Теория игр
Краткий конспект лекций

Тема 1. Введение в теорию игр

Теория игр как научная дисциплина изучает отношения между людьми, которые руководствуются несовпадающими (а иногда и противоположными) мотивами. Наряду с традиционными играми, такими как покер, шахматы, футбол и многие другие, теория игр изучает и такие серьезные отношения как рыночная конкуренция, гонка вооружений, загрязнение окружающей среды. В теории игр все эти серьезные отношения называют играми, поскольку в них, как и в играх, результат зависит от решений (стратегий) всех участников. С одной стороны теория игр — это математическая дисциплина, которая применяется во многих областях человеческой деятельности (экономика, военное дело, биология и др.).

С другой стороны теория игр — это раздел современной экономической теории, что подтверждается большим количеством Нобелевских премий в области экономики, присужденных самым выдающимся представителям данной науки. И именно как строго математизированный раздел микроэкономики и рассматривается теория игр в данном вводном курсе. Ключевое понятие, которое связывает неоклассическую экономическую теорию и теорию игр — это рациональность: каждый субъект стремится максимизировать свою объективную или субъективную выгоду. Несмотря на критику в его адрес, этот постулат играет важную двойную роль в обеих теориях. Во первых, он существенно ограничивает возможные варианты принятия решений, поскольку абсолютно рациональное поведение более предсказуемо, чем иррациональное поведение. Во вторых, он дает четкий критерий оценки эффективности принятых решений: то решение более эффективо, которое приносит большую выгоду лицу, принимающему решение. Неоклассическая экономическая теория обычно предполагает существование и функционирование «совершенного рынка». Каждый субъект принимает решения, основываясь на индикаторах состояния этого рынка.

Данный подход логичен при исследовании экономических систем с огромным числом участников, когда отдельному субъекту невозможно предвидеть решения всех других субъектов. Такая децентрализованная экономическая система может устойчиво функционировать (находиться в равновесии), когда рынок находится в состоянии совершенной конкуренции. В действительности «совершенного рынка» не существует, и мы имеем только взаимодействия между людьми, регулируемые некоторыми правилами. Теория игр предполагает, что субъекты при принятии своих решений должны просчитывать возможные решения других субъектов, поскольку результат зависит от решений всех участников. Поэтому в теории игр предполагается, что все субъекты не только рациональны, но и разумны, в том смысле, что они способны находить не только свои оптимальные решения но также и оптимальные решения других участников.

Применительно к экономике, теория игр изучает функционирование экономических систем в условиях «несовершенного рынка». Игровые модели олигополий и аукционов являются примерами успешного применения игрового подхода в экономике. Решение проблемы ассимметричной информированности участников экономической системы — также важное достижение теории игр. Первое математически строгое определение игры было дано венгерским математиком Джоном фон Нейманом, которого по праву считают одним из величайших математиков 20-го века1 . Удивительно, но в своей работе, опубликованной в далеком 1928 году2 , он сформулировал игру n лиц с нулевой суммой точно также, как она формулируется сегодня.

В этой же работе Дж. фон Нейман доказал свою знаменитую теорему о существовании решения в смешанных стратегиях для матричных игр (n = 2). Пожалуй трудно вспомнить другой такой случай (в любой области знаний), когда новая теория была столь строго формализована с момента ее зарождения. Но все же принято считать, что теория игр как самостоятельный раздел экономической теории сформировалась после публикации в 1944 г. Дж. фон Нейманом в соавторстве с Оскаром Моргенштерном книги «Теория игр и экономическое поведение» [2]. Сегодня игровые модели столь разнообразны, что вряд ли возможно дать простое формальное определение игры, которое бы включало все модели. Неформально, игра — это модель конфликтной ситуации, в которой 1) участвует n лиц (игроков), 2) заданы правила игры (способ принятия решений каждым из игроков), 3) определены правила осуществления платежей между игроками. Обычно игры классифицируют следующим образом. По количеству игроков: игры 1, 2, n игроков. По количеству стратегий: конечные и бесконечные игры. Если у всех игроков конечное число стратеги, то такая игра конечная, иначе — игра бесконечная. По характеру взаимоотношений между игроками: бескоалиционные и кооперативные игры. Игра называется бескоалиционной, если игроки не заключают между собой никаких соглашений. Конечная бескоалиционная игра двух игроков называется биматричной игрой. В кооперативной игре игроки могут заключать соглашения с целью увеличить свои выигрыши. По свойствам функций выигрышей: непрерывные, выпуклые, сепарабельные и т. д. Если сумма выигрышей всех игроков в каждой партии равна нулю, то это — игра с нулевой суммой. Игра двух игроков с нулевой суммой называется антагонистической. В такой игре один игрок выигрывает за счет другого. Конечная антагонистическая игра называется матричной игрой.

В играх с ненулевой суммой все игроки в сумме могут получить меньше их суммарного взноса. Например, в лотерее ее организаторы всегда в выигрыше, а участники в сумме получают меньше их суммарного взноса. По количеству ходов: одноходовые и многоходовые. Среди многоходовых игр выделим позиционные игры, в которых несколько игроков паследовательно делают ходы; выигрыши игроков зависят от стратегии выбора ходов (пример — шашки, шахматы, карточные игры, игровые автоматы, динамические экономические системы и т. д.). По информированности игроков: игры с совершенной и несовершенной информацией. В игре с совершенной информацией на каждом шаге игрокам известно, какие ходы были сделаны ранее (например, шашки и шахматы). В игре с несовершенной информацией игроки могут не знать, в какой позиции они находятся (некоторые стохастические игры, в частности, карточные игры). К играм с несовершенной информацией сводятся игры с неполной информацией (также известные как байесовские игры). В отличие от игр с несовершенной информацией, где неполная информированность игроков возникает в процессе игры, в играх с неполной информацией неполная информированность некоторых игроков возникает еще до начала игры, как следствие ассимметричной информированности игроков (покупатель меньше знает о качестве товара, чем продавец, фирма точно не знает, какую технологию использует ее конкурент, и т. д.).

Тема 2. Стратегическое взаимодействие

Стратегическое взаимодействие может включать много игроков и много стратегий, но мы ограничимся играми с участием двух лиц, имеющих конечное число стратегий. Это позволит нам без труда изобразить игру с помощью платежной матрицы. Самое простое — рассмотреть сказанное на конкретном примере.

Предположим, что два человека играют в простую игру. Игрок А пишет на листке бумаги одно из двух слов: "верх" или "низ". Одновременно игрок В пишет на листке бумаги "слева" или "справа". После того как они это сделают, листки бумаги передаются на рассмотрение, и каждый из них получает выигрыш, представленный в табл.27.1. Если А говорит "верх", а В говорит "слева", то мы смотрим в верхний левый угол матрицы. В этой матрице выигрыш А показан первой записью в клеточке, 1, а выигрыш В — второй, 2. Аналогично, если А говорит "низ", а В говорит "справа", то А получает выигрыш 1, а В — выигрыш 0.

У игрока А имеются две стратегии: он может выбрать "верх" и может выбрать "низ". Эти стратегии могут представлять собой экономический выбор, такой, например, как "повысить цену" или "снизить цену". Или же они могут представлять собой выбор политический, такой, как "объявить войну" или "не объявлять войны". Платежная матрица игры просто отображает выигрыш каждого игрока при каждой комбинации выбираемых стратегий.

Каков будет исход игры такого рода? Игра, описанная в табл.27.1, имеет очень простое решение. С точки зрения игрока А, для него всегда лучше сказать "низ", так как его выигрыш при таком выборе (2 или 1) всегда больше, чем соответствующие записи в таблице в случае, если бы он сказал "верх" (1 или 0). Аналогично для В всегда лучше сказать "слева", поскольку 2 и 1 лучше, чем 1 и 0. Таким образом, следует ожидать, что стратегия равновесия для А будет заключаться в том, чтобы следовать стратегии "низ", а для В — стратегии "слева".

В этом случае мы имеем дело с доминирующей стратегией. У каждого игрока имеется один оптимальный выбор стратегии независимо от того, что делает другой игрок.

Каков бы ни был выбор игрока В, игрок А всегда получит больший выигрыш, если будет следовать стратегии "низ", поэтому ему имеет смысл выбирать стратегию "низ". И каков бы ни был выбор, сделанный игроком А, В получит больший выигрыш, если будет следовать стратегии "слева". Следовательно, эти варианты выбора доминируют над альтернативными, и перед нами — равновесие с доминирующими стратегиями.

Если в какой-то игре у каждого игрока имеется доминирующая стратегия, можно предсказать, что данная игра будет иметь равновесный исход. Ведь доминирующая стратегия есть стратегия, которая является наилучшей вне зависимости от того, что делает другой игрок. В данном примере следовало бы ожидать равновесного исхода, при котором А следует стратегии "низ", получая равновесный выигрыш 2, а В следует стратегии "слева", получая равновесный выигрыш 1.

Если бы каждая из фирм думала, что другая сохранит цену неизменной, она сочла бы выгодным для себя снизить цену по сравнению с ценой, назначенной другой фирмой. Это было бы неверно только в том случае, если бы каждая из фирм назначала самую низкую цену из возможных, что в рассматривавшемся нами случае означало цену, равную нулю, так как предельные издержки равнялись нулю. Пользуясь терминологией настоящей главы, каждая фирма, назначающая нулевую цену, находится в равновесии по Нэшу для случая стратегий ценообразования, т.е. в положении, которое в гл.26 мы назвали равновесием по Бертрану.

Платежная матрица игры, заключающейся в разыгрывании дуополистами разных стратегий ценообразования, имеет ту же структуру, что и платежная матрица для дилеммы заключенного. Если каждая из фирм назначает высокую цену, они обе получают большую прибыль. Это ситуация, в которой обе фирмы сотрудничают в целях поддержания монопольного исхода. Но если одна из фирм назначает высокую цену, то другой фирме выгодно чуть снизить свою цену, захватить рынок первой фирмы и тем самым получить еще большую прибыль. Однако если обе фирмы снизят цены, обе они в конечном счете получат меньшую прибыль. Какова бы ни была цена, запрашиваемая другой фирмой, вам всегда выгодно чуть подрезать свою цену. Равновесие по Нэшу имеет место тогда, когда каждая из фирм запрашивает наименьшую цену из возможных.

Однако если игра повторяется неограниченное число раз, возможны и другие исходы. Предположим, что вы выбираете стратегию "зуб за зуб". Если другая фирма снизит свою цену на этой неделе, вы снизите свою цену на следующей. Если каждый из игроков знает, что другой следует стратегии "зуб за зуб", то каждый будет бояться снизить цену, так как это может привести к ценовой войне. Угроза, подразумеваемая стратегией "зуб за зуб", может способствовать поддержанию фирмами высоких цен.

Утверждалось, что реально существующие картели иногда пытаются использовать такую стратегию. Пример такого рода был недавно описан Робертом Портером в одной из статей. Объединенный Исполнительный Комитет был знаменитым картелем, устанавливавшим в конце 1800-х гг. цену грузовых железнодорожных перевозок в

Соединенных Штатах. Образование этого картеля предшествовало введению в Соединенных Штатах антитрестовского законодательства, и в те времена он был совершенно законным.

Картель определял, какова могла быть рыночная доля каждой железной дороги в грузовых перевозках. Каждая фирма устанавливала свои тарифы индивидуально, а ОИК следил за тем, сколько груза отправляла каждая из фирм. Однако в течение 1881, 1884 и 1885 гг. было несколько случаев, когда, по мнению некоторых членов картеля, другие фирмы-члены, невзирая на соглашение, снижали тарифы с целью увеличения своей рыночной доли. В эти периоды часто имели место ценовые войны. Когда одна из фирм пыталась смошенничать, все остальные снижали цены, чтобы "наказать" отступника. Такого рода стратегия "зуб за зуб" могла, очевидно, поддерживать картельное соглашение в течение какого-то времени.

ПРИМЕР: Стратегия "зуб за зуб" в ценообразовании авиакомпаний

Стратегия "зуб за зуб" широко используется реально существующими олигополиями. Интересный пример данного рода дает ценообразование авиа-компаний. Авиакомпании часто предлагают особые льготные тарифы того или иного вида; многие обозреватели отрасли авиаперевозок утверждают, что эти льготы могут быть использованы в качестве знака конкурентам воздержаться от снижения цен на ключевых маршрутах.

Так, "Northwest" ввела льготные ночные тарифы на рейсы в города Западного побережья в попытках заполнить пустые места. "Continental Airlines" истолковала это как попытку увеличить долю рынка за ее счет и ответила снижением всех тарифов до Миннеаполиса до уровня ночных тарифов "Northwest". Однако сроки действия сниженных тарифов "Continental" истекали через день или два после их введения.

