Известия вузов. Математика *http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/*
2010, №9, с. 71–75 *Гос. номер статьи по НТЦ "Информрегистр" 0421000123\0083*

А.Ю. ДАНЬШИН

О СТРУКТУРЕ ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫХ ПОЧТИ ПРОЕКТИВНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ В КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ ОБЩЕГО ПРОСТРАНСТВА ПУТЕЙ

Аннотация. Найдены необходимые условия для того, чтобы векторное поле на касательном расслоении общего пространства путей было инфинитезимальным почти проективным преобразованием в случае, когда тензорные поля, определяющие комплексы автопараллельных кривых являются полными лифтами Яно–Окубо–Кагана тензорных полей базового многообразия.

Ключевые слова: инфинитезимальное почти проективное преобразование, общее пространство путей, касательное расслоение, полный лифт Яно–Окубо–Кагана.

УДК: 514.763

Abstract. We obtain the necessary conditions for a vector field on a tangent bundle to be an infinitesimal almost projective transformation of a general path space in the case when sets of autoparallel curves are the Yano–Okubo–Kagan natural lift of tensor fields of the base manifold.

Keywords: infinitesimal almost projective transformation, general path space, tangent bundle, Yano–Okubo–Kagan natural lift.

Введение

Данная работа является продолжением работ автора [1]–[3], посвященных исследованию структуры инфинитезимальных преобразований в касательных расслоениях общих пространств путей и финслеровых пространств [4].

В работах А.В. Аминовой [5], [6] было введено понятие инфинитезимальных почти проективных преобразований, т. е. таких преобразований, которые сохраняют линейный или квадратичный комплекс геодезических. С помощью предложенного Ф.И. Каганом [7] аппарата полных лифтов тензоров произвольных валентностей из многообразия M в его касательное расслоение $T(M)$ исследуется структура инфинитезимальных почти проективных преобразований на касательном расслоении $T(M)$, наделенном аффинной связностью $\widetilde{\Gamma}$, полученной с помощью лифта Яно–Окубо–Кагана [8], [9] из связности G общего пространства путей $M(G)$. Найдены необходимые условия для того, чтобы векторное поле на $T(M(G))$ было инфинитезимальным почти проективным преобразованием относительно связности $\widetilde{\Gamma}$ в случае, когда тензорные поля, определяющие комплексы автопараллельных кривых, являются полными лифтами тензорных полей базового многообразия.

Поступила 26.01.2010

1. Определения, обозначения, постановка задачи

В статье используются обозначения, принятые в [7].

Путями на многообразии M называются кривые $x^i = x^i(t)$, $i = 1, \dots, n$, $n = \dim M$, удовлетворяющие уравнениям

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + 2G^i(x, \dot{x}) = 0, \tag{1}$$

где $\dot{x}^i = dx^i/dt^i$, $G^i(x,\dot{x})$ — заданные функции линейных элементов $(x^i, \dot{x}^k)$, положительно однородные второй степени по $\dot{x}$. Многообразие M, на котором заданы пути (1), называется общим пространством путей (ОПП) [4] и обозначается ниже как $M(G)$. Связность G в общем пространстве путей задается коэффициентами

$$G^i_{km} \equiv G^i_{\cdot k \cdot m} \equiv \frac{\partial^2 G}{\partial \dot{x}^k \partial \dot{x}^m}, \tag{2}$$

удовлетворяющими в соответствии с теоремой Эйлера соотношению $2G^i = G^i_{km}\dot{x}^k\dot{x}^m$.

Напомним определение: *векторное поле v на ОПП называется инфинитезимальным проективным преобразованием в ОПП, если порождаемая этим полем в окрестности каждой точки $x \in M$ локальная однопараметрическая группа преобразований сохраняет пути.* Необходимое и достаточное условие этого состоит в том, что [4]

$$\mathcal{L}_v G^i = \dot{x}^i P, \tag{3}$$

где $P = P(x, \dot{x})$ — так называемый проективный фактор, $\mathcal{L}_v$ — производная Ли вдоль векторного поля v. Уравнение (3) равносильно равенству

$$\mathcal{L}_u G^i_{km} = 2\delta^i_{(k} P_{m)} + \dot{x}^i P_{km},$$

где $P_k \equiv P_{\cdot k}$, $P_{km} \equiv P_{\cdot k \cdot m}$; окаймляющие индексы круглые скобки означают нормированную симметризацию: $T_{(ik)} \equiv \frac{1}{2}(T_{ik} + T_{ki})$.

