ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 12 (451)

УДК 519.10

М.К. КРАВЦОВ, Е.В. ЛУКШИН

О НЕЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ВЕРШИНАХ МНОГОГРАННИКА МНОГОИНДЕКСНОЙ АКСИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ВЫБОРА

1. Введение

В отличие от классической транспортной задачи (ТЗ) многогранник многоиндексной ТЗ может иметь нецелочисленные вершины при целочисленных исходных данных (напр., [1]–[3]). Это, естественно, затрудняет поиск целочисленных решений, превращая, например, проблему проверки целочисленной совместности трехиндексной планарной ТЗ в NP-полную [4]. Установлена также NP-полнота аксиальной и планарной трехиндексной задачи (проблемы) выбора [5], [6]. Этим, в частности, объясняется большой интерес к свойствам и методам решения многоиндексных ТЗ, который оправдывает исследования структуры многогранников этого класса задач.

В этой работе исследуются нецелочисленные вершины многогранника широко распространенной в приложениях многоиндексной аксиальной задачи выбора.

2. Основные определения, свойства и результаты

Пусть натуральные числа p и n удовлетворяют неравенствам $p \geq 2$ и $n \geq 2$. Рассмотрим многогранник $M(p,n)$, заданный условиями

$$\sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_{s-1}=1}^{n} \sum_{i_{s+1}=1}^{n} \cdots \sum_{i_p=1}^{n} x_{i_1 \dots i_p} = 1 \quad \forall i_s \in N_n,\ \forall s \in N_p, \tag{1}$$

$$x_{i_1 \dots i_p} \geq 0 \quad \forall (i_1, \dots, i_p) \in N_n^p, \tag{2}$$

где $N_t = \{1, 2, \dots, t\}$, $N_n^p = \underbrace{N_n \times \cdots \times N_n}_{p}$. Поскольку целочисленные точки многогранника $M(p,n)$ служат допустимой областью p-индексной аксиальной задачи выбора ([1], с. 308), то многогранник $M(p,n)$ будем называть многогранником p-индексной аксиальной задачи выбора. Заметим, что при $p = 2$ этот многогранник является многогранником хорошо известной и изученной задачи о назначениях.

Будем пользоваться терминологией и обозначениями из [1].

Известны следующие основные свойства многогранника $M(p,n)$ ([1], [2]):

1) ранг матрицы системы (1) равен $(n-1)p+1$; из этого свойства вытекает, что вершина многогранника $M(p,n)$ содержит не более чем $(n-1)p+1$ положительных компонент;

2) размерность многогранника $M(p,n)$ равна $n^p - (n-1)p - 1$;

3) количество целочисленных вершин многогранника $M(p,n)$ равно $(n!)^{p-1}$;

4) многогранник $M(2,n)$ является целочисленным, т. е. все его вершины имеют целочисленные компоненты;

5) диаметр многогранника $M(2,n)$ при $n \geq 4$ равен 2;

6) каждой вершине многогранника $M(2,n)$ отвечает $2^{n-1}n^{n-2}$ допустимых базисов;

Работа поддержана Фондом фундаментальных исследований Республики Беларусь (проект № Ф97-266).

7) от любого допустимого базиса многогранника $M(2,n)$ можно перейти в любой другой допустимый базис не более, чем за $2n-1$ шагов, причем в построенной последовательности каждые два рядом стоящих базиса будут отличаться только одним вектор-столбцом, и все базисы будут допустимыми;

8) многогранник $M(3,2)$ не является целочисленным, т. е. имеет вершины с дробными координатами.

В этой работе доказана следующая основная

Теорема. *Для числа $f_0^u(M(p,n))$ нецелочисленных вершин многогранника $M(p,n)$ при $p \geq 3$ справедливо неравенство*

$$f_0^u(M(p,n)) \geq (n!)^{p-1}\left(\frac{n^2-n}{4}\right)\left(\frac{n^2+3n+2}{6}\right)^{p-3}. \tag{3}$$

Доказательство приведенной теоремы опирается на некоторые предварительные результаты, которые назовем утверждениями, а не леммами ввиду их самостоятельного значения.