"Northwest" истолковала это как сигнал о том, что "Continental" не имеет серьезных намерений в отношении данного рынка и просто хочет, чтобы "Northwest" отменила свои льготы по ночным тарифам. Однако "Northwest" решила послать "Continental" собственное сообщение: она ввела набор дешевых тарифов на полеты на Западное побережье из Хьюстона — опорного пункта "Continental"! Тем самым, "Northwest" давала понять, что считает введенные ею льготы оправданными, ответ же "Continental" — неуместным.

Все эти снижения тарифов имели очень короткий срок действия; это, по-видимому, говорит о том, что они были задуманы больше как послания конкурентам, чем как заявки на большую долю рынка. Как объяснял аналитик, тарифы, которые авиакомпания не хочет вводить, " почти всегда должны иметь конечный срок действия в надежде на то, что конкурентные силы в конце концов проснутся и приведут все в соответствие".

Неписаные правила конкуренции на рынках авиаперевозок, где существует дуополия, состоят, похоже, в следующем: если другая фирма поддерживает высокий уровень цен, я тоже буду поддерживать высокий уровень цен; однако если другая фирма снизит цены, я, следуя стратегии "зуб за зуб", тоже отвечу снижением цен. Другими словами, обе фирмы "живут в соответствии с Золотым правилом": поступай с другими так же, как ты хотел бы, чтобы они поступали с тобой. Эта угроза возмездия способствует поддержанию всех цен на высоком уровне.

Тема 3. Игры в нормальной форме

Итак, игра в нормальной (или стратегической) форме — это тройка $\{I, S = \Pi i\{Si\}_{i\in I}$ $u = (u_1,\ldots,u_n)\}$, где $I = \{1,. . . , n\}$ — множество игроков, Si — множество стратегий (ходов), доступных игроку i = 1,. . . , n ,

$ui : S = \Pi_{i\in I}\ Si \to R^1$ — функция выигрышей игрока i, ставящая в соответствие каждому набору стратегий $s = (s_1,..., s_n)$, называемому также ситуацией, выигрыш этого игрока.

Стандартный пример здесь — дуополия по Бертрану и по Курно, когда стратегии

— это цены или объемы выпуска, соответственно, а выигрыши — это прибыль (см. п. 1.8-1.10).

Важным предположением, которое играет ключевую роль в теории, состоит в предположении, что все игроки рациональны, в том смысле, что каждый игрок рассматривает имеющиеся в его распоряжении альтернативы, формирует представления относительно неизвестных параметров, имеет четко определенные предпочтения и выбирает свои действия в результате некоторого процесса оптимизации (максимизации своей целевой функции). Более того, не менее существенным является факт общеизвестности (общего знания) рациональности игроков, т. е. все игроки не только рациональны, но и знают, что другие игроки рациональны, что все игроки знают, что все игроки знают, что они рациональны и т. д. Формальное определение общеизвестности см. Aumann (1976).

Замечание 1.2.1. В последние годы появилось значительное число работ, посвященных исследованию моделей ограниченной рациональности. Основная мотивация этих работ — неудовлетворенность теорией, оперирующей с "совершенно рациональным человеком", поскольку мы является свидетелями весьма частого несоответствия реального поведения людей предположению "совершенной рациональности". Идея моделирования ограниченной рациональности восходит к работам Герберта Саймона (Simon (1955, 1956), см. также Simon (1972, 1976)). Обсуждение проблем, связанных с моделировнием ограниченной рациональности можно найти, например, в книге Rubinstein (1998). Различные взгляды на проблемы моделирования рациональных и ограниченных рациональных игроков изложены в работах Binmore (1987, 1988), Auman (1996).

Обратимся к тому случаю, когда $I = \{1,2\}$ и множества стратегий каждого из двух игроков — конечны. В этом случае игру можно "изобразить" с помощью матрицы (см. рис.6), где $M = |S_i|$ — число возможных стратегий игрока 1, $K = |S_2|$ —число возможных стратегии игрока 2,

$a_{mk} = u_1\left(s_1^{(m)}, s_2^{(k)}\right),\ b_{mk} = u_2\left(s_1^{(m)}, s_2^{(k)}\right)$, k = l,...,K, m = 1,...,M.

Эту же игру можно представить в виде двух матриц (поэтому такие игры называются часто биматричными), элементами которых являются элементы a_{mk} и b_{mk}, соответственно.

Для конечной антагонистической игры, т. е. игры двух лиц такой, что $u_1(s1, s2) = -u_2(s1, s2)$ для всех $si \in Si$, $i = 1,2$, справедливо равенство $a_{mk} = -b_{mk}$, для всех m и k,

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} s_2^1 & & s_2^{(k)} \end{array} \\
\begin{array}{c} s_1^1 \\ \vdots \\ s_1^{(m)} \end{array} & \begin{pmatrix} (a_{11}, b_{11}) & \dots & (a_{1k}, b_{1k}) \\ \dots & \dots & \dots \\ (a_{m1}, b_{m1}) & \dots & (a_{mk}, b_{mk}) \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Рис. 6.

а поэтому такая игра может быть задана только одной матрицей (a_{mk}) m=1,...,M, k=1,..., К и поэтому конечные антагонистические игры называются матричными (см. подробнее Дополнение (Раздел 1.13)).

Смешанная стратегия σi — это вероятностное распределение на множестве чистых стратегий Si. (Мотивацию введения смешанных стратегий мы оставляем на будущее). Рандомизация каждым игроком своих стратегий статистически независима от рандомизаций его оппонентов, а выигрыши, соответствующие профилю (набору) смешанных стратегий — это ожидаемое значение выигрышей соответствующих чистых стратегий (т.е. речь здесь идет об ожидаемой полезности). Одна из причин, по которой мы сосредотачиваемся на конечном случае — стремление избежать "осложнений", связанных с теорией меры.

Будем обозначать пространство смешанных стратегий i-ого игрока через Σi , а $\sigma_i(s_i)$ — вероятность того, что выбирается стратегия s;. Пространство наборов смешанных стратегии

$$\Sigma = \prod_{i \in I} \Sigma_i$$

элементы которого мы будем обозначать через σ. Носитель смешанной стратегии σi — это множество тех чистых стратегий, которым "приписана" положительная вероятность.

Определение 1.2.1. Если S_i — конечное множество чистых стратегий игрока i, то смешанная стратегия $\sigma_i : S_i \to [0, 1]$ ставит в соответствие каждой чистой стратегии $s_i \in S_i$ вероятность $\sigma i(si) \geq 0$ того, что она будет играться, причем

$$\sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) = 1 .$$

(Обратим внимание на то, что индекс i означает здесь, что речь идет о стратегии игрока i. Поэтому, если мы будем говорить о разных стратегиях игрока i, то мы будем обозначать их s_i, s'_i, s''_i, ...).

Нетрудно заметить, что множество смешанных стратегий игрока i — это $(k_i - 1)$-мерный симплекс, где k_i — число чистых стратегий i-го игрока.

Выигрыш игрока i, соответствующий профилю (набору) стратегий σ, есть

$$u_i(\sigma) = \sum_{s\in S} \Big(\prod_{j=1}^{n} \sigma_j(s_j)\Big) u_i(s). \qquad (2.1)$$

(поскольку на наборах чистых стратегий значения этой функции совпадают со значениями исходной функции выигрышей u_i, мы сохраняем то же обозначение).

Важно отметить, что выигрыш i-ого игрока есть линейная функция от вероятностей σ_i, а также является полиномом от профиля, а потому непрерывен. Наконец, чистые стратегии являются вырожденными смешанными стратегиями, приписывающими вероятность 1 данной чистой стратегии и вероятность 0 — остальным.

Определение 1.2.2. Смешанным расширением игры Г = {I, S, u} называется игра

$$\bar{\Gamma} = \{I, \textstyle\sum, u\}, \ \text{где} \ \textstyle\sum = \prod_{i\in I} \sum_i$$

а, u(σ), где $\sigma\in\Sigma$, определяется равенством (2.1).

Пример. Рассмотрим игру, изображенную на рис. 7.

L M R

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} L & M & P \end{array} \\ \begin{array}{c} u \\ m \\ d \end{array} & \begin{pmatrix} (4,3) & (5,1) & (6,2) \\ (2,1) & (8,4) & (3,6) \\ (3,0) & (9,6) & (2,8) \end{pmatrix} \end{array}$$

Рис. 7.

Пусть σ1 = (1/3, 1/3, 1/3) (это означает, что смешанная стратегия игрока 1 приписывает ему играть стратегии u , m и d с вероятностями 1/3), σ_2 = (0, 1/2, 1/2) (эта смешанная стратегия игрока 2 предписывает играть стратегии M и P с равными вероятностями и не играть стратегию L вовсе). В данном случае мы получаем

$$u_i(\sigma) = \frac{1}{3}\Big(0\cdot 4 + \frac{1}{2}\cdot 5 + \frac{1}{2}\cdot 6\Big) +$$

+ 1/3·(0·2 +1/2*8 + ½ *3) + 1/3·(0*3 + ½*9 +1/2*2) = 11/2,

$u_2(\sigma)$ = 27/6.

Тема 4. Доминирующие и доминируемые стратегии

Посмотрим внимательно на приведенную выше игру (рис.7). Независимо от того, как играет игрок 1, R дает игроку 2 строго больший выигрыш нежели M. В этом смысле стратегия M строго доминируема, поэтому ясно, что рациональный игрок 2 не должен играть M . Далее, если игрок 1 знает (т.к. он сам рационален и знает, что другой рационален...), что 2 не будет играть M , то для него и будет лучше, чем га или d. Наконец, если игрок 2 знает, что игрок 1 знает, что игрок 2 не будет играть M, то игрок 2 знает, что 1 будет играть и , а тогда 2 должен играть L . Этот процесс — последовательное удаление строго доминируемых стратегий (мы дадим позднее строгое определение и соответствующий экономический пример). Вопрос, естественно возникающий здесь: "А не зависит ли множество стратегий, выдерживающих такое исключение доминируемых стратегий, от порядка исключения?" К счастью, нет, и дело здесь в том, что если стратегия s_i строго хуже чем s' для всех стратегий оппонента из множества D , то она хуже чем s' и для любого подмножества множества D .

Посмотрим теперь на следующую игру (см. рис. 8)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} L & R \end{array} \\ \begin{array}{c} u \\ M \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} (2,0) & (-1,0) \\ (0,0) & (0,0) \\ (-1,0) & (2,0) \end{pmatrix} \end{array}$$

Рис. 8.

Здесь M не доминируется строго стратегией u, и M не доминируется строго стратегией D . Однако, если игрок 1 играет u с вероятностью 1/2 и D — с вероятностью 1/2, он обеспечивает себе выигрыш 1/2 независимо от того, как играет игрок 2. Следовательно, чистая стратегия может строго доминироваться смешанной стратегией, даже если она не доминируется строго никакой чистой стратегией.

Введем следующие обозначения: пусть $i \in I$, тогда через $s_{-i} \in S_{-i}$ будем обозначать набор стратегий игроков из $I \backslash \{i\}$, (s'_i, s_{-i}) обозначает набор стратегий $(s_1, \ldots, s_{i-1}, s'_i, s_{i+1}, \ldots, s_n)$. Аналогично, для смешанных стратегий (σ'_i, σ_{-i}) — это $(\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}, \sigma'_i, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_n)$. (Заметим, что в этих обозначениях $s = (s_i, s_{-i})$).

Определение 1.3.1 *Чистая стратегия S_i игрока i в игре* Γ *строго доминируема (строго доминируется), если существует другая чистая стратегия* s'_i *такая, что*

$$u_i(s'_i, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i}) \qquad (3.1)$$

для всех $s_{-i} \in S_{-i}$.

В этом случае говорят, что стратегия s'_i доминирует стратегию s_i. Стратегия s_i. слабо доминируется, если существует такая s'_i , что (3.1) выполняется как нестрогое неравенство, но хотя бы для одного набора s_{-i} – неравенство строгое.

Аналогично определение и для смешанных стратегий:

Определение 1.3.2. *Смешанная стратегия* σ_i *строго доминируется в игре* $\tilde{\bar{A}}$; *если существует другая стратегия* σ'_i *такая, что для всех* $\sigma_{-i} \in \Sigma_{-i}$ *выполняется*

$$u_i(\sigma'_i, \sigma_{-i}) > u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}).$$

Стратегия σ_i называется строго доминирующей стратегией для игрока i в игре $\tilde{\bar{A}}$, если она строго доминирует любую другую стратегию из Σ_i.