Все тензоры и связности на $T(M)$ будут записываться в специальной системе координат $z^\alpha = (x^k, \dot{x}^m)$, $\alpha, \beta, \gamma, \ldots = 1, \dots, 2n$. Знаком “тильда” будут отмечаться тензорные поля и связности, заданные на $T(M)$.

Как известно [10], связность в $T(M)$ есть n-мерное распределение, задаваемое набором форм $\theta^i = d\dot{x}^i + H^i_k(x, \dot{x})dx^k$. Связность в ОПП естественным образом порождает в $T(M)$ нелинейную связность, коэффициенты которой $H^i_k = G^i_k$. Опираясь на этот факт, можно строить полные лифты тензорных полей относительно связности G. Как известно [7], любое тензорное поле $\widetilde{T}$ валентности (a, b) на $T(M)$ может быть представлено в виде полного лифта набора $N = 2^{a+b}$ тензорных полей $\underset{\nu}{t}(x, \dot{x})$ $(\nu = 0, \dots, N-1)$:

$$\widetilde{T} = {}^G[\underset{0}{t}, \underset{1}{t}, \dots, \underset{N-1}{t}].$$

Отметим несколько типов лифтов, используемых в дальнейшем,

1) вертикальный лифт векторного поля v: ${}^V v = {}^G[0, v]$;

2) горизонтальный лифт векторного поля v: ${}^H v = {}^G[v, 0]$;

3) естественный лифт векторного поля v: ${}^N v = {}^G[v, \overset{0}{\nabla} v]$, где $\overset{0}{\nabla} = \dot{x}^k \nabla_k$, ∇_k — ковариантная производная относительно связности G;

4) горизонтально-векторный лифт тензорного поля A валентности $(1,1)$: ${}^{HX}A = {}^G[A \cdot \dot{x}, 0]$, где $(A \cdot \dot{x})^i = A^i_k \dot{x}^k$;

5) вертикально-векторный лифт тензорного поля A валентности $(1,1)$: ${}^{VX}A = {}^G[0, A \cdot \dot{x}]$.

Следуя К. Яно, Т. Окубо [8] и Ф.И. Кагану [9], введем на касательном расслоении $T(M(G))$ симметричную аффинную связность $\widetilde{\Gamma}$, называемую естественным лифтом связности G. Ее ненулевые коэффициенты $\widetilde{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}(z)$ имеют вид

$$\widetilde{\Gamma}^{i+n}_{k+nm} = \widetilde{\Gamma}^{i+n}_{mk+n} = \widetilde{\Gamma}^{i}_{km} = G^i_{km}, \widetilde{\Gamma}^{i+n}_{km} = \dot{x}^t \partial_t G^i_{km} - 2G^t G^i_{kmt},$$

где $\partial_k = \partial/\partial x^k$, $G^i_{kmt} \equiv G^i_{km\cdot t}$. Кривые $z^\alpha = z^\alpha(t)$, удовлетворяющие уравнению

$$\frac{d^2 z^\alpha}{dt^2} + \widetilde{\Gamma}^\alpha{}_{\beta\gamma}\frac{dz^\beta}{dt}\frac{dz^\gamma}{dt} = 0, \tag{4}$$

называются автопараллельными кривыми, поскольку их касательные векторы получаются друг из друга последовательными бесконечно малыми параллельными переносами относительно связности $\widetilde{\Gamma}$.

В работах А.В. Аминовой [5], [6] были введены инфинитезимальные преобразования, сохраняющие комплексы геодезических, которые получили название почти проективных движений или инфинитезимальных почти проективных преобразований. Здесь мы рассматриваем аналогичные понятия для случая касательного расслоения $T(M)$.

Рассмотрим поле квадрик $a_{\alpha\beta}(z)\dot{z}^\alpha\dot{z}^\beta = 0$ (соответственно поле p-мерных плоскостей $a^A_\gamma(z)\dot{z}^\gamma = 0$, $A = 1, \ldots, 2n-p$) на $T(M)$. Пусть направление касательной к кривой, удовлетворяющей уравнению (4), принадлежит в каждой точке соответствующей квадрике (сответственно p-плоскости). Совокупность всех таких кривых называется квадратичным (сответственно линейным) комплексом автопараллельных кривых. Инфинитезимальные преобразования, которые сохраняют заданный комплекс автопараллельных кривых, называются почти проективными преобразованиями. Векторное поле, порождающее локальную однопараметрическую группу почти проективных преобразований, удовлетворяет уравнениям

$$\mathcal{L}_{\widetilde{v}}\widetilde{\Gamma}^\alpha{}_{\beta\gamma} = 2\delta^\alpha_{(\beta}\widetilde{\varphi}_{\gamma)} + \widetilde{K}^\alpha{}_{\beta\gamma}, \tag{5}$$

где $\widetilde{K}^\alpha{}_{\beta\gamma} = \Psi^\alpha a_{\beta\gamma}$ в случае квадратичного комплекса и $\widetilde{K}^\alpha{}_{\beta\gamma} = 2\Lambda^\alpha_{A(\beta}a^A_{\gamma)}$ в случае линейного комплекса. Здесь Ψ^α — векторное поле на $T(M)$, $\Lambda^\alpha_{A\beta}$ — набор ($A = 1, \ldots, 2n-p$) тензорных полей валентности $(1,1)$ на $T(M)$.