3. Предварительные результаты

Пусть $p \geq 3$. Рассмотрим $(p-1)$-индексную матрицу $y = \|y_{i_1\ldots i_{p-1}}\|_n$, принадлежащую многограннику $M(p-1,n)$. Запишем эту матрицу в виде n^{p-1}-мерного вектора $z(y) = (y_{1\ldots11}, y_{1\ldots12}, \ldots, y_{n\ldots nn})$. Удалив в векторе $z(y)$ нулевые компоненты, получим вектор $z^+(y)$, число компонент которого равно числу $t(y)$ положительных элементов матрицы y. Заметим, что компоненты вектора $z^+(y)$ занумерованы тем же способом, что и компоненты вектора $z(y)$. Поскольку сумма компонент вектора $z^+(y)$ равна n, то пара векторов $z^+(y)$ и $e^p = (\underbrace{1,\ldots,1}_{n})$ определяет классический транспортный многогранник $M(z^+(y), e^p)$ порядка $t(y)\times n$, который наиболее полно изучен (напр., [1], [2], [7]–[11]).

Пусть $g(y) = \|g^y_{ji_p}\|_{t(y)\times n}$ — некоторая матрица многогранника $M(z^+(y), e^p)$, где индекс j представляет собой совокупность индексов $(i_1,\ldots,i_{p-1})$, задаваемую номерами компонент вектора $z^+(y)$. Тогда по этой матрице определим матрицу $x(g(y)) = \|x^{g(y)}_{i_1\ldots i_p}\|_n$ согласно правилу

$$x^{g(y)}_{i_1\ldots i_p} = \begin{cases} g^y_{ji_p}, & \text{если } (i_1,\ldots,i_{p-1}) = j;\\ 0 & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Очевидно, что построенная таким образом матрица $x(g(y))$ удовлетворяет условиям (1) и (2), т. е. $x(g(y)) \in M(p,n)$. Следовательно, многогранник $M(p,n)$ при $p \geq 3$ представим в виде

$$M(p,n) = \{x(g(y)) : y \in M(p-1,n),\ g(y) \in M(z^+(y), e^p)\}. \tag{4}$$

Основываясь на этом равенстве, легко доказать

Утверждение 1. *Для любого натурального числа $p \geq 3$ справедливы соотношения*

1) $\{x(g(y)) : g(y) \in \operatorname{vert} M(z^+(y), e^p)\} \subset \operatorname{vert} M(p,n)\ \forall y \in \operatorname{vert} M(p-1,n)$;

2) $\operatorname{vert} M(z^+(y^1), e^p) \cap \operatorname{vert} M(z^+(y^2), e^p) = \emptyset\ \forall y^1,\ y^2 \in \operatorname{vert} M(p-1,n),\ y^1 \neq y^2$,

где $\operatorname{vert} M$ *— множество вершин многогранника M.*

Из утверждения 1 вытекает

Утверждение 2. *Для числа $f_0(M(p,n))$ вершин многогранника $M(p,n)$, $p \geq 3$, справедливо неравенство*

$$f_0(M(p,n)) \geq \sum_{y\in \operatorname{vert} M(p-1,n)} f_0(M(z^+(y), e^p)).$$

Множество всех целочисленных вершин многогранника $M(p,n)$ будем обозначать через $Z(p,n)$. Очевидно, всякая целочисленная точка многогранника $M(p,n)$ является его вершиной. Поэтому в силу утверждения 1 и равенства (4) нетрудно доказать следующие два утверждения.

Утверждение 3. *Для числа $f_0^u(M(p,n))$ нецелочисленных вершин многогранника $M(p,n)$, $p \geq 3$, справедливо неравенство*

$$f_0^u(M(p,n)) \geq \sum_{y \in \mathrm{vert}\, M(p-1,n) \setminus Z(p-1,n)} f_0(M(z^+(y), e^p)).$$

Утверждение 4. *Число $f_0^z(M(p,n))$ целочисленных вершин многогранника $M(p,n)$, $p \geq 3$, выражается формулой*

$$f_0^z(M(p,n)) = \sum_{y \in Z(p-1,n)} f_0(M(z^+(y), e^p)).$$

Так как $f_0(M(2,n)) = n!$ (напр., [1], с. 169), то на основании утверждения 4 методом индукции по числу p получаем следующий известный результат ([1], с. 309): число целочисленных вершин многогранника $M(p,n)$ выражается формулой

$$f_0^z(M(p,n)) = (n!)^{p-1}. \tag{5}$$

Заметим, что ранее ([1], с. 309; [12], а также [13]) эта формула была выведена с использованием теоремы о взаимно однозначном соответствии между множеством планов (допустимых решений) p-индексной аксиальной задачи выбора и множеством ортогональных систем многомерных кубов.

