I$, построенной процедурой π, нетрудно доказать равенство $\lim\limits_{i\in I'} g(\overline{\overline{y_i}}) = \min\limits_{x\in G} g(x)$. Поэтому процедуру π можно рассматривать, в частности, как метод минимизации на G функции $g(x)$. Если при этом в качестве $\overline{\overline{y_i}}$ выбирать точки минимума $g(x)$ на множествах M_i, то процедура идейно близка к известным методам опорных множеств В.П. Булатова для задачи выпуклого программирования ([4], с. 25).

В заключение приведем оценки скорости сходимости предложенных методов, пользуясь результатами работы [5], в которой известная методика В.Г. Карманова ([6], с. 172) получения оценок для методов выпуклого программирования распространена на задачи псевдовыпуклого программирования. Пусть последовательность $\{x_k\}$ построена любым из двух предложенных алгоритмов, $a_k = f(x_k) - f^*$, и последовательность чисел θ_k, $k \in K$, такова, что

$$\theta_k a_k \leq -f'(x_k, x^* - x_k) \quad \forall\, k \in K. \tag{29}$$

Тогда согласно теореме 3 ([5])

$$f(x_m) - f^* \leq a_0 \left(1 + a_0 \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\theta_k^2 (f(x_k) - f(x_{k+1}))}{\left(f'(x_k, x^* - x_k)\right)^2}\right)^{-1}, \quad m = 1, 2, \ldots$$

Если функция $f(x)$ дифференцируема, $d = \operatorname{diam} D(x_0)$, то из предыдущего неравенства следует

$$f(x_m) - f^* \leq a_0 \left(1 + \frac{a_0}{d^2} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\theta_k^2 (f(x_k) - f(x_{k+1}))}{\|f'(x_k)\|^2}\right)^{-1}, \quad m = 1, 2, \ldots$$

Отметим, что последовательность $\{\theta_k\}$, удовлетворяющая условию (29), существует согласно определению строгой псевдовыпуклости функции $f(x)$, причем можно положить $\theta_k = 1$, $k \in K$, если $f(x)$ строго выпукла.

Литература

1. Заботин Я.И., Кораблев А.И. *Псевдовыпуклые функционалы и их экстремальные свойства* // Изв. вузов. Математика. – 1974. – № 4. – С. 27–31.

2. Заботин Я.И., Кораблев А.И., Хабибуллин Р.Ф. *О минимизации квазивыпуклых функционалов* // Изв. вузов. Математика. – 1972. – № 10. – С. 27–33.
3. Заботин И.Я. *Метод минимизации негладкой строго псевдовыпуклой функции* // Тез. докл. 12-й Всерос. конф. “Математическое программирование и приложения”, 24–28 февраля 2003 г. – Екатеринбург, 2003. – С. 109.
4. Булатов В.П. *Методы погружения в задачах оптимизации.* – Новосибирск: Наука, 1977. – 158 с.
5. Кораблев А.И. *О релаксационных методах минимизации псевдовыпуклых функций* // Исследов. по прикл. матем. – Казань, 1980. – Вып. 8. – С. 3–8.
6. Карманов В.Г. *Математическое программирование.* Учебное пособие. – М.: Наука, 1986. – 288 с.

Казанский государственный университет

Поступила 12.05.2003