Цель нашего исследования — определить, какие тензорные поля на базе порождают векторное поле $\widetilde{v}$ как полный лифт.

Доказательство приведенных ниже теорем основано на представлении производной Ли связности $\widetilde{\Gamma}$ в виде полного лифта. В уравнениях (5) в виде полных лифтов представляются также правая часть (5) и поля $\widetilde{v}$, $\widetilde{\varphi}$, $\widetilde{K}$, Ψ, a, Λ_A и a^A, т.е.

$$\widetilde{v} = {}^G[\underset{0}{v}, \underset{1}{v}], \quad \widetilde{\varphi} = {}^G[\underset{0}{p}, \underset{1}{p}], \quad \widetilde{K} = {}^G[\underset{0}{K}, \underset{1}{K}, \underset{2}{K}, \underset{3}{K}, \underset{4}{K}, \underset{5}{K}, \underset{6}{K}, \underset{7}{K}],$$

$$\Psi = {}^G[\underset{0}{\psi}, \underset{1}{\psi}], \quad a = {}^G[\underset{0}{a}, \underset{1}{a}, \underset{2}{a}, \underset{3}{a}], \quad \Lambda_A = {}^G[\underset{0}{\lambda}_A, \underset{1}{\lambda}_A, \underset{2}{\lambda}_A, \underset{3}{\lambda}_A], a^A = {}^G[\underset{0}{a}{}^A, \underset{1}{a}{}^A].$$

Эти вычисления основываются на теории лифтов, развитой в работе [7]. В результате оказывается, что уравнения (5) эквивалентны системе уравнений

$$\underset{0}{v}{}^i{}_{\cdot k\cdot m} = \underset{0}{K}{}^i_{km},$$

$$\underset{1}{v}{}^i{}_{\cdot k\cdot m} - \underset{0}{v}{}^t G^i_{kmt} = 2\delta^i_{(k}\underset{0}{p}{}_{m)} + \underset{1}{K}{}^i_{km},$$

$$\nabla_k(\underset{0}{v}{}^i{}_{\cdot m}) = \delta^i_k \underset{0}{p}{}_m + \underset{2}{K}{}^i_{km},$$

$$\nabla_k(\underset{1}{v}{}^i{}_{\cdot m}) + \underset{1}{v}{}^t G^i_{kmt} + \underset{0}{v}{}^t{}_{\cdot m} H^i_{tks}\dot{x}^s + \underset{0}{v}{}^t H^i_{mkt} = \delta^i_m \underset{1}{p}{}_k + \underset{3}{K}{}^i_{km},$$

$$\underset{1}{v}{}^{t} G^i_{kmt} + \nabla_k\nabla_m \underset{0}{v}{}^{i} - \underset{0}{v}{}^{i}{}_{\cdot t} H^t_{mks}\dot{x}^s + \underset{0}{v}{}^{t} H^i_{mkt} = 2\delta^i_{(k}\underset{1}{p}{}_{m)} + \underset{6}{K}{}^{i}_{km},$$

$$\nabla_k\nabla_m \underset{1}{v}{}^{i} - \underset{1}{v}{}^{i}{}_{\cdot t} H^t_{mks}\dot{x}^s + \underset{1}{v}{}^{t}(H^i_{mkt} + \dot{x}^s\nabla_s G^i_{kmt}) + H^i_{tks}\dot{x}^s\nabla_m \underset{0}{v}{}^{t} + \\ + H^i_{tms}\dot{x}^s\nabla_k \underset{0}{v}{}^{t} + \underset{0}{v}{}^{t}(\dot{x}^s\nabla_k H^i_{tms} + \dot{x}^s\nabla_s H^i_{mkt} + H^s_k G^i_{tms} - H^s_t G^i_{kms}) = \underset{7}{K}{}^{i}_{km}, \quad (6)$$

где

$$H^i_{klm} = \partial_m G^i_{kl} - \partial_l G^i_{km} + G^s_{kl}G^i_{sm} - G^s_{km}G^i_{sl} + G^s_l G^i_{kms} - G^s_m G^i_{kls}$$