Заметим, что для того, чтобы проверить, что σ_i строго доминируется стратегией σ'_i, нам нужно посмотреть на "поведение" этих двух стратегий против чистых стратегий оппонентов игрока i.

Формально:

$$(A) \quad u_i(\sigma'_i, \sigma_{-i}) > u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \quad \forall \sigma_{-i}$$

тогда и только тогда, когда

$$(B) \quad u_i(\sigma'_i, s_{-i}) > u_i(\sigma_i, s_{-i}) \quad \forall s_{-i}.$$

Действительно: рассмотрим разность

$$u_i(\sigma'_i, \sigma_{-i}) - u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) = \sum_{s_{-i} \in S_{-i}} (\prod_{k \neq i} \sigma_k(s_k))[u_i(\sigma'_i, s_{-i}) - u_i(\sigma_i, s_{-i})].$$

Тогда если (B), то (A), т.к. все $[u_i(\sigma'_i, s_{-i}) — u_i(\sigma_i, s_{-i})] > 0$. (B) следует из (A), т.к. s_{-i} — вырожденный случай σ_{-i}.

Задача. Докажите, что если чистая стратегия s_i является строго доминируемой, то таковой же является и любая стратегия, использующая s_i с положительной вероятностью.

Однако смешанная стратегия может быть строго доминируемой даже, если она использует с положительной вероятностью чистые стратегии, которые даже не слабо доминируемы. Действительно, рассмотрим следующую игру (рис.9).

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} L & R \end{array} \\ \begin{array}{c} u \\ M \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} (1,3) & (-2,0) \\ (-2,0) & (1,3) \\ (0,1) & (0,1) \end{pmatrix} \end{array}$$

Рис. 9.

Стратегия первого игрока (1/2, 1/2,0) дает ожидаемый выигрыш $-\frac{1}{2}$ вне зависимости от того, что играет игрок 2, а следовательно, строго доминируется стратегией D.

Естественно, что строго доминируемые стратегии надо удалять. Если игра разрешима в смысле последовательного удаления строго доминируемых стратегий, т. е. каждый игрок остается с единственной стратегией, как в нашем первом примере, то, получившаяся ситуация будет хорошим кандидатом для предсказания того, как будет проходить игра.

Вернемся к игре, изображенной на рис. 7. Нетрудно убедиться в том, что здесь в результате последовательного удаления строго доминируемых стратегий остается пара стратегий (u, L). На первом шаге удаляется стратегия M (она доминируется стратегией R). Затем удаляется стратегия m (доминируемая стратегией u).На третьем шаге удаляется стратегия d (доминируется стратегией u). Наконец, на последнем шаге удаляется R.

Но, даже если такие ситуации представляют собой хорошие кандидатуры, все не обязательно произойдет в соответствии с их "предписанием", особенно если выигрыши могут принимать "экстремальные" значения.

Рассмотрим, например, следующую игру (рис. 10).

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} L & R \end{array} \\ \begin{array}{c} u \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} (20,10) & (15,20) \\ (-100,20) & (40,30) \end{pmatrix} \end{array}$$

Рис. 10.

Очевидно, что здесь стратегия L доминируется стратегией R, а потому ситуация (D,R) является хорошим кандидатом. Но ... Проигрыш игрока 1 в ситуации (_D, L) слишком велик, поэтому вполне можно допустить, что игрок 1 может не рискнуть сыграть стратегию d (допуская, например, возможность случайной ошибки игрока 2).

Все, конечно, изменится, если игроки могут договориться до того, как принять решение. В этом случае, конечно, все уже будет зависеть от "силы" договоренности.

Последовательное удаление слабо доминируемых стратегий

Рассмотрим следующую известную игру "Море Бисмарка". Предыстория события такова: 1943г. Адмирал Imamura получил приказ доставить подкрепление по морю Бисмарка на Новую Гвинею. В свою очередь адмирал Kenney должен был воспрепятствовать этому. Imamura должен был выбрать между Северным (более коротким) и Южным маршрутами, а Kenney — решить куда посылать самолеты, чтобы разбомбить конвой. Причем в течение одного дня самолеты могут бомбить лишь на одном из двух направлений — либо на Северном, либо на Южном маршрутах (но не на двух). Поэтому, если Kenney посылает самолеты в сторону неправильного маршрута, то они могут вернуться, но число дней, когда возможна бомбежка, уменьшается. Описываемая ситуация моделируется следующей игрой. Считаем, что Северный маршрут займет 2 дня, а Южный — 3. (См. рис. 11).

$$\begin{array}{ccc} & & \text{Imamura} \\ & & \begin{array}{cc} \text{Север} & \text{Юг} \end{array} \\ Kenney & \begin{array}{c} \textit{Север} \\ \textit{Юг} \end{array} & \begin{pmatrix} (2,-2) & (2,-2) \\ (1,-1) & (3,-3) \end{pmatrix} \end{array}$$

Рис. 11.

Вообще говоря — это матричная игра, т. е. антагонистическая игра с конечным множеством стратегий у каждого игрока. Ни один игрок не имеет доминирующей стратегии. Но здесь можно говорить о слабом доминировании: для Imamur'ы стратегия Юг слабо доминируема, так как для любой стратегии Kenney проигрыш Imamur'ы (число дней, когда конвой будет подвергаться бомбордировкам) не меньше для Ю, чем для С, но для стратегии Kenney Ю — проигрыш при С строго меньше, чем при Ю.

Последовательное (итерированное) удаление слабо доминируемых стратегий проходит следующим образом: исключается одна из слабо доминируемых стратегий одного из игроков, затем из оставшихся стратегий исключается одна из слабо доминируемых стартегий и т. д.

Представим себе, что Kenney понимает это и считает, что Imamura выберет Север. В этой новой ситуации Kenney имеет уже доминирующую стратегию — Север. Это и дает нам равновесие при последовательном удалении доминируемых стратегий. (В действительности, так и случилось: 2-5марта 1943 г. ВВС США и Австралии атаковали японский конвой, который шел по Северному пути и потопили все транспортные корабли и 4 эсминца: из 7000 чел. до Новой Гвинеи добрались 1000.)

Процедура последовательного удаления слабо доминируемых стратегий аналогична удалению строго доминируемых стратегий. Однако здесь есть одно весьма значительное отличие. А именно, множество стратегий, которые выдерживают последовательное удаление слабо доминируемых стратегий (то есть остаются) может зависеть от порядка удаления стратегий.

Действительно, рассмотрим следующую игру (рис. 12).

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} L & R \end{array} \\ \begin{array}{c} u \\ M \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} (1,1) & (0,0) \\ (1,1) & (2,1) \\ (0,0) & (2,1) \end{pmatrix} \end{array}$$

Рис. 12.

Если вначале удаляется u (слабо доминируется M), а затем L (слабо доминируется R), то мы приходим к исходу (2,1) (второй игрок выбирает R). Если же вначале удаляется D (слабо доминируется M), а затем R (слабо доминируется L), то мы приходим к исходу (1,1).

Рассмотрим несколько примеров. Мы начнем со знаменитой *Дилеммы Заключенного* — в некотором смысле чрезвычайно простой игры, которая в разных формулировках встречается в большинстве учебников по теории игр, которая приводится едва ли не в самом начале каждого курса и которую многие сразу же вспоминают, когда слышат словосочетание "теория игр".

Дилемма Заключенного. Ставший почти хрестоматийным сюжет этой стилизованной истории таков. Двое подозреваемых в совершении тяжкого преступления арестованы и помещены в одиночные камеры, причем они не имеют возможности передавать друг другу какие-либо сообщения. Их допрашивают поодиночке. Если оба признаются в совершении преступления, то им грозит, с учетом их признания, тюремное заключение сроком по 6 лет каждому. Если оба будут молчать, то они будут наказаны за совершение какого-то незначительного преступления и получат в этом случае по 1 году тюремного заключения. Если же один из них сознается, а другой — нет, то первый, за содействие следствию, будет вовсе освобожден от наказания, тогда как второй будет приговорен к максимально возможному за данное преступление наказанию — 10-летнему тюремному заключению.

Описанная история может быть представлена следующей игрой (рис. 13).

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} M & C \end{array} \\ \begin{array}{c} M \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} (-1,-1) & (-10,0) \\ (0,-10) & (-6,-6) \end{pmatrix} \end{array}$$

Рис. 13.

Здесь нетрудно убедиться в том, что стратегия "молчать" является строго доминируемой для каждого игрока (еще раз напомним, что они рациональны), поэтому каждый игрок выберет стратегию "сознаться". В результате оба заключенных получат по 6 лет тюремного заключения.

Как мы увидим ниже ситуация ("сознаться", "сознаться"), естественно, является ситуацией равновесия по Нэшу. При этом мы сразу же сталкиваемся с бросающейся в глаза проблемой: получающийся исход очень плохой — он дает максимальный суммарный срок заключения (разумеется, мы подчеркиваем это еще раз, не следует забывать предположение о рациональности игроков, поскольку здесь исключаются из рассмотрения проблемы предательства, и т. д.). Это послужило толчком к многочисленным исследованиям этой игры, поскольку, например, естественным желанием было бы получить в качестве исхода этой игры (или ее модификаций) ситуацию ("молчать", "молчать"), дающую каждому заключенному лишь по одному году заключения.

Следующая игра имеет уже ярко выраженный экономико-политический подтекст, хотя разделяет с дилеммой заключенного упомянутую выше специфику, поэтому мы позволим себе сохранить то же название:

"*Дилемма заключенного - 2*". Рассмотрим две страны добывающие нефть, которые мы назовем, скажем, A и B. Эти две страны могут кооперироваться, договариваясь об объемах ежедневной добычи нефти, ограничиваясь, к примеру, добычей 2 млн. баррелей нефти в день для каждой страны. С другой стороны, страны могут действовать некооперативно, добывая, скажем, по 4 млн. баррелей в день. Такая ситуация может быть представлена следующей игрой, в которой указаны прибыли стран, в зависимости от их объемов добычи нефти (рис. 14).

$$
\begin{array}{ccc}
 & & B \\
 & & \begin{array}{cc} K & \quad H \end{array} \\
A & \begin{array}{c} K \\ \\ H \end{array} & \begin{pmatrix} (46,42) & (26,44) \\ \\ (52,22) & (32,24) \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Рис. 14.

Эта картина достаточно типична для картеля, когда у каждого из членов картеля есть стимул отклониться от договора, чтобы за счет увеличения объемов продаж получить дополнительную прибыль.

Легко видеть, что и здесь у каждого из игроков есть доминирующая стратегия — "не кооперироваться". В результате страны получают прибыль 32 и 24 (млн. долларов в день), что гораздо меньше, нежели в ситуации кооперативного поведения.

Феномен, с которым мы столкнулись в этом примере, аналогичен *дилемме заключенного*, и именно поэтому второй пример мы также назвали "*дилеммой заключенного*": оба игрока играют свои доминирующие стратегии, максимизируя тем самым свои выигрыши, но в то же время исход для каждого из них хуже, нежели в ситуации, когда оба следуют доминируемым стратегиям.

Можно ли достичь "кооперативного поведения" в дилемме заключенного? Как мы увидим в следующей главе — да.

Здесь мы ограничимся лишь еще одним примером на эту же тему.

"Дилемма заключенного - 3". Предположим, что есть 2 работника, которые могут "работать" ($s_i = 1$) и "увиливать" ($s_i = 0$) (s_i — уровень усилий, которые прикладывает работник i). Суммарный выпуск "команды" $4(s_1+s_2)$ делится поровну между работниками. Каждый работник несет издержки равные 3, если работает, и равные 0, если увиливает. Соответствующая матрица изображена на рис. 15.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \quad p & \quad\quad y \end{array} \\ \begin{array}{c} p \\ y \end{array} & \begin{pmatrix} (1,1) & (-1,2) \\ (2,-1) & (0,0) \end{pmatrix} \end{array}$$

Рис. 15.

"Работать" — строго доминируемая стратегия для каждого работника.

Аукцион второй цены. У продавца есть одна единица неделимого товара. Есть *n* потенциальных покупателей, которые оценивают товар, соответственно, в $0 < v_1 < \ldots < v_n$ и эти оценки являются "общеизвестными". Покупатели одновременно делают свои заявки (назначают цену) $s_i \in [0, +\infty)$. Назначивший максимальную заявку получает товар и платит вторую цену, т. е. если игрок *i* выигрывает ($s_i > \max_{i \neq j} s_j$), то его полезность есть $u_i = v_i - \max_{i \neq j} s_j$, а остальные ничего не получают и ничего не платят (т. е. $u_j = 0$). Если несколько покупателей назначают высшую цену, то товар распределяется случайным образом (например, равновероятно).