Известно ([1], с. 292), что размерность многогранника $M(p,n)$ равна числу $d = n^p - (n-1)p - 1$.

Зафиксируем некоторое число $k \in \{0, 1, 2, \ldots, d-1\}$. Ясно, что k-гранью многогранника $M(p,n)$ может быть лишь непустое множество вида $F_G = \{x \in M(p,n) : x_{i_1 \ldots i_p} = 0 \ \forall (i_1, \ldots, i_p) \in G\}$, где $G \subset N_n^p$, $|G| = d - k$.

Очевидно, для любых $p \geq 3$ и $y \in \mathrm{vert}\, M(p-1,n)$ множество $\{x(g(y)) : g(y) \in M(z^+(y), e^p)\}$ является k-гранью многогранника $M(p,n)$, где $k = (n-1)(t(y)-1)$. Поскольку множество $\{x(g(y)) : g(y) \in M(z^+(y), e^p)\}$ является целочисленной $(n-1)^2$-гранью многогранника $M(p,n)$ при $p \geq 3$ тогда и только тогда, когда y — целочисленная вершина многогранника $M(p-1,n)$, то в силу утверждения 4 получаем важное

Следствие 1. Многогранник $M(p,n)$ при $p \geq 3$ имеет $(n!)^{p-2}$ целочисленных $(n-1)^2$-граней, обладающих свойствами

а) $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ для любых таких граней F_1 и F_2;

б) каждая такая грань содержит $n!$ целочисленных вершин.

Важность этого следствия, в частности, состоит в том, что задача нахождения экстремума функции

$$\sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_p=1}^{n} c_{i_1 \ldots i_p} x_{i_1 \ldots i_p},$$

где $c_{i_1 \ldots i_p}$ — заданные действительные числа, при ограничениях (1) и

$$x_{i_1 \ldots i_p} = 0 \ \text{ или } \ 1 \quad \forall (i_1, \ldots, i_p) \in N_n^p,$$

сводится к решению $(n!)^{p-2}$ двухиндексных задач о назначениях

$$\mathrm{extr} \left\{ \sum_{(i_1, \ldots, i_{p-1}) \in K(y)} \sum_{i_p=1}^{n} c_{i_1 \ldots i_p} x_{i_1 \ldots i_p} : \|x_{i_1 \ldots i_p}\|_n \in M(z^+(y), e^p) \right\} \ \ \forall y \in Z(p-1,n).$$

Здесь $K(y) = \{(i_1, \ldots, i_{p-1}) \in N_n^{p-1} : y_{i_1 \ldots i_{p-1}} > 0\}$.

4. Доказательство основной теоремы

Доказательство неравенства (3) при $p \geq 3$ проведем индукцией по числу p.

Сначала установим справедливость неравенства (3) для $p = 3$.

Пусть $n = 2$, $y^* = \begin{Vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{Vmatrix}$. Ясно, что $y^* \in M(2,2)$. Рассмотрим многогранник $M(z^+(y^*), e^3)$ порядка 4×2, определенный векторами $z^+(y^*) = (1/2_{(1,1)}, 1/2_{(1,2)}, 1/2_{(2,1)}, 1/2_{(2,2)})$ и $e^3 = (1,1)$. Этот многогранник имеет 6 вершин

$$x^1 = \begin{Vmatrix} 1/2_{(1,1,1)} & 0 \\ 1/2_{(1,2,1)} & 0 \\ 0 & 1/2_{(2,1,2)} \\ 0 & 1/2_{(2,2,2)} \end{Vmatrix}, \quad x^2 = \begin{Vmatrix} 1/2_{(1,1,1)} & 0 \\ 0 & 1/2_{(1,2,2)} \\ 1/2_{(2,1,1)} & 0 \\ 0 & 1/2_{(2,2,2)} \end{Vmatrix}, \quad x^3 = \begin{Vmatrix} 0 & 1/2_{(1,1,2)} \\ 1/2_{(1,2,1)} & 0 \\ 0 & 1/2_{(2,1,2)} \\ 1/2_{(2,2,1)} & 0 \end{Vmatrix},$$