— тензор кривизны связности G [4], а тензоры $\underset{0}{K}{}^{i}_{km}$, $\underset{1}{K}{}^{i}_{km}$, $\underset{2}{K}{}^{i}_{km}$, $\underset{3}{K}{}^{i}_{km}$, $\underset{6}{K}{}^{i}_{km}$, $\underset{7}{K}{}^{i}_{km}$ равны

$$\underset{0}{K}{}^{i}_{km} = \underset{0}{\psi}{}^{i}\underset{0}{a}{}_{km}, \quad \underset{1}{K}{}^{i}_{km} = \underset{1}{\psi}{}^{i}\underset{0}{a}{}_{km}, \quad \underset{2}{K}{}^{i}_{km} = \underset{4}{K}{}^{i}_{mk} = \underset{0}{\psi}{}^{i}\underset{1}{a}{}_{km},$$
$$\underset{3}{K}{}^{i}_{km} = \underset{5}{K}{}^{i}_{mk} = \underset{1}{\psi}{}^{i}\underset{1}{a}{}_{km}, \quad \underset{6}{K}{}^{i}_{km} = \underset{0}{\psi}{}^{i}\underset{3}{a}{}_{km}, \quad \underset{7}{K}{}^{i}_{km} = \underset{1}{\psi}{}^{i}\underset{3}{a}{}_{km}$$

для квадратичного комплекса и

$$\underset{0}{K}{}^{i}_{km} = 2\,\underset{0}{\lambda}{}^{i}_{A(k}\,\underset{0}{a}{}^{A}_{m)}, \quad \underset{1}{K}{}^{i}_{km} = 2\,\underset{1}{\lambda}{}^{i}_{A(k}\,\underset{0}{a}{}^{A}_{m)}, \quad \underset{2}{K}{}^{i}_{km} = \underset{4}{K}{}^{i}_{mk} = \underset{0}{\lambda}{}^{i}_{Ak}\,\underset{1}{a}{}^{A}_{m} + \underset{2}{\lambda}{}^{i}_{Am}\,\underset{0}{a}{}^{A}_{k},$$
$$\underset{3}{K}{}^{i}_{km} = \underset{5}{K}{}^{i}_{mk} = \underset{1}{\lambda}{}^{i}_{Ak}\,\underset{1}{a}{}^{A}_{m} + \underset{3}{\lambda}{}^{i}_{Am}\,\underset{0}{a}{}^{A}_{k}, \quad \underset{6}{K}{}^{i}_{km} = 2\,\underset{2}{\lambda}{}^{i}_{A(k}\,\underset{1}{a}{}^{A}_{m)}, \quad \underset{7}{K}{}^{i}_{km} = 2\,\underset{3}{\lambda}{}^{i}_{A(k}\,\underset{1}{a}{}^{A}_{m)}$$

для линейного комплекса.

В данной работе будет предполагаться, что поля тензоров $\underset{0}{\psi}{}^{i}$, $\underset{1}{\psi}{}^{i}$, $\underset{0}{a}{}_{km}$, $\underset{1}{a}{}_{km}$, $\underset{2}{a}{}_{km}$, $\underset{3}{a}{}_{km}$, $\underset{0}{\lambda}{}^{i}_{Ak}$, $\underset{1}{\lambda}{}^{i}_{Ak}$, $\underset{2}{\lambda}{}^{i}_{Ak}$, $\underset{3}{\lambda}{}^{i}_{Ak}$, $\underset{0}{a}{}^{A}_{m}$, $\underset{1}{a}{}^{A}_{m}$ не зависят от переменных $\dot{x}^i$.

2. Теорема о разложении векторного поля инфинитезимальных почти проективных преобразований в $T(M(G))$

Решением поставленной задачи является

Теорема. *Пусть $M(G)$ — общее пространство путей ($n > 2$). Для того чтобы векторное поле $\widetilde{v}$ на касательном расслоении $T(M(G))$ было инфинитезимальным почти проективным преобразованием связности $\widetilde{\psi}$, являющейся естественным лифтом связности G, необходимо, чтобы оно имело вид*

$$\widetilde{v} = {}^{N}u + {}^{V}v + {}^{HX}A + {}^{VX}B + p(\dot{x})^{VX}id + \frac{1}{2}({}^{H}\underset{0}{K}(\dot{x},\dot{x}) + {}^{V}\underset{1}{K}(\dot{x},\dot{x})),$$