Легко убедиться в том, что стратегия назначения своей оценки ($s_i = v_i$) слабо доминирует все остальные. Действительно, пусть $r_i = \max_{i \neq j} s_j$. Пусть $s_i > v_i$. Тогда, если $r_i \geq s_i$, то r -ый участник получает 0, что он получил бы и при $s_i = v_i$. Если $r_i \leq v_i$, то он получает $v_i - r_i$, что он опять же получает, назначив v_i. Если теперь $v_i < r_i < s_i$, то его полезность $v_i - r_i < 0$, а если бы он назвал v_i, то он бы получил 0. Аналогично и для $s_i < v_i$: если $r_i \leq s_i$ или $r_i \geq v_i$, то он получает ту же полезность, назвав v_i вместо s_i. Если же $s_i < r_i < v_i$, то он упускает возможность получить положительную полезность.

Полезно в данном случае заметить, что поскольку назначение собственной оценки есть доминирующая стратегия, то не играет роль, имеют ли покупатели информацию об оценках других.

Мы вернемся к аукциону второй цены в п. 1.6.

Рационализуемые стратегии

Мы обсуждали исключение строго доминируемых стратегий, исходя из того, что рациональный игрок никогда не выбрал бы такую стратегию, вне зависимости от того, как играют его оппоненты. Однако "общее знание" структуры игры и того, что игроки рациональны, позволяет исключить больше, нежели просто последовательно удалить строго доминируемые стратегии, причем здесь опять же важную роль играет "общее знание". Далее мы рассматриваем смешанное расширение $\tilde{\bar{A}}$ игры Г.

Определение 1.5.1. *Стратегия* σ_i *является лучшим ответом игрока i на набор стратегий оппонентов* σ_{-i}, *если* $u(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq u(\sigma_i^{'}, \sigma_{-i})$ *при любых* $\sigma_i^{'} \in \Sigma_i$. *Стратегия* σ_i *является "никогда не лучшим" ответом (далее НЛО), если не существует* σ_{-i}, *для которых она была бы лучшим ответом.*

Конечно же игрок не будет играть стратегию, которая является "никогда не лучшим ответом".

Ясно, что строго доминируемая стратегия является "никогда не лучшей". Разумеется, может случиться, что стратегия будет "никогда не лучшим ответом", даже если она не является строго доминируемой (мы еще вернемся к этому). Таким образом, удаляя "никогда не лучшие ответы", мы должны удалить по крайней мере и все стратегии, удаляемые при итерированном (последовательном) удалении строго домиинируемых стратегий. Более того, предполагая "общее знание", мы можем итерировать удаление "никогда не лучших ответов". Рациональный игрок не должен играть НЛО, как только он исключает возможность того, что его противники могут играть НЛО и т.д.

Стратегии, остающиеся после такого итеративного удаления, — это те стратегии, которые рациональный игрок может оправдать, или рационализовать, разумеется, при некоторых разумных предположениях о выборе своих противников.

Определение 1.5.2. *Стратегии в* Σ_i, *которые выдерживают последовательное удаление НЛО назыаются рационализуемыми стратегиями*.

Понятие рационализуемых стартегий было введено независимо Бернхеймом и Пирсом (Bernheim, 1984; Pearce, 1984).

Можно показать, что также, как и при последовательном удалении строго доминируемых стратегий, порядок удаления не существенен. Заметим, что множество рационализируемых стратегий не может быть шире, чем множество стратегий, "выживающих" при последовательном удалении строго доминируемых стратегий, поскольку на каждом шаге процесса, определяющего множество рационализируемых стратегий, все стратегии, строго доминируемые на данном шаге, удаляются.

Пример (Osborn, Rubinstein) (см.рис. 16)

$$\begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} (0,7) & (2,5) & (7,0) & (0,1) \\ (5,2) & (3,3) & (5,2) & (0,1) \\ (7,0) & (2,5) & (0,7) & (0,1) \\ (0,0) & (0,-2) & (0,0) & (10,-1) \end{pmatrix} \end{array}$$

Рис. 16.

На 1 шаге исключения удаляется стратегия b_4, т. к. она является НЛО, поскольку она строго доминируется смешанной стратегией (1/2, 0, 1/2,0) или (2/3,1/3,0,0) . Как только исключено b_4 можно исключить a_4, т.к. она строго доминируется a_2 (поскольку b_4 удалена). Но дальше мы уже не можем удалить ни одну стратегию, т.к. a_1 — лучший ответ на b_3 , a_2 — на b_2 и a_3 — на b_1 . Аналогично остаются b1 , b2 , b3. Таким образом, множество рационализуемых чистых стратегий есть {a1, a2, a3} для игрока 1 и (b1, b2, b3) — для игрока 2.

Для каждой рационализуемой стратегии, игрок может построить последовательность "оправданий" своего выбора, без ссылок на убеждение в том, что другой игрок не будет играть НЛО стратегию. Например, в этой игре игрок 1 может оправдать выбор a2 убеждением, что игрок 2 будет играть b2 , которое игрок 1 может оправдать убеждением, что игрок 2 будет думать, что он собирается играть a2 , что осмысленно, если игрок 1 убежден, что игрок 2 думает, что он, игрок 1, думает, что игрок 2 будет играть b2 и т. д.

Мы отметили, что множество рационализуемых стратегий не больше, чем множество стратегий, остающихся после последовательного удаления строго доминируемых стратегий. Однако в случае двух игроков (n = 2) эти два множества совпадают, так как в игре 2-х лиц (смешанная) стратегия σ_i является лучшим ответом на некоторую стратегию противника, если σ_i не является строго доминируемой. Если чистая стратегия s_i игрока i является НЛО для любой смешанной стратегии оппонента, тогда s_i строго доминируется некоторой смешанной стратегией $\sigma_i \in \Sigma_i$.

Посмотрим это на примере (Mas-Colell, Whinston, Green) (см. рис. 17).

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} L & R \end{array} \\ \begin{array}{c} U \\ M \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} (10,1) & (0,4) \\ (4,2) & (4,3) \\ (0,5) & (10,2) \end{pmatrix} \end{array}$$

Рис. 17.

У игрока 1 — три стратегии U, M и D . U лучшая против L, но худшая против R, D лучшая против R, и худшая — против L . С другой стороны M "относительно неплоха" и против L и против R. Ни одна из этих трех стратегий не доминируется никакой другой. Но если разрешить игроку 1 рандомизацию, то игра U и D с вероятностями 1/2 каждая дает игроку 1 ожидаемый выигрыш 5, вне зависимости от стратегии второго игрока, тем самым строго доминируя M.

Предположим, что выигрыши от использования стратегии M изменены так, что M не является строго доминируемой. Тогда выигрыши от M лежат где-то выше, чем линия, соединяющая точки, соответствующие стратегиям U и D . Здесь оси соответствуют ожидаемым выигрышам игрока 1 в случае, если игрок 2 играет R (ось ur) и L (ось u_R) (см. рис.18).

Линия ab – это множество

$$\{(u_R, u_L) : \frac{1}{2}u_R + \frac{1}{2}u_L = \frac{1}{2}u_1(M,R) + \frac{1}{2}u_1(M,L)\}$$

Является ли M здесь лучшим ответом? ДА.

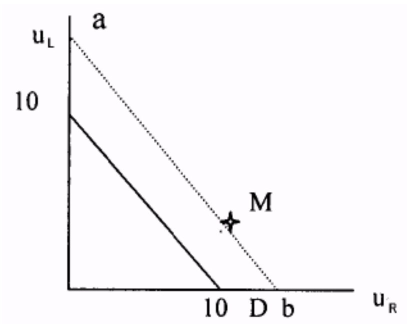

Рис. 18.

Действительно, заметим, что если игрок 2 играет R с вероятностью $\sigma_2(R)$, тогда ожидаемый выигрыш игрока 1 от выбора стратегии с выигрышами (u_R, u_L) есть $\sigma_2(R)\cdot u_R + (1 — \sigma_2 (R))\cdot u_L$. Легко видеть, что M —это лучший ответ на $\sigma_2(R) = 1/2$; он дает ожидаемый выигрыш, строго больший, чем ожидаемый выигрыш, достижимый с помощью стратегий U и/или D . (В случае $n > 2$ это уже не так: могут быть стратегии, являющиеся НЛО, но не являющиеся строго доминируемыми; это связано с тем, что рандомизация независима).

Тема 5. Равновесие Нэша, антагонистические игры

Мы начнем со случая, когда рассматривается исходная игра Г, а к смешанному расширению обратимся несколько позже.

Определение 1.6.1 *Набор стратегий* $s = (s_1, ..., s_n)$ *образует равновесие по Нэшу (или ситуация* $s = (s_1, ..., s_n)$ *является равновесной по Нэшу) в игре* $\Gamma = \{I, \{Si\}, \{ui\}\}$ *, если для любого* $i = 1,... n$

$$u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s_i', s_{-i}) \quad \forall \quad s_i' \in S_i.$$

Иными словами, если игрок в одиночку решает отклониться от выбранной стратегии, то он разве лишь ухудшит свое положение.

В ситуации равновесия по Нэшу, выбранная каждым игроком стратегия является лучшим ответом на стратегии, действительно "играемые" соперниками. В этом принципиальное отличие от рационализируемости, которая следует из общего знания о рациональности друг друга и структуры игры, и требует только, чтобы стратегия игроков была лучшим ответом на некоторую разумную гипотезу о том, что его противник будет играть, причем под разумностью понимается, что гипотетическая игра его противников может быть также оправдана. Таким образом, равновесность по Нэшу добавляет к этому требование того, чтобы игроки были правы в своих гипотезах. (Далее мы для краткости будем писать р.Н. для обозначения равновесия по Нэшу).

Разумеется, полученные нами ситуации в рассмотренной ранее дилемме заключенного (во всех ее вариантах) являются равновесными по Нэшу.

Пример. "Семейный спор". Этот пример также относится к числу традиционных примеров, различные вариации которого встречаются в большинстве учебников. История примерно такова. Он и Она независимо (мы оставляет в стороне вопрос о разумности или неразумности подобной постановки вопроса) решают, куда пойти — на балет (Б), или футбол (Ф). Если они вместе пойдут на футбол, то Он получит больше удовольствия, чем Она; если они вместе пойдут на балет, то — наоборот. Наконец, если они окажутся в разных местах, то они не получат никакого удовольствия. Рассматриваемая ситуация моделируется следующей игрой (см. рис. 19):

$$\begin{array}{ccc} & & \text{ОНА} \\ & & \begin{array}{cc} \quad Ф & \quad Б \end{array} \\ ОН & \begin{array}{c} Ф \\ \\ Б \end{array} & \begin{pmatrix} (2,1) & (0,0) \\ \\ (0,0) & (1,2) \end{pmatrix} \end{array}$$

Рис. 19.

Легко видеть, что здесь есть 2 равновесия по Нэшу в чистых стратегиях — (Ф, Ф) и (Б, Б). Мы увидим ниже, что в этой игре есть еще одно равновесие по Нэшу — в смешанных стратегиях.

Пример. Рассмотрим следующую игру (рис. 20)

	l	m	r
U	(5,3)	(1,4)	(3,5)
M	(4,2)	(5,5)	(4,1)
D	(3,5)	(2,7)	(5,3)

рис. 20.

Ясно, что здесь набор стратегий (M, m) образует равновесие по Нэшу. Если игрок 1 выбирает M, то у 2-ого лучший ответ — m и наоборот.

Пример. Вернемся к примеру, касавшемуся рационализуемости (рис. 16). В нем существует единственная (даже если разрешены смешанные стратегии) ситуация равновесия по Нэшу — (a_2 , b_2).

Этот пример иллюстрирует общее взаимоотношение между р.Н. и рационализуемыми стратегиями. Каждая стратегия, являющаяся частью р.Н., рационализуема, поскольку каждая стратегия игрока в ситуации р.Н. может быть "оправдана" равновесными стратегиями других игроков. Таким образом, равновесие по Нэшу предсказывает как минимум не хуже, чем рационализуемость, впрочем очень часто эти предсказания оказываются значительно более "четкими".

Очень удобно следующее переопределение равновесия по Нэшу. Введем следующее многозначное отображение "лучших ответов"

$b_i:S_{-i} \to S_i$ (в игре Г):

$$b_i(s_{-i}) = \{s_i \in S_i : u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s_i', s_{-i}) \quad \forall \quad s_i' \in S_i\}.$$

Тогда ситуация (s_1,. . ., s_n) является равновесием по Нэшу в игре Г, если $s_i \in b_i(s_{-i})$ для $\forall$ i = 1,. . . , n.