$$x^4 = \begin{Vmatrix} 0 & 1/2_{(1,1,2)} \\ 0 & 1/2_{(1,2,2)} \\ 1/2_{(2,1,1)} & 0 \\ 1/2_{(2,2,1)} & 0 \end{Vmatrix}, \quad x^5 = \begin{Vmatrix} 1/2_{(1,1,1)} & 0 \\ 0 & 1/2_{(1,2,2)} \\ 0 & 1/2_{(2,1,2)} \\ 1/2_{(2,2,1)} & 0 \end{Vmatrix}, \quad x^6 = \begin{Vmatrix} 0 & 1/2_{(1,1,2)} \\ 1/2_{(1,2,1)} & 0 \\ 1/2_{(2,1,1)} & 0 \\ 0 & 1/2_{(2,2,2)} \end{Vmatrix}.$$

Покажем, что матрица x^5 является вершиной многогранника $M(3,2)$.

Пусть $R_{i_1 i_2 i_3}$ — вектор-столбец матрицы ограничений (1) при $p = 3$, у которого единицы стоят в строках с номерами i_1, $n + i_2$ и $2n + i_3$, а остальные элементы — нули. Тогда вектор-столбцы матрицы ограничений (1), соответствующие положительным компонентам матрицы x^5, можно записать в таком виде $R_{111} = [1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0]^\top$, $R_{122} = [1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1]^\top$, $R_{212} = [0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1]^\top$, $R_{221} = [0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0]^\top$ ($\top$ — знак транспонирования).

Так как векторно-матричное уравнение $\alpha_1 R_{111} + \alpha_2 R_{122} + \alpha_3 R_{212} + \alpha_4 R_{221} = 0$ имеет единственное решение $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$, то векторы $R_{111}, R_{122}, R_{212}, R_{221}$ являются линейно независимыми и, следовательно, матрица x^5 является вершиной многогранника $M(3,2)$. Аналогично доказывается, что и матрица x^6 является вершиной многогранника $M(3,2)$. С помощью аналогичных рассуждений можно доказать, что матрицы x^1, x^2, x^3 и x^4 не являются вершинами многогранника $M(3,2)$. Итак, $f_0^u(M(3,2)) \geq 2$.

Пусть теперь $n \geq 3$. Тогда для любых подмножеств $I_s \subset N_n$, $|I_s| = n-2$, $s = 1,2,3$, любого $R \in \{R_1, R_2\}$ и любой матрицы $\|y_{i_1 i_2 i_3}\|_{n-2}$, удовлетворяющей условиям

$$\sum_{i_2 \in I_2} \sum_{i_3 \in I_3} y_{i_1 i_2 i_3} = 1 \ \ \forall i_1 \in I_1, \quad \sum_{i_1 \in I_1} \sum_{i_3 \in I_3} y_{i_1 i_2 i_3} = 1 \ \ \forall i_2 \in I_2, \quad \sum_{i_1 \in I_1} \sum_{i_2 \in I_2} y_{i_1 i_2 i_3} = 1 \ \ \forall i_3 \in I_3,$$
$$y_{i_1 i_2 i_3} = 0 \text{ или } 1 \ \ \forall (i_1, i_2, i_3) \in I_1 \times I_2 \times I_3, \tag{6}$$

матрица $x = \|x_{i_1 i_2 i_3}\|_n$ с элементами $x_{i_1 i_2 i_3} = y_{i_1 i_2 i_3}$ $\forall (i_1, i_2, i_3) \in I_1 \times I_2 \times I_3$; $x_{i_1 i_2 i_3} = 1/2$ $\forall (i_1, i_2, i_3) \in R$; $x_{i_1 i_2 i_3} = 0$ для остальных (i_1, i_2, i_3) из N_n^3 является нецелочисленной вершиной многогранника $M(3,n)$. Здесь

$$R_1 = \{(r_1, r_2, r_3), (r_1', r_2', r_3), (r_1, r_2', r_3'), (r_1', r_2, r_3')\},$$
$$R_2 = \{(r_1, r_2', r_3), (r_1', r_2, r_3), (r_1, r_2, r_3'), (r_1', r_2', r_3')\},$$

причем $N_n \setminus I_s = \{r_s, r_s'\}$, $s = 1,2,3$. Доказательство этого утверждения проводится так же, как и доказательство принадлежности матриц x^5 и x^6 к множеству $\operatorname{vert} M(3,2)$.