где

$u = u(x)$ — векторное поле на M является инфинитезимальным почти проективным преобразованием на $M(G)$

$$\mathcal{L}_u G^i_{km} = 2\delta^i_{(k}q_{m)} + \underset{6}{K}{}^{i}_{km}$$

с проективным фактором $P = q_k(x)\dot{x}^k$,

$v = v(x)$ — векторное поле на M, удовлетворяющее уравнению

$$\mathcal{L}_v G^i_{km} = \underset{7}{K}{}^{i}_{km}$$

и условиям

$$v^t G^i_{kmt} = 0, v^t\dot{x}^s\nabla_s G^i_{kmt} = 0,$$

$p = p(x)$, $q = q(x)$ — 1-формы на M, удовлетворяющие равенствам

$$\nabla_k p_m + \nabla_k \underset{2}{K}{}^{l}_{lm} = 0, (\nabla_k q_m + \nabla_l \underset{6}{K}{}^{l}_{km} - \nabla_k \underset{6}{K}{}^{l}_{lm} + \nabla_k \underset{3}{K}{}^{l}_{lm})\dot{x}^k\dot{x}^m = 0,$$

$A = A(x)$, $B = B(x)$ — *тензорные поля валентности* $(1,1)$ *на* M, *удовлетворяющие условиям*

$$\nabla_k A^i_m = \delta^i_k p_m + \underset{2}{K}{}^i_{mk}, \quad \nabla_k B^i_m = -\delta^i_k q_m + \underset{3}{K}{}^i_{mk} - \underset{6}{K}{}^i_{km}.$$

При этом уравнение для $\widetilde{v}$ *имеет вид* (5), *где* $\widetilde{\varphi} = {}^G[p, r]$, 1-*форма* r *задается разложением*

$$r_k = q_k(x) + \frac{1}{n+1}((n+2)\nabla_{[t}\underset{2}{K}{}^l_{|l|k]} + \nabla_l \underset{2}{K}{}^l_{[tk]} + \nabla_{[k}\underset{1}{K}{}^l_{|l|t]})\dot{x}^t,$$

а тензорные поля, порождающие комплекс автопараллельных кривых, удовлетворяют условиям

$$\nabla_s \underset{0}{K}{}^i_{km} = 0, \nabla_{(k}\underset{2}{K}{}^l_{|l|m)} + \nabla_{(k}\underset{2}{K}{}^l_{m)l} - \nabla_{(k}\underset{1}{K}{}^l_{|l|m)} = 0, (2\underset{2}{K}{}^s_{tr}G^i_{kms} - \underset{1}{K}{}^s_{tr}G^i_{kms})\dot{x}^t\dot{x}^r = 0.$$

В заключение автор благодарит профессора А.В. Аминову за постановку задачи и полезные советы.

Литература

[1] Даньшин А.Ю. *Инфинитезимальные проективные преобразования в касательном расслоении финслеровых многообразий*, Изв. вузов. Математика, №7, 12–21 (1995).

[2] Даньшин А.Ю. *Инфинитезимальные проективные преобразования с естественным лифтом связности общего пространства путей*, Изв. вузов. Математика, №9, 8–12 (1997).

[3] Даньшин А.Ю. *Инфинитезимальные конформные преобразования в касательном расслоении финслеровых многообразий*, Изв. вузов. Математика, №7, 11–17 (1998).

[4] Рунд Х. *Дифференциальная геометрия финслеровых пространств* (Наука, М., 1981).

[5] Аминова А.В. *Определение бесконечно малых почти проективных преобразований*, Гравитация и теория относительности, Вып. 13 (1976).

[6] Аминова А.В. *Группы почти проективных движений пространств аффинной связности*, Изв. вузов. Математика, №4, 71–75 (1979).

[7] Каган Ф.И. *К теории лифтов тензорных полей из многообразия в его касательный пучок*, Изв. вузов. Математика, №9, 37–46 (1969).

[8] Yano K., Okubo T. *On the tangent bundles of generalized spaces of paths*, Rend. Mat., VI Ser., **4** (2), 327–348 (1971).

[9] Каган Ф.И. *Аффинные связности на касательном расслоении*, Изв. вузов. Математика, №2, 31–42 (1975).

[10] Номидзу К. *Группы Ли и дифференциальная геометрия* (Ин. лит., М., 1960).

А.Ю. Даньшин

доцент, кафедра теории относительности и гравитации,
Казанский государственный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420111,

`e-mail:` Alexander.Danshin@ksu.ru

A.Yu. Danshin

Associate Professor, Chair of Theory of Relativity and Gravitation,
Kazan State University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

`e-mail:` Alexander.Danshin@ksu.ru