Что же можно сказать по поводу того, а почему собственно нам нужно заниматься р.Н.? На самом деле это один из проблемных вопросов теории игр, несмотря на очень широкое использование р.Н.

Равновесие по Нэшу, как последовательность рациональных выводов (умозаключений). Хотя это часто используется в качестве довода, тем не менее, мы видим, что следствие общего знания — это необходимость играть рационализируемые стратегии. Рациональность не обязательно ведет к правильности предсказания.

Равновесие по Нэшу как необходимое условие, если есть единственный предсказуемый исход игры. Если игроки думают и разделяют представления о том, что существует очевидный (в частности, единственный) способ играть игру, то это должно быть р.Н. Разумеется, этот аргумент подходит, если существует единственное предсказание, как игроки будут играть. Однако, вспомнив рационализуемость, мы придем к выводу, что этого недостаточно. Поэтому, этот аргумент полезен, если есть действительно повод считать некоторый набор стратегий очевидным способом сыграть в игру.

Фокальные точки. Иногда случается так, что определенный исход является тем, что Шеллинг (1960) называет *фокальным исходом* (2-х человек просят назвать независимо какое-то место встречи, и если их выбор совпадет, то получают выигрыш). Это, конечно, явный кандидат, но только если он р.Н.

Равновесие по Нэшу как самофорсирующее соглашение. Если игроки перед игрой имеют возможность предварительных необязывающих переговоров. Если они согласились на какой-то исход, то это, конечно, очевидный кандидат.

Чтобы он стал самофорсирующим нужно, чтобы он был р.Н. Хотя даже, если они договорились играть р.Н., они все равно могут отклониться, если ожидают, что другие могут тоже уклониться.

Равновесие по Нэшу как устойчивое социальное соглашение. Определенный способ играть в игру может возникнуть во времени, если игра разыгрывается повторно и появляется некоторое устойчивое социальное соглашение. Если это так, то для игроков может быть "очевидным", что это соглашение будет поддерживаться. Это соглашение становится, так сказать, фокальным.

Более подробное обсуждение этой проблематики можно найти, например, в учебнике Mas-Colell, Whinston, Green.

1.7 Равновесие по Нэшу в смешанных стратегиях

Примеры, которые мы рассмотрели выше, продемонстрировали, что даже в очень простых играх равновесие по Нэшу в чистых стратегиях может быть не единственным. Однако, как мы увидим сейчас, равновесия в чистых стратегиях может не существовать вообще.

Пример. "Игра в орлянку" или "Орел или решка". 2 игрока одновременно, независимо выбирают либо "решку", либо "орла". Если их выбор различен, то первый игрок платит второму 1 рубль (доллар, и т.д.), если их выбор одинаков, то наоборот — второй платит первому столько же. Соответствующая игра имеет следующий вид (см. рис. 21).

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 0 & p \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ p \end{array} & \begin{pmatrix} (1,-1) & (-1,1) \\ (-1,1) & (1,-1) \end{pmatrix} \end{array}$$

Рис. 21.

Легко видеть, что в этой игре нет равновесия по Нэшу в чистых стратегиях, так как в любой ситуации одному из игроков выгодно отклониться от выбранной стратегии. Однако, как мы увидим, пара смешанных стратегий σ1 = (1/2, ½), σ2 = (1/2, ½), в которых каждый из игроков играет свои чистые стратегии с равными вероятностями, образует равновесие по Нэшу в смешанных стратегиях.

Определение 1.7.1 *Ситуация (набор смешанных стратегий)* $\sigma = (\sigma_1, .., \sigma_n)$ *является равновесием по Нэшу в игре* $\tilde{\bar{A}}$ = {I, $\{\Sigma_i\}$, $\{u_i\}$}, *если для любого* i = 1, …, n

$u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq u_i(\sigma_i^{'}, \sigma_{-i}) \quad \forall \sigma_i^{'} \in \Sigma_i$

Предложение 1.7.1 *Пусть* $S^+_i \subset S_i$ *— множество чистых стратегий, которые игрок i играет с положительной вероятностью в ситуации)* $\sigma = (\sigma_1, .., \sigma_n)$. *Ситуация* σ *является р.Н. в смешанном расширении* $\tilde{\bar{A}}$ *игры* Γ *тогда и только тогда, когда для всех i* = 1,. . . , *n*

$$(1) \quad u_i(s_i, \sigma_{-i}) = u_i(s'_i, \sigma_{-i}) \quad \forall \quad s_i, s'_i \in S_i^+$$

$$(2) \quad u_i(s_i, \sigma_{-i}) \geq u_i(s'_i, \sigma_{-i}) \quad \forall \quad s_i \in S_i^+, s'_i \notin S_i^+.$$

Доказательство. Необходимость. Если бы одно из этих условий не выполнялось для некоторого i, то нашлись бы две стратегии $s_i \in S^+_i$ и $s'_i \in Si$: $u_i(s'_i, \sigma_{-i}) > u_i(s_i, \sigma_{-i})$, а значит, это не р.Н.

Достаточность. Предположим теперь, что (1) и (2) выполнены, но σ – не р.Н. Тогда существует игрок i и стратегия σ'i такая, что

$u_i(\sigma'_i, \sigma_{-i}) > u_i(\sigma_i, \sigma_{-i})$

Но если это так, то существует чистая стратегия s'_i, которая играется с положительной вероятностью при σ'_i и для которой $u_i(s'_i, \sigma_{-i}) > u_i(\sigma_i, \sigma_{-i})$. Так как $u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) = u_i(s_i, \sigma_{-i})$ для любой $s_i \in S^+_i$, это противоречит (1) и (2).

Таким образом, необходимые и достаточные условия того, что ситуация σ — р.Н., состоит в том: 1) что каждый игрок при данном распределении стратегий, которые играют его противники, безразличен между чистыми стратегиями, которые он играет с положительной вероятностью; 2) что эти чистые стратегии не хуже тех, которые он играет с нулевой вероятностью.

Это свойство можно использовать для нахождения смешанного равновесия по Нэшу (т.е. равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях).

Пример. Рассмотрим следующую игру (рис.22).

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} (1000, 1000) & (0, 0) \\ (0, 0) & (100, 100) \end{pmatrix} \end{array}$$

Рис. 22.

Очевидно, что ситуации (A,A) и (B,B) являются равновесными по Нэшу (в чистых стратегиях). Найдем равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях. Предположим, что в таком равновесии игрок 1 играет смешанную стратегию $(p, 1 - p)$, а второй — $(q, 1 - q)$, причем $0 < p, q < 1$.

Тогда, учитывая приведенное предложение мы, получаем, что ожидаемый выигрыш игрока 2 от игры A есть $1000p + 0\cdot(1 - p)$, а от игры B есть $100 *(1 - p) + 0\cdot p$, а значит

$1000\cdot p + (1 - p)\cdot 0 = 100\cdot(1 - p) + 0\cdot p$.

Отсюда $1100p = 100$ и следовательно $p = 1/11$. Аналогично, $q = 1/11$. Заметим, что в соответствии с предложением 1.7.1 у игроков в данном примере нет предпочтений относительно вероятностей, которые они приписывают своим стратегиям. Эти вероятности определяют "равновесное рассмотрение": необходимость сделать другого игрока безразличным относительно его стратегий.

Пример. Вернемся к игре "Семейный спор". Поступая как и в предыдущем примере, мы получаем, что Она, играя "Ф", получает $1\cdot p + 0\cdot(1 - p)$, а играя "Б", получает $0\cdot p+2\cdot(1 - p)$. Следовательно $2\cdot(1 - p) = p$. Отсюда $3\cdot p = 2$, а следовательно $p = 2/3$. Аналогично получаем $2q + (1 - q)\cdot 0 = 0\cdot q + (l - q)\cdot l$, а значит $3q = 1$ и $q = 1/3$. Таким образом, в смешанном равновесии Он играет "Ф" с вероятностью 2/3 , а Она играет "Ф" с вероятностью 1/3 .

Замечание 1.7.1. В определении смешанного расширения или равновесия в смешанных стратегиях мы предполагаем, что игроки осуществляют рандомизацию своих чистых стратегий независимо. Иными словами, мы можем считать, например, что Природа передает игрокам индивидуальные, независимо распределенные сигналы $(\theta 1, \theta 2, \ldots, \theta n) \in [0,1]x\ [0,1]x\ ...x[0,1]$, а каждый игрок i принимает решение в зависимости от различных возможных реализаций его сигнала θi.

Предположим, однако, что есть некий общий сигнал $\theta\in[0,1]$, который могут наблюдать все игроки. В этом случае появляются новые возможности. Так, к примеру, в упомянутой только что игре "Семейный спор" оба игрока могут, например, решить идти на футбол, если, скажем, $\theta< 1/2$, и идти на балет, если $\theta \geq 1/2$. Выбор стратегии каждым игроком остается случайным, тем не менее здесь мы имеем дело со вполне скоординированными действиями (Он и Она оказываются вместе), явно имеющими равновесный характер, причем если один игрок решает следовать этому правилу, то и для второго оптимально придерживаться этого же правила. Это дает нам пример коррелированного равновесия (совместного равновесия), введенного Р.Ауманом (Auman (1974)).

Формально такое равновесие — это специальный случай равновесия по Байесу-Нэшу, которое мы рассмотрим в главе 3.

Далее мы приведем важные результаты о существовании равновесий по Нэшу.

Предложение 1.7.2 *В смешанном расширении* $\tilde{\bar{A}}$ *любой игры* Г *с конечными множествами стратегий* S_1, ..., S_n *существует равновесие по Нэшу в смешанных стратегиях.*

Это предложение непосредственно следует из следующего более общего результата, так как в игре $\tilde{\bar{A}}$ множества стратегий игроков — это симплексы в соответствующем пространстве R^M .

Теорема 1.7.1 Debreu (1952), Glicksberg (1952), Fan Ky (1952). *Если для каждого* $i = 1,\dots,$ *n*

(1) S_i *— непусто, выпукло и компактно (в некотором* R^M*);*

(2) $u_i(s_1,\dots, s_n)$ *— непрерывна по* $(s;,\dots, s_n)$ *и квазивогнута по* s;,

то в игре $\Gamma = \{I, \{S_i\}, \{u_i\}\}$ *существует равновесие по Нэшу в чистых стратегиях.*

Напомним, что функция f: $R^K \to R$ называется квазивогнутой, если для любого a множество $\{x : f(x) \geq a\}$ — выпукло.

Доказательство этого предложения опирается на следующую лемму.

Лемма 1.7.1 *Если выполнены условия Теоремы 1.7.1, то отображение лучших ответов* b_i *непусто, выпуклозначно (т. е. множества* $b_i(s_{-i})$ *— непусты и выпуклы) и полунепрерывно сверху.*

Доказательство леммы 1.7.1. Во-первых заметим, что $b_i(s_{-i})$ — это множество тех стратегий i-го игрока, которые максимизируют $ui(\cdot,s_{-i})$ на компакте *Si* . Его непустота следует из непрерывности *Ui* . Выпуклость множества *bi(s-i)* следует из квазивогнутости функции ui(-,s_;). Чтобы проверить полунепрерывность сверху, мы должны показать, что для любой последовательности: (sf,s^) — > (s;,s_;), такой что sf G *bi(s^;)\/k* мы имеем *Si* G 6(s_;) . Заметим, что VA; *Ui(s^s^)* > Ui(s',s^) V s' G *Si* . В силу непрерывности u;(-) , $u_4(s_4,s_{\_4}) > u_4(s',s_{\_4})$.

Доказательство Теоремы. Определим отображение *b : S — > S* формулой

6(si, . . . , s_n) = 6i(s_i) x 62(5-2) x • • • x *b(s_n)*

Ясно, что b(·) — многозначное отображение *S* = *Si* X • • • X S_n в себя. По лемме b(·) непусто, выпукло-значно, полунепрерывно сверху. Следовательно, по Т. Какутани о неподвижной точке существует неподвижная точка, т. е. набор стратегий *s* G *S : s* G *b(s)* . Этот набор стратегий является равновесием по Нэшу, т.к. по построению

Si G *bi(s-i)* V *г* = 1, . . . , п. Справедлива также следующая теорема.