Легко видеть, что число способов выбора подмножеств I_1, I_2 и I_3 ($I_s \subset N_n$, $|I_s| = n-2$, $s = 1,2,3$) равно $(n-1)^3 n^3/8$, а число матриц $\|y_{i_1 i_2 i_3}\|_{n-2}$, удовлетворяющих условиям (6), равно $((n-2)!)^2$ (см. (5)). Отсюда, учитывая, что для выбора R имеются две возможности, приходим к неравенству

$$f_0^u(M(3,n)) \geq (n!)^2 \left(\frac{n^2 - n}{4}\right).$$

Предположим, что неравенство (3) верно для $p = k - 1$, т. е.

$$f_0^u(M(k-1,n)) \geq (n!)^{k-2}\left(\frac{n^2-n}{4}\right)\left(\frac{n^2+3n+2}{6}\right)^{k-4}, \tag{7}$$

и рассмотрим случай, когда $p = k$. На основании утверждения 3 получаем неравенство

$$f_0^u(M(k,n)) \geq f_0^u(M(k-1,n)) \min\{f_0(M(z^+(y), e^k)) : y \in \operatorname{vert} M(k-1,n) \setminus Z(k-1,n)\}.$$

Отметим, что любая нецелочисленная вершина y многогранника $M(k-1,n)$ при $k \geq 4$ содержит по крайней мере 4 нецелочисленных компоненты. Поэтому имеет место неравенство

$$\min\{t(y) : y \in \operatorname{vert} M(k-1,n) \setminus Z(k-1,n)\} \geq n+2.$$

Теперь, воспользовавшись (7), а также неравенством

$$\min\{f_0(M(z^+(y),\, e^k)) : y \in \operatorname{vert} M(k-1,n) \setminus Z(k-1,n)\} \geq (n+2)!/6,$$

полученным согласно теореме 5.3 из ([1], с. 229), убеждаемся в справедливости неравенства (3) при $p = k$. $\square$

5. Следствия

Из теоремы и формулы (5) вытекает

Следствие 2. Для любых натуральных чисел $p \geq 3$ и $n \geq 2$ справедливо неравенство

$$\frac{f_0^z(M(p,n))}{f_0(M(p,n))} \leq \left[\left(\frac{n^2-n}{4}\right)\left(\frac{n^2+3n+2}{6}\right)^{p-3} + 1\right]^{-1}.$$

В [2] сформулирована гипотеза: для всякого p-индексного аксиального транспортного многогранника $M(a^1,\ldots,a^p) = \Big\{x = \|x_{i_1\ldots i_p}\|_{n_1\times\cdots\times n_p} : \sum_{i_1=1}^{n_1}\cdots\sum_{i_{s-1}=1}^{n_{s-1}}\sum_{i_{s+1}=1}^{n_{s+1}}\cdots\sum_{i_p=1}^{n_p} x_{i_1\ldots i_p} = a^s_{i_s}\ \forall i_s \in N_{n_s},$ $\forall s \in N_p,\ x_{i_1\ldots i_p} \geq 0\ \forall (i_1,\ldots,i_p) \in N_{n_1}\times\cdots\times N_{n_p}\Big\}$, определенного целочисленными векторами $a^s = (a^s_1,\ldots,a^s_{n_s})$ $\forall s \in N_p$, справедлива оценка $f_0^z(M(a^1,\ldots,a^p))/f_0(M(a^1,\ldots,a^p)) \geq 2/p$, где $f_0^z(M(a^1,\ldots,a^p))$ — число целочисленных вершин, а $f_0(M(a^1,\ldots,a^p))$ — число вершин многогранника $M(a^1,\ldots,a^p)$. Опровергает эту гипотезу

Следствие 3. Для любых натуральных чисел $p \geq 3$ и $n \geq 3$ справедливо неравенство

$$f_0^z(M(p,n))/f_0(M(p,n)) < 2/p. \tag{8}$$

Доказательство. Так как при $p \geq 3$ и $n \geq 3$ выполняются соотношения

$$\left(\frac{n^2-n}{4}\right)\left(\frac{n^2+3n+2}{6}\right)^{p-3} + 1 \geq \frac{3}{2}\left(\frac{10}{3}\right)^{p-3} + 1 = \left[3\left(\frac{10}{3}\right)^{p-3} + 2\right]/2 > p/2,$$

то в силу следствия 2 имеем (8). $\square$

Замечание. Легко проверить, что $f_0^u(M(3,2))$=2. Отсюда с учетом равенства $f_0^z(M(3,2))$=4 (см. (5)) получаем $f_0^z(M(3,2))/f_0(M(3,2)) = 2/3$.

Поскольку при любом фиксированном натуральном числе $p \geq 3$ справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{n^2-n}{4}\right)\left(\frac{n^2+3n+2}{6}\right)^{p-3} + 1\right]^{-1} = 0,$$

то на основании следствия 2 получаем

Следствие 4. Для любого фиксированного натурального числа $p \geq 3$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_0^z(M(p,n))}{f_0(M(p,n))} = 0.$$

Иными словами, для любого фиксированного натурального числа $p \geq 3$ с ростом n отношение числа целочисленных вершин многогранника $M(p,n)$ к общему числу вершин этого многогранника стремится к нулю.

Литература

1. Емеличев В.А., Ковалев М.М., Кравцов М.К. *Многогранники, графы, оптимизация.* – М.: Наука, 1981. – 342 с.
2. Емеличев В.А., Кравцов М.К. *Полиэдральные аспекты многоиндексных аксиальных транспортных задач* // Дискретн. матем. – 1991. – Т. 3. – Вып. 2. – С. 3–24.
3. Ильичев А.П., Шевченко В.Н. *О крайних точках многогранников многоиндексных транспортных задач* // Комбинаторно-алгебраические методы в прикл. матем. – Горький, 1981. – С. 66–72.
4. Even S., Itai A., Shamir A. *On the complexity of timetable and multicommodity flow problems* // SIAM J. Comput. – 1976. – V. 5. – № 4. – P. 691–703.
5. Frieze A. M. *Complexity of a 3-dimensional assignment problem* // European J. Oper. Research. – 1983. – V. 13. – № 2. – P. 161–164.
6. Balas E., Saltzman M. J. *Facets of the three-index assignment polytope* // Discrete Appl. Math. – 1989. – V. 23. – № 3. – P. 201–229.
7. Кравцов М.К. *Диаметр и радиус транспортного многогранника* // ДАН СССР. – 1983. – Т. 270. – № 2. – С. 278–281.
8. Емеличев В.А., Кравцов М.К., Крачковский А.П. *Транспортные многогранники с максимальным числом k-граней* // ДАН СССР. – 1985. – Т. 282. – № 4. – С. 784–788.
9. Кравцов М.К. *Полиэдральные аспекты транспортных задач* // ДАН СССР. – 1989. – Т. 309. – № 2. – С. 271–275.
10. Кравцов М.К. *Полиэдральные аспекты многоиндексных транспортных задач с аксиальными суммами* // ДАН СССР. – 1990. – Т. 315. – № 6. – С. 1298–1301.
11. Кравцов М.К. *О транспортных многогранниках с минимальным числом k-граней* // Дискретн. матем. – 1992. – Т. 4. – Вып. 3. – С. 108–117.
12. Емеличев В.А., Кононенко А.М. *О числе планов многоиндексной проблемы выбора* // ДАН БССР. – 1974. – Т. 18. – № 8. – С. 677–680.
13. Leue O. *Methoden zur Lösung dreidimensionaler Zuordnungsprobleme* // Angewandte Informatik. – 1972. – Bd. 14. – № 4. – S. 154–162.

Научно-исследовательский экономический институт Министерства экономики Республики Беларусь,

Белорусский государственный университет

Поступила
12.01.1999