Теорема 1.7.2 (Glicksberg (1952)). *Если в игре* Г *множества Si стратегий игроков являются непустыми компактными подмножествами метрического пространства, а функции выигрышей Ui непрерывны, то существует равновесие по Нэшу в смешанных стратегиях.*

Пример. "Голосование". Рассмотрим следующую ситуацию — три игрока 1,2,3 и три альтернативы — A , D , C.

Игроки голосуют одновременно за одну из альтернатив, воздержаться невозможно. Таким образом, пространство стратегий Si = {A, B, C}. Альтернатива, получившая большинство, побеждает. Если ни одна из альтернатив не получает большинства, то выбирается альтернатива А. Функции выигрышей таковы:

$u_1(A) = u_2(B) = u_3(c) = 2$,

$u_1(B) = u_2(C) = u_3(A) = 1$,

$u_1(C) = u_2(A) = u_3(B) = 0$.

В этой игре три равновесных исхода (в чистых стратегиях): A, B и C . Теперь посмотрим на равновесия (их больше 3): если игроки 1 и 3 голосуют за А, то игрок 2 не изменит исход, как бы он ни голосовал, и игроку 3 безразлично, как он голосует. (A, A, A) и (A, B, A) —р.Н., но (A, A, B) —не р.Н., т.к. второму лучше голосовать за B.

Тема 6. Динамические игры с полной информацией

Определение. Графом называется пара (V,E), где V – конечное множество, а $E\subset S_2(V)$ (здесь $S_2(V)$ обозначает множество неупорядоченных пар элементов множества V). Элементы множества V называют вершинами графа, а элементы множества E – его ребрами. Если v – вершина, а e – ребро, и $v\in e$, то говорят, что вершина v и ребро e инцидентны. Если v и w – вершины и $\{v,w\}\in E$, то говорят, что вершины v и w – смежные.

- Матрицы смежности и инцидентности

Определение. Упорядоченный набор $(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ вершин графа называется путем в графе, если вершины v_i и v_{i+1} смежны для любого $i=1,\ldots,n-1$. Говорят, что путь $(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ соединяет вершины v_1 и v_n. Число $n-1$ называют длиной пути.

Определение. Говорят, что граф связен, если для любых двух вершин найдется соединяющий их путь.

Определение. Путь $(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ называется простым, если вершины $v_1,v_2,\ldots,v_n$ попарно различны.

Определение. Путь $(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ называется циклом, если $v_1=v_n$.

Определение. Цикл $(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ называется простым, если вершины $v_1,v_2,\ldots,v_{n-1}$ попарно различны.

Определение. Связный граф, не содержащий простых циклов положительной длины, называется деревом.

Лемма. Если в дереве заданы две вершины, то существует единственных простой путь соединяющий их.

Доказательство. Пусть v и w – две вершины дерева. Так как дерево – связный граф, существует соединяющий их путь. Пусть $(v=v_1,v_2,\ldots,v_n=w)$ кратчайший из таких путей. Тогда этот путь – простой. Действительно, если $v_i=v_j$ для некоторого i и некоторого $j>i$, то путь $(v_1,v_2,\ldots,v_i,v_{j+1},v_{j+2},\ldots,v_n)$ по-прежнему соединяет v и w и имеет меньшую длину, что противоречит выбору исходного пути. Существование доказано.

Докажем единственность. Пусть существуют два различных простых пути ($v=v_1,v_2,\ldots,v_n=w$) и ($v=w_1,w_2,\ldots,w_k=w$). Так как они различны, найдется вершина w_i, не принадлежащая пути ($v=v_1,v_2,\ldots,v_n=w$). Пусть j – наименьший номер, такой, что все вершины $w_j,w_{j+1},\ldots,w_i$ не принадлежат ($v=v_1,v_2,\ldots,v_n=w$), а l – наибольший номер, такой, что все вершины $w_i,w_{i+1},\ldots,w_l$ не принадлежат ($v=v_1,v_2,\ldots,v_n=w$). Тогда вершины w_{i-1} и w_{l+1} принадлежат пути ($v=v_1,v_2,\ldots,v_n=w$), то есть $w_{j-1}=v_p$ и $w_{l+1}=v_q$ для некоторых p и q. Если $p<q$, то путь $(v_p,w_j,\ldots,w_l\ ,v_q,v_{q-1},\ldots,v_p)$ будет простым циклом, а если $p>q$, то простым циклом будет путь $(v_p,w_j,\ldots,w_l\ ,v_q,v_{q+1},\ldots,v_p)$. В обоих случаях получается противоречие с определением дерева. Лемма доказана.

Определение. Семейство множеств $V_0,V_1,\ldots,V_n$ называется разбиением множества V, если множества $V_0,V_1,\ldots,V_n$ попарно не пересекаются, а их объединение равно V.

Определение. Пусть заданы два разбиения $V_0,V_1,\ldots,V_n$ и $W_0,W_1,\ldots,W_k$ множества V. Говорят, что разбиение $V_0,V_1,\ldots,V_n$ является утончением разбиения $W_0,W_1,\ldots,W_k$, если каждое из множеств $V_0,V_1,\ldots,V_n$ содержится ровно в одном из множеств $W_0,W_1,\ldots,W_k$.

Определение. Пусть в дереве отмечена некоторая вершина o. Ребра, инцидентные вершине v и не принадлежащие простому пути, соединяющему v с o, называются альтернативами в вершине v. Все вершины дерева с отмеченной вершиной естественным образом разбиваются на классы в соответствии с количеством альтернатив в них. Это разбиение называется альтернативным. Вершины, в которых нет альтернатив, называются финальными.

Определение. Пара (φ,ψ), где φ – отображение, ставящее в соответствие различным вершинам графа различные точки плоскости, а ψ – отображение, ставящее в соответствие ребру (v_1,v_2) графа отрезок с концами $\varphi(v_1)$ и $\varphi(v_2)$, называется вложением графа в плоскость, если отрезки, соответствующие различным ребрам не имеют общих внутренних точек.

Лемма. Любое дерево может быть вложено в плоскость.

Доказательство. Расстоянием между вершинами дерева будем называть длину единственного простого пути, соединяющего их.

Произвольным образом выберем вершину v_0 дерева и отнесем ее классу V_0. Для $t\in\mathbb{N}$ отнесем к классу V_t те и только те вершины, которые находятся на расстоянии t. Все множество вершин разобьется на конечное число классов.

Введем на плоскости декартовы координаты и положим $\varphi(v_0)=(0,0)$.

Произвольным образом перенумеруем вершины $v_1,\ldots,v_l$ множества V_1 и положим $\varphi(v_i)=(i,1)$.

Каждая вершина множества V_{t+1} смежна ровно с одной вершиной множества V_t. Считая, что вершины множества V_t уже перенумерованы, перенумеруем вершины множества V_{t+1} так, чтобы выполнялось неравенство $i<j$ всякий раз, когда $v_i\in V_{t+1}$, $v_j\in V_{t+1}$, $\{v_i,v_p\}\in E$, $\{v_j,v_q\}\in E$, $v_p\in V_t$, $v_q\in V_t$ и $p<q$. Положим $\varphi(v_j)=(j,t)$, если $v_j\in V_t$.

Построенное отображение удовлетворяет условиям леммы. Если $v_i\in V_{t+1}$, $v_p\in V_t$, $v_j\in V_{r+1}$, $v_q\in V_r$ и $t<r$, то отрезки $[\varphi(v_i),\varphi(v_p)]$ и $[\varphi(v_j),\varphi(v_q)]$ не пересекаются, так как лежат по

разные стороны от прямой $y=r$, а если $t=r$, то эти отрезки не пересекаются в силу выбора способа нумерации.

Игры в позиционной форме

Определение. Говорят, что задана игра n лиц в позиционной форме, если заданы:

a) Вложенное в плоскость дерево, называемое деревом игры, с отмеченной вершиной v_0 и выделенным ребром, инцидентным этой вершине.
b) Разбиение множества вершин этого дерева на подмножества $V^0,V^1,\ldots,V^n$. Это разбиение называется разбиением по игрокам. Элементы множества V^0 называются позициями случая, а элементы множества V^i – личными позициями i-го игрока ($i=1,\ldots,n$).
c) Разбиение множества вершин дерева игры, являющееся утончением, как альтернативного разбиения, так и разбиения по игрокам. Элементы этого разбиения называются информационными множествами.
d) Вероятностное распределение $(p_1(I),p_2(I),\ldots,p_m(I))$ на множестве $\{1,\ldots m\}$ для каждого информационного множества I, содержащегося в V^0, в вершинах которого имеется m альтернатив.
e) Упорядоченный набор из n чисел, называющихся выигрышами игроков для каждой финальной вершины.

Определение. Отмеченная вершина дерева игры называется начальной позицией игры. Вершины дерева, не являющиеся ни финальной, ни начальной, называются промежуточными позициями игры. Всякий простой путь, соединяющий начальную позицию игры с какой-нибудь финальной вершиной, называется партией в игре.

Считается, что в начальный момент времени игра находится в начальной позиции. При разыгрывании игры последовательно, шаг за шагом, реализуются шаги одного из двух типов.

a) Если игра находится в позиции v, принадлежащей множеству V^0, то находится реализация j случайной величины, заданной для информационного множества, содержащего вершину v. Находится j-я альтернатива в вершине v, считая против часовой стрелки от единственного ребра, инцидентного вершине v и не являющегося альтернативой (если вершина v – начальная, то отсчет начинается с отмеченного ребра). Далее берется вторая вершина w, инцидентная выбранной альтернативе, и считается, что игра перешла в позицию w.
b) Если игра находится в позиции v, принадлежащей V^i, то выбор альтернативы делает i-ый игрок. При этом он не знает, в какой именно позиции находится игра, но знает информационное множество, которому эта позиция принадлежит. Следовательно, он знает число альтернатив m в позиции v. Он выбирает натуральное число $j\leq m$. После этого находится j-я альтернатива в вершине v, считая против часовой стрелки от единственного ребра, инцидентного вершине v и не являющегося альтернативой (если вершина v – начальная, то отсчет начинается с отмеченного

ребра). Далее берется вторая вершина w, инцидентная выбранной альтернативе, и считается, что игра перешла в позицию w.

За конечное число таких шагов игра попадет в одну из финальных вершин v, в которой заданы числа $(h^1(v),h^2(v),\ldots,h^n(v))$. Выигрыш игрока i составит $h^i(v)$.

Нормальная форма позиционной игры

Пусть задана позиционная игра n лиц. Построим игру в нормальной форме Г следующим образом.

Множество игроков N в этой игре равно $\{1,2,\ldots,n\}$.

Пусть $i\in N$ и $W=\{I_1,I_2,\ldots,I_k\}$ – семейство всех информационных множеств позиционной игры, содержащихся в множестве V^i. Будем считать, что U^i есть множество всех функций u^i, отображающих W в □ и удовлетворяющих следующему условию: число $u^i(I)$ не превосходит количества альтернатив в любой вершине из множества I.

Стратегия u^i задает вероятностное распределение $(p_1(v),p_2(v),\ldots,p_m(v))$ на множестве всех альтернатив в вершине v по следующему правилу: $p_j(v)=\begin{cases}1, \text{ если } v\in I \text{ и } u^i(I)=j,\\ 0 \text{ в противном случае.}\end{cases}$ В позициях случая также задается вероятностное распределение $(p_1(v),p_2(v),\ldots,p_m(v))$ на множестве альтернатив условием $p_j(v)=p_j(I)$, если $j\in I$.

Для каждой финальной вершины w определен единственный путь $(v_0,v_1,\ldots,v_k=w)$, соединяющий ее с начальной вершиной v_0 и числа q_t $(t=0,\ldots,k-1)$, равные $p_j(v_t)$, где j номер альтернативы $\{v_t,v_{t+1}\}$ в вершине v_t. Положим $P(w)=\prod_{t=0}^{k} q_t$. Непосредственно проверяется, что величины $P(w)$ задают вероятностное распределение на множестве финальных вершин. Таким образом, величины $h^i(w)$ можно считать случайными, причем распределения этих величин зависят от стратегий всех игроков. Обозначим $g^i(u^1,u^2,\ldots,u^n)$ математическое ожидание величины h^i при условии, что игроки выбрали стратегии $u^1,u^2,\ldots,u^n$ соответственно.

Определение. Построенная таким образом игра $Г=\langle N,U^1,\ldots,U^n,g^1,\ldots,g^n\rangle$ называется нормальной формой данной позиционной игры.

- Пример: Фан-тан

С помощью этой конструкции на класс позиционных игр переносятся понятия седловой точки, смешанной стратегии, равновесия по Нэшу и т. д.

С помощью позиционных игр удобно моделировать салонные игры (шахматы, шашки, нарды, покер, преферанс и т.д.), а также многие другие процессы, в которых принятие решений разворачивается во времени.

Определение. Позиционная игра n лиц называется игрой с полной информацией, если все ее информационные множества содержат ровно по одному элементу.

В играх с полной информацией информационные множества естественным образом отождествляются с позициями игры. В дальнейшем мы будем этим пользоваться для упрощения обозначений.

Шахматы, шашки и нарды являются играми с полной информацией, а покер и преферанс – нет.

Рассмотрим класс П позиционных игр, различающихся только информационным разбиением. Непосредственно устанавливаются следующие факты.

Лемма. В классе П существует ровно одна игра, в которой каждое информационное множество равно пересечению одного множества альтернативного разбиения и одного множества с разбиения по игрокам исходной игры. Любая игра класса П является квазиинформационным расширением этой игры.

Лемма. В классе П существует единственная игра с полной информацией. Она является квазиинформационным расширением любой игры класса П.

Лемма. Пусть заданы две игры класса П, причем информационное разбиение в первой из них является утончением информационного разбиения во второй. Тогда первая игра является квазиинформационным расширением второй.

- Потеря структуры при переходе к нормальной форме

Совершенное равновесие в динамических играх

Теорема. Во всякой игре с полной информацией существует ситуация равновесия по Нэшу.

Доказательство. Для каждой вершины v дерева игры определим набор чисел $(h^1(v),h^2(v),\ldots,h^n(v))$ и для каждой нефинальной личной позиции v i-го игрока определим натуральное число $u^i(v)$ следующим образом.

Для всех финальных вершин дерева числа $(h^1(v),h^2(v),\ldots,h^n(v))$ уже определены. Далее действуем индуктивно.

Из множества вершин, в которых эти числа еще не определены, выбираем любую вершину v, расстояние от которой до начальной вершины максимально. Тогда для всех альтернатив $\{v,w_1\},\{v,w_2\},\ldots,\{v,w_m\}$ числа $(h^1(w_j),h^2(w_j),\ldots,h^n(w_j))$ уже определены. Если v – это позиция случая, в которой заданы вероятности $(p_1(v),p_2(v),\ldots,p_m(v))$ выбора альтернатив $\{v,w_1\},\{v,w_2\},\ldots,\{v,w_m\}$, то положим $h^i(v)=\sum_{j=1}^{m} p_j h^i(w_j)$. Если же v – личная позиция i-го игрока, то найдем j, для которого $h^i(w_j)=\max_{1\le l\le m} h^i(w_l)$, положим $u^i(v)=j$ и $h^k(v)=h^k(w_j)$ для всех $k=1,\ldots,n$.

За конечное число таких шагов числа $(h^1(v),h^2(v),\ldots,h^n(v))$ будут определены для всех вершин графа игры, а функция u^i будет определена для всех личных позиций i-го игрока.

Индукцией «с конца» доказывается, что $g^i(u)=g^i(u^1,\ldots,u^n)=h^i(v_0)$. Пусть теперь u_*^i – произвольная стратегия i-го игрока и $(v_0,v_1,\ldots,v_k)$ – порождаемая ситуацией $\left(u \| u_*^i\right)$ партия игры. Вновь индукцией «с конца» доказывается, что $h^i(v_k)\le h^i(v_l)$. Из неравенств $h^i(v_k)\le h^i(v_0)$ следует, что построенная ситуация u – ситуация равновесия. Теорема доказана.

Для всякой позиционной игры и любой вершины v ее дерева игры можно определить понятие подыгры с начальной вершиной v следующим образом.

Пусть v – произвольная вершина дерева игры и $V(v)$ – это множество всех вершин w, для которых существует такой набор ($v=v_1,v_2,\dots,v_k=w$), что для всех $j=1,\dots,k–1$ $\{v_k,v_{k+1}\}$ есть альтернатива в вершине v_k. Очевидно, $V(v_0)=V$.

Дерево подыгры с вершиной v имеет множество вершин $V(v)$. Его ребрами являются все ребра исходной игры, обе вершины которой принадлежат $V(v)$. Разбиение по игрокам в подыгре есть $V^0\bigcap V(v), V^1\bigcap V(v),\dots,V^n\bigcap V(v)$, а всякое информационное множество в подыгре имеет вид $V(v)\bigcap I$, где I – некоторое информационное множество в исходной игре. Выигрыши игроков $(h^1(w),h^2(w),\dots,h^n(w))$ в любой финальной вершине w подыгры и вероятности $(p_1(w),\dots,p_m(w))$ в любой позиции w случая в подыгре те же, что в исходной игре. Начальной позицией подыгры является вершина v, а отмеченным ребром – первая альтернатива в этой вершине, считая против часовой стрелки от ребра, не являющегося альтернативой.

Непосредственно проверяется, что так определенная подыгра сама является позиционной игрой n лиц.

Понятие подыгры особенно естественно для игр с полной информацией.

Если u^i – любая стратегия в исходной игре, то ограничение функции u^i на множество $V^i\bigcap V(v)$ будет стратегией того же игрока в подыгре.

Определение. Ситуация u в позиционной игре называется ситуацией совершенного равновесия, если для любой вершины v дерева игры ограничения стратегий u^i образуют ситуацию равновесия по Нэшу в подыгре с начальной вершиной v.

Из доказательства предыдущей теоремы легко усмотреть, что построенная там ситуация равновесия по Нэшу является ситуацией совершенного равновесия.

Тема 7. Статические игры с неполной информацией

Рассмотрим дуополию Курно для рынка с обратной функцией спроса $P(Q)=a-Q$, где $Q=q_1+q_2$ – общий спрос на рынке. Обе фирмы имеют одинаковые функции затрат $c_i(q_i)=cq_i$, но спрос является неопределенным: высоким ($a=a_H$) с вероятностью θ или низким ($a=a_L$) с вероятность $1-\theta$. Информация асимметрична: фирма 1 знает, какой спрос (высокий или низкий), а вторая фирма нет. Все описание ситуации общеизвестно. Обе фирмы выбирают размер выпуска одновременно. Каково множество стратегий для каждой фирмы? Предположите, что параметры a_H, a_L, θ и c таковы, что равновесные выпуски положительны. Найдите равновесие Байеса-Нэша в этой игре.

Рассмотрим дуополию Бертрана с асимметричной информацией и различающейся продукцией. Спрос на продукцию фирмы i равен $q_i(p_i,p_j)=a-p_i-b_ip_j$. Затраты будем считать равными нулю для обеих фирм. Чувствительность спроса фирмы i к цене фирмы j может быть высокой или низкой. Точнее, для каждой фирмы величина b_i может принимать значение b_H с вероятностью θ и b_L – с вероятностью 1-θ. Каждая фирма знает свою чувствительность, но не знает чувствительность конкурента. Это описание общеизвестно. Каковы множества действий, типов, ожиданий и функции полезности для данной игры? Каковы множества стратегий? При каких условиях в этой игре существует симметричное равновесие Байеса-Нэша в чистых стратегиях? Найдите это равновесие.

Найдите все равновесия Байеса-Нэша в чистых стратегиях в следующей игре:
1. Природа с равной вероятностью выбирает Игру 1 или Игру 2, которые отличаются только выигрышами.
2. Игрок 1 узнает выбор Природы, а игрок 2 нет.
3. Игроки одновременно выбирают свои действия.
4. Выигрыши определяются следующими матрицами

	L	R			L	R
T	1,1	0,0		T	0,0	0,0
B	0,0	0,0		B	0,0	2,2
Игра 1				Игра 2		

Вспомним, что следующая игра с угадыванием монеты (статическая игра с полной информацией) не имела равновесия Нэша в чистых стратегиях, но обладала единственным равновесием в смешанных стратегиях, в котором каждый игрок выбирал О с вероятностью ½:

		Игрок 2	
		О	Р
Игрок 1	О	1,-1	-1,1
	Р	-1,1	1,-1

Постройте соответствующую игру с неполной информацией, в которой равновесие Байеса-Нэша в чистых стратегиях превращается в равновесие Нэша в смешанных стратегиях по мере того, как неполнота информации исчезает.

Рассмотрите аукцион с закрытыми ставками по первой цене, в котором оценки покупателей независимы и одинаково равномерно распределены на отрезке [0,1]. Покажите, что если число покупателей равно n, то заявки по цене (n-1)/n от индивидуальной оценки стоимости составляют равновесие Байеса-Нэша для этого аукциона.

Рассмотрите аукцион с закрытыми ставками по первой цене, в котором оценки покупателей независимы и одинаково распределены на отрезке [0,1] с положительной функцией плотности $f(v_i)$. Найдите симметричное равновесие Байеса-Нэша для случая двух участников.

Рассмотрим другую интерпретацию двойного аукциона. Пусть имеется фирма и работник, причем фирма знает, какой у нее выигрыш m от деятельности работника на данной позиции, а рабочий знает свои альтернативные возможности v. Сделка означает, что работник принимается на работу, а цена сделки равна его зарплате w. Если сделка заключена, то фирма выигрывает m-w, а работник – w. Если нет сделки, то выигрыш фирмы равен нулю, а работника – v.

Предположим, что m и v распределены независимо и равномерно на отрезке [0,1]. Найдите линейное равновесие в этом двойном аукционе.

Рассмотрим две других торговых игры в качестве альтернативы двойного аукциона.

Игра 1. Перед тем, как стороны получают приватную информацию, они подписывают контракт о том, что фирма нанимает работника с зарплатой w, но любая из сторон имеет право выйти из трудового соглашения без каких-либо затрат. После получения приватной информации стороны одновременно и независимо друг от друга принимают решение утвердить договор с зарплатой w или расторгнуть договор. Если обе стороны утверждают договор, то сделка считается заключенной, иначе никакой сделки нет. Найдите равновесие Байеса-Нэша в предположении, что w – произвольное число из отрезка [0,1]. Нарисуйте множество типов, при которых сделка будет заключена. Найдите значение w, которое максимизирует суммарный выигрыш игроков.

Игра 2. Перед получением приватной информации оба игрока подписывают контракт: будет ли работник нанят и если будет, то на какую зарплату, определяется в рамках следующей динамической игры. После получения приватной информации фирма выбирает уровень зарплаты w и предлагает ее работнику, который может согласиться или отказаться. Попробуйте проанализировать эту игру методом обратной индукции. Что будет делать работник при заданных v и w? Если фирма предвидит действия работника в ответ на ее предложение, то что она будет предлагать при заданном **m.**

Тема 8. Динамические игры с неполной информацией, элементы эволюционной теории игр

Рассмотрим две приведенные таблицы, игровой смысл которых состоит в следующем. У первого игрока (игрок 1) есть возможность выбрать либо стратегию (ход) u (первая строка), либо стратегию d (вторая строка). Второй игрок (игрок 2) может выбрать либо стратегию *l* (первый столбец), либо стратегию r (второй столбец). Они делают свои ходы одновременно и независимо. После этого они получают свои выигрыши, которые указаны в соответствующих клетках: если, например, игрок 1 выбрал u , а игрок 2 выбрал r, то в случае A оба они получат по 2 рубля (доллара, фунта, ...), а в случае B — первый получит — 5, а второй — 4.

В случае A, по-видимому, совершенно очевидно, что "играть" надо левую нижнюю клетку (т.е. выбирать, соответственно, d и *l*), тогда как совершенно не понятно, что нужно играть во втором случае. И одна из возможностей состоит в разрешении предварительных переговоров. Но если бы понятие равновесия по Нэшу можно было оправдать, апеллируя только к предварительным переговорам, то значение этого понятия было бы достаточно низким, поскольку центральным становился бы вопрос о "силе договоренности". Однако "оправдание" равновесия по Нэшу исходит из ряда других соображений, на которых мы остановимся, в частности, в главе 1. Мы не будем пытаться приводить сложные модели, а лишь упомянем некоторые возможные приложения. Рассмотрим следующую игру

		2	
		l	r
1	u	5,5	-1,6
	d	6,-1	0,0

Ситуации подобного рода достаточно часто возникают в экономических рассмотрениях. Представим себе, например, две фирмы, продающие один и тот же (точнее, однородный) продукт. Каждая из фирм может рекламировать свой товар, скажем предлагая его на распродаже, что может увеличить ее прибыль и уменьшить прибыль конкурента, при данном фиксированном способе действия конкурента. Если обе фирмы рекламируют, то чистая прибыль каждого из конкурентов может уменьшиться. (Пример такого рода ситуации дает конкуренция между Airbus и Boeing. Хотя реклама в этом случае не была существенным элементом, в то же время ценовые уступки играли важную роль). Второго рода пример - две страны, являющиеся торговыми партнерами. Каждая из стран может использовать различные виды протекционистских мер, что в ряде случаев может приводить к выгоде своей страны, при данных фиксированных действиях второй страны. Если обе страны занимаются протекционистской политикой, общее благосостояние стран может снижаться.

В этом примере (мы впоследствии будем неоднократно возвращаться к такого типа игре) равновесие по Нэшу определяется стратегией d первого игрока и r — второго игрока. Действительно, если первый игрок выбрал стратегию d, то второму игроку невыгодно отклоняться от стратегии r, так как он вместо 0 получит выигрыш — 1 . Аналогично, если второй игрок придерживается стратегии r, то первому невыгодно вместо d играть u , так как он также вместо 0 проиграет 1.

В тоже время "хорошая" ситуация (u, *l*), когда игрок 1 выбирает u, а второй — *l*, не является ситуацией равновесия по Нэшу, так как, например, игроку 1 выгодно (при условии, что второй играет *l*) отклониться от а и сыграть d, поскольку вместо 5 он выиграет 6.

На этом простом примере мы видим, что ситуации равновесия по Нэшу могут приводить к тем исходам, которые представляются весьма неудачными. Однако здесь возникает целый ряд интересных возможностей, в частности, связанных с введением динамики, позволяющих уходить от таких "неудач". Однако об этом нам предстоит подробнее говорить ниже.

Безусловно, следует специально подчеркнуть, что большая роль теории игр в экономике во многом объясняется тем, что теория игр дает язык для моделирования и технику анализа специфического динамического конкурентного взаимодействия. Скажем, в достаточно простом варианте это можно проиллюстрировать на следующем примере (см., Kreps (1990)). Представим себе монополиста (в классическом смысле), производящего некоторый товар для продажи. Для простоты будем считать, что спрос определяется кривой $x = 13 - p$. Структура затрат монополиста также весьма проста: $c(x) = 6.25 + x$. Стандартная теория предсказывает, что монополист, максимизирующий прибыль, будет выпускать 6 единиц готовой продукции и получит прибыль 29.75 (при цене 7). В то же время, если в данной ситуации рассмотреть возможность входа новичка (с такими же характеристиками), то ответ будет уже совершенно другим: укоренившийся монополист, предвидящий возможность входа, будет производить 7 единиц готового продукта (при цене 6), теряя несколько в прибыли в данном периоде, но обеспечивая себе большую прибыль в длительном периоде, поскольку новичок, считающий, что укоренившаяся фирма будет продолжать выпускать тот же объем продукции, воздержится от входа, так как его вход принесет ему нулевую прибыль.

Разумеется, здесь возникает, например, такой вопрос. А почему собственно новичок должен верить в то, что монополист будет продолжать выпускать такой-то объем готовой продукции, если новичок все-таки "осмелится" войти в отрасль? Этот вопрос, безусловно, существенен для этой истории. Хотя простейшая модель не дает ответа на этот вопрос, тем не менее, более сложные модели входа со сложной динамикой, которые используют многошаговые игры, уже позволяют анализировать ситуации входа с различными гипотезами о поведении агентов. Скажем, если мы будем рассматривать двухпериодную модель, то уже появляется возможность рассматривать более сложное поведение. Например, возможен вариант, когда монополист в первом периоде выбирает технологию. Он может, к примеру, за счет высоких фиксированных затрат снизить предельные затраты. Высокие фиксированные затраты и низкие предельные затраты делают поведение монополиста более агрессивным во втором периоде. Далее монополист может в первом периоде предпринимать действия, порождающие "потребительскую лояльность" (скажем, снижать цены) и т. д. и т. п. Известны многочисленные вариации на тему входа. Основной характеристикой соответствующих моделей является то, что в первом периоде монополист совершает действие, которое изменяет природу "дальнейшей игры", если новичок появляется, и которое может либо предотвратить вход совсем, либо позволит монополисту "подготовиться" к входу так, чтобы иметь преимущество в образующейся впоследствии дуополии (см.: например, Dixit (1980)).

Другая вариация на эту тему — это рассмотрение ситуации, когда новичок не имеет точного знания характеристик монополиста. Например, новичок не знает структуры затрат монополиста. В этом случае он может воспринимать низкую цену в первом периоде как сигнал, говорящий о низких предельных затратах укоренившейся фирмы, а стало быть воздержаться от входа. Монополист, понимая это, может, даже в случае высоких предельных затрат, назначить достаточно низкую цену, сигнализируя тем самым о, якобы, низких затратах.

Следующий момент, который необходимо отметить — это момент, связанный с тем, что теория игр дала возможность моделировать ситуации, когда речь идет о том, верить или не верить тем или иным обещаниям или угрозам. Здесь речь идет о моделировании репутации (скажем работодатель и работник).

Следующий классический пример, связанный с повторяющимся взаимодействием участников — неявный сговор в олигополии. Он базируется на так называемой Folk Theorem ("народной теореме", "фольклорной теореме" — см. гл.2), которая утверждает, что любые выигрыши двух фирм, которые дают каждой из фирм больше максиминного выигрыша и в сумме меньше, чем монопольная прибыль (за период) может поддерживаться в равновесии, если будущее ценится фирмами достаточно высоко. Как и во многих случаях, здесь возникает неприятный момент множественности равновесия, который, увы, оказывается весьма существенным и вынуждает пытаться вводить различные модификации равновесия по Нэшу.

Равновесия по Нэшу — это "согласованные" предсказания того, как игра будет разыгрываться, в том смысле, что если все игроки предсказывают, что возникнет определенное равновесие, то ни у одного из игроков не будет стимулов для отклонения. Таким образом, равновесие по Нэшу, и только оно, может обладать свойством, таким что игроки могут предвидеть его, их оппоненты предвидеть его и т. д. Напротив, предвидение того, что возникнет неравновесная ситуация, влечет за собой то, что по крайней мере один игрок сделает "ошибку", либо в своем предсказании, либо в оптимизации своего выигрыша. Естественно, вряд ли можно считать, что такие ошибки никогда не возникают.

4. В то самое время, когда теория бескоалиционных игр становится стандартным инструментом в экономике, она подвергается значительной критике со стороны как теоретиков так и экспериментаторов. Бескоалиционная теория игр, подобно неоклассической экономике, базируется на двух "героических" предположениях: МАКСИМИЗАЦИИ (каждый экономический агент рационален и ясно представляет себе мир); и СОГЛАСОВАННОСТИ (представления агента, и, в частности, его ожидания относительно поведения остальных агентов правильны). Эти два предположения, по сути дела и оправдывают то, что общие образцы индивидуального оптимизирующего поведения формируют равновесие по Нэшу.

Основная проблема, с которой в настоящее время столкнулись теоретики — это проблема "неотразимого" обоснования этих двух предположений, ибо традиционные обоснования отнюдь не являются неотразимыми. В то же время без такого обоснования использование теории игр в приложениях становится проблематичным. Использование теории игр требует понимания того, когда эти предположения осмысленны, а в каких случаях — нет. Основной упрек, часто адресуемый экономической методологии, касается центральной роли гипотезы максимизации. Общий неформальный аргумент в пользу максимизации состоит в том, что любой не максимизирующий агент, и в частности, любая фирма, не максимизирующая прибыль, будет выдавлена рыночными силами. Это эволюционный аргумент, и как таковой, хорошо известен. Однако, работает ли такое оправдание? Является ли равновесие по Нэшу, или какое-либо связанное с ним понятие, хорошим предсказанием?

Аналогия между бескоалиционной теорией игр и неоклассической экономикой очевидна, но она не абсолютна. Конечно, вопрос о том, максимизируют ли агенты, по существу один и тот же. Более того, предположение согласованности появляется также в неоклассической экономике как предположение о том, что цены очищают рынок. Однако фундаментальное различие между неоклассической экономикой и бескоалиционной теорией игр в том, что многочисленные равновесия в конкурентной экономике почти всегда разделяют многие из свойств (скажем, эффективность или ее отсутствие), тогда как многочисленные равновесия в игре могут иметь существенно различные свойства. Неоклассическая экономика не ставит вопроса о выборе равновесия, теория же игр обязана это делать.

В настоящее время очень стремительно развивается эволюционная теория игр.

Большинство работ по эволюционной теории игр мотивированы двумя основными вопросами: 1. Действительно ли агенты играют равновесие по Нэшу? 2.Если агенты играют равновесие по Нэшу, то *какое*?

Эволюционная теория игр формализует и обобщает эволюционный аргумент, предполагая, что более успешное поведение имеет тенденцию превалировать. В канонической модели популяция игроков взаимодействует во времени, причем их поведение приспосабливается во времени в ответ на их выигрыши (полезности, прибыли и т. д.), к которым исторически приводил их выбор. Эти игроки могут быть работниками, потребителями, фирмами и т. п. В центре внимания находится динамическое поведение системы. Ключевыми предположениями являются предположения о том, что имеется популяция игроков, эти игроки взаимодействуют, и что поведение игроков наивно (в двух смыслах: игроки не верят, не понимают, что их собственное поведение потенциально влияет на будущее поведение их оппонентов, и игроки, типично, не принимают во внимание возможность того, что их оппоненты подобным же образом вовлечены в приспособление своего собственного поведения). Здесь важно заметить, что успешное поведение становится превалирующим не только потому, что рыночные силы производят отбор, исключая неуспешное поведение, но и потому, что агенты имитируют успешное поведение.

Поскольку эволюционная теория игр изучает популяции, "играющие в игры", она также полезна при изучении социальных норм и конвенций. Эволюция конвенций и социальных норм является примером игроков, обучающихся играть равновесие. Примеры включают популяцию потребителей, которые должны решить, какой тип товара покупать; популяцию работников, которые должны решить, какие усилия прилагать, и т. д.

Эволюционная теория игр дает положительный ответ на первый вопрос: во многих постановках игроки действительно играют равновесие по Нэшу. Таким образом, это дает оправдание равновесного анализа тогда, когда осмысленны эволюционные аргументы. Равновесие лучше всего рассматривать как устойчивое состояние сообщества, члены которого близоруко группируются "по направлению" к максимизирующему поведению. И это существенно контрастирует с более ранним взглядом (у которого нет достаточного фундамента), в соответствии с которым теория игр и равновесный анализ представляют исследование взаимодействия ультрарациональных агентов с "большим запасом" знаний.

Вопрос о том, какое равновесие играется, широко обсуждается особенно в литературе, касающейся "уточнений" (или "утончений") равновесия. Однако проблема их обоснования также относится к ним. Можно представить себе, например, что допускается пред-игровое общение, которое приводит к тому, что определяется, какое равновесие играется (скажем, все работники прикладывают максимум усилий, или, напротив, минимум, если, к примеру, общий выпуск определяется минимальным (среди всех работников) уровнем усилий). Такое оправдание равновесия, конечно, возможно и применимо к ряду приложений. Но это не покрывает все возможности, тем более, что неизбежны ситуации, когда договор может нарушаться, или, что просто может не быть возможности предварительного общения.

Второе оправдание *самоосуществляющегося* предсказания может проходить примерно следующим образом: если теоретически единственным образом предсказанное поведение игроков известно игрокам в игре, то она должна предсказывать равновесие по Нэшу. Трудность здесь в том, что такое оправдание требует теории, которая однозначно предсказывает поведение игроков, а в этом-то проблема как раз и состоит.

Оправдание с помощью "фокальной точки" (Т. Шеллинг) можно формулировать примерно так: "если есть очевидный путь играть в игре (либо в силу специфики постановки, либо в силу специальной структуры), то игроки будут знать, что будут делать другие игроки".

Наконец, игроки могут научиться играть некоторое равновесие. Для того, чтобы научиться играть некоторое равновесие, игроки должны иметь возможность повторять розыгрыш этой или, по крайней мере, близкой, игры, чтобы иметь возможность получать нужный опыт. Если только игроки узнали, как играют их оппоненты, и если игроки максимизируют, то они должны оказаться в равновесии по Нэшу. В этой истории с обучением есть два момента. Первый — игроки максимизируют. Второй — это то, что при условии максимизирующего поведения игроков, игроки могут узнать поведение своих оппонентов. Это включает в себя дополнительные нюансы обучения. Даже если игрок знает, как его оппоненты играли, они могут не знать, каково было наилучшее действие. Наконец, само обучение меняет обстановку, которую агенты пытаются узнать, причем процесс обучения весьма тонок.

Мы остановились здесь на некоторых моментах, которые представляются нам важными, и на которых мы считали необходимым остановиться в преддверии формального изложения